LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA

SUB AR VE

SERIE ME AR UM

LEONHARD EULER

NEUE GRUNDSÄTZE DER ARTILLERIE

N

MIT VIE AL AN

RA

LEIPZIG UND BERLIN

LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER

SERIES SECUNDA

OPERA MECHANICA ET ASTRONOMICA

VOLUMEN QUARTUM DECIMUM

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXII

LEONHARD EULER

NEUE GRUNDSÄTZE DER ARTILLERIE

AUS DEM ENGLISCHEN DES HERRN BENJAMIN ROBINS
ÜBERSETZT UND MIT VIELEN ANMERKUNGEN VERSEHEN

MIT VIER BALLISTISCHEN ABHANDLUNGEN

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ROBERT SCHERRER

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1922

VORWORT DES HERAUSGEBERS

Frühzeitig begann LEONHARD EULER sich mit den praktischen Anwendungen der Mechanik zu befassen; schrieb er doch schon mit 19 Jahren jene Abhandlung über die Bemastung der Schiffe, die von der Pariser Akademie mit einem Preis gekrönt wurde. Es ist die Abhandlung 4 des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses. Bald fand er auch Gelegenheit, sich speziell mit ballistischen Fragen zu beschäftigen. 1727 siedelte er nach Petersburg über und noch in demselben Jahre wohnte er als Mitglied der Akademie den Schießversuchen bei, die unter der Leitung des Generals GÜNTHER stattfanden und die den Gegenstand der vorletzten in unserem Bande befindlichen kurzen Abhandlung bilden.

Nachdem EULER 1741 infolge seiner Berufung an die preußische Akademie der Wissenschaften seinen Wohnsitz nach Berlin verlegt hatte, wurde er von FRIEDRICH DEM GROSSEN in einer Reihe von praktischen Fragen, insbesondere auch in solchen artilleristischer Natur, zu Rate gezogen. „Der König hatte", erzählt NICOLAUS FUSS[1]), „Herrn EULERS Meinung über das beste in dieses Fach schlagende Werk verlangt. Von ROBINS, der EULERS Mechanik, die er nicht verstund, einige Jahre vorher auf eine grobe Art angefallen hatte[2]), waren neue Grundsätze der Artillerie im englischen erschienen[3]), die Herr EULER dem König lobte, indem er sich zugleich anheischig machte, das Werk zu übersetzen und mit Zusätzen und Erläuterungen zu begleiten. Diese Erläuterungen enthalten eine vollständige

1) NICOLAUS FUSS (1755—1825), *Lobrede auf Herrn LEONHARD EULER. Von dem Verfasser selbst aus dem Französischen übersetzt und mit verschiedenen Zusätzen vermehrt, nebst einem vollständigen Verzeichnis der EULERSCHEN Schriften.* Basel 1786, p. 45—47. Abgedruckt in *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 1.

2) B. ROBINS (1707—1751), *Remarks on Mr. EULERS Treatise of motion, Dr. SMITH'S compleat system of optics, and Dr. JURINS essay upon distinct and indistinct vision,* London 1739, p. 1—29; wieder abgedruckt in JAMES WILSON, *Mathematical Tracts of the late BENJAMIN ROBINS, Esq.*, London 1761, vol. II, p. 191.

3) BENJAMIN ROBINS, *New principles of gunnery: containing the determination of the force of gunpowder, and an investigation of the difference in the resisting power of the air to swift and slow motions,* London 1742; wieder abgedruckt in JAMES WILSON, *Mathematical Tracts of the late BENJAMIN ROBINS, Esq.*, London 1761, vol. I, p. 1—153.

Theorie der Bewegung geworfener Körper und es ist seit 38 Jahren nichts erschienen, das dem, was Herr EULER damals in diesem schweren Theile der Mechanik getan hat, an die Seite gesetzt werden könnte. Auch ward der Werth dieses herrlichen Werkes allgemein anerkannt. Ein aufgeklärter Staatsmann, der französische See- und Finanzminister TURGOT, ließ es ins französische übersetzen[1]) und in den Artillerieschulen einführen; und beynahe zu eben der Zeit erschien eine englische Übersetzung[2]) in der größten typographischen Pracht, die englische Druckereyen einem Werke nur geben können. Indem Herr EULER in dieser Uebersetzung, wo es immer nur thunlich war, Herrn ROBINS Gerechtigkeit wiederfahren läßt, verbessert er, mit einer seltenen Bescheidenheit, dessen Fehler gegen die Theorie, und alle Rache, die er wegen des alten Unbills an seinem Gegner nimmt, besteht darinn, daß er dessen Werk so berühmt macht, als es ohne ihn nie geworden wäre."

BENJAMIN ROBINS wurde 1707, also in demselben Jahre wie EULER, zu Bath in England geboren und verriet frühzeitig eine vielseitige Begabung und Gewandtheit sowohl im mündlichen als auch im schriftlichen Ausdruck. Er studierte Mathematik und Physik, interessierte sich lebhaft für Geschichte, Kunst und Literatur und beschäftigte sich mit vielerlei technischen Fragen, insbesondere auch mit dem Befestigungswesen und der Ballistik. Durch zahlreiche Schießversuche mit Benutzung des von ihm erfundenen ballistischen Pendels suchte er sich über die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschoßgeschwindigkeit zu orientieren. Für seine Arbeiten auf diesem Gebiete erhielt er von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu London eine goldene Medaille. Die Besichtigung

1) J. L. LOMBARD, *Nouveaux principes d'artillerie de M. BENJAMIN ROBINS, commentés par M. LÉONARD EULER, traduits de l'allemand, avec des notes*, Dijon et Paris 1783 (Abhandlung 77B des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses. Als Anhang sind dieser Übersetzung beigefügt: 1) *Nouvelles Experiences faites à Woolwich, pour connaitre les vitesses initiales des Boulets, rapportées dans les Transactions philosophiques, année 1778, no. 111,* enthaltend den Bericht über die Ergebnisse der Schießversuche, die CHARLES HUTTON (1737—1823), Professor der Mathematik und Ingonieur an der Militärakademie zu Woolwich, im Jahre 1775 daselbst ausgeführt hatte; 2) *Extrait d'une dissertation de M. EULER sur l'explication des phénomènes de l'air, insérée dans le tome II des Memoires de l'académie de Péterbourg pour l'année 1727* (Abhandlung 7 des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses, enthalten in *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series II, vol. 27, unter dem Titel *Tentamen explicationis phaenomenorum aeris*).

2) HUGH BROWN, *The true principles of gunnery investigated and explained. Comprehending translations of professor EULERS observations upon the new principles of gunnery, published by the late Mr. BENJAMIN ROBINS, and that celebrated authors Discourse upon the track described by a body in a resisting medium, inserted in the memoirs of the Royal academy of Berlin for the year 1753* [Abhandlung 217A in ENESTRÖMS Verzeichnis]. *To wich are added many necessary explanations and remarks, together with Tables calculated for practice, the use of wich is illustrated by proper examples; with the method of solving that capital problem, which requires the elevation for the greatest range with any given initial velocity*, London 1777 (Abhandlung 77A in ENESTRÖMS Verzeichnis).

der festen Plätze in Flandern gab ihm Gelegenheit, sich in der Fortifikation zu vervollkommnen. In den Jahren 1749 und 1750 war er als General-Ingenieur der ostindischen Kompagnie in Indien tätig, wo er Pläne für die Forts St. David und Madras ausarbeitete. Seine zarte Konstitution ertrug jedoch das dortige Klima nicht. Am 29. Juli 1751 erlag er im Fort St. David dem Fieber.[1])

ROBINS literarische Arbeiten betreffen nicht allein Gegenstände der Mathematik und Physik, der Artillerie und Ballistik, sondern auch Angelegenheiten des öffentlichen Lebens und sind zum Teil polemischer Natur. Es verdient hier besonders erwähnt zu werden, daß er schon im Jahre 1747 in dem Aufsatz *On the nature and advantage of rifled barrel pieces* für die Einführung gezogener Gewehre eintrat und die Vorteile erkannte, welche die Hinterladung für die gezogenen Feuerwaffen hat. Dem raschen Aufschwung, den die von LEIBNIZ und NEWTON begründete höhere Analysis durch die Basler Mathematiker JAKOB, JOHANN, DANIEL BERNOULLI und LEONHARD EULER nahm, vermochte er jedoch nicht zu folgen; ein Umstand, der wenigstens teilweise die ablehnende Haltung erklärt, die er gegenüber EULERS *Mechanica* einnahm.

Obwohl schon GALILEI hervorgehoben hatte, daß die Wurflinie nur im luftleeren Raum eine Parabel sei, hielten sich doch die Artilleristen noch im 18. Jahrhundert an die parabolische Theorie, weil sie glaubten, den Einfluß des Luftwiderstandes auf die Flugbahn vernachlässigen zu dürfen. „L'Artillerie a eu son enfance comme les autres sciences mais beaucoup plus longue“, schreibt LOMBARD in der Vorrede zu der p. VIII, Anmerkung 1, zitierten französischen Übersetzung, „livrée d'abord à une routine aveugle, ses progrès ont été très lents. Il a fallu deux siècles pour détruire l'absurde opinion du mouvement rectiligne des projectiles; un autre siècle pour dissuader les Artilleurs de leur mouvement parabolique. Les effects de la résistance de l'air, quoique connus depuis longtemps, étaient un secret relégué dans les écrits de quelques savants et totalement ignorés des Artilleurs, à qui cependant cette connaissance était la plus nécessaire“. ROBINS hat das Verdienst, durch seine Schießversuche und Messungen eine richtige Einschätzung der Bedeutung des Luftwiderstandes angebahnt zu haben.

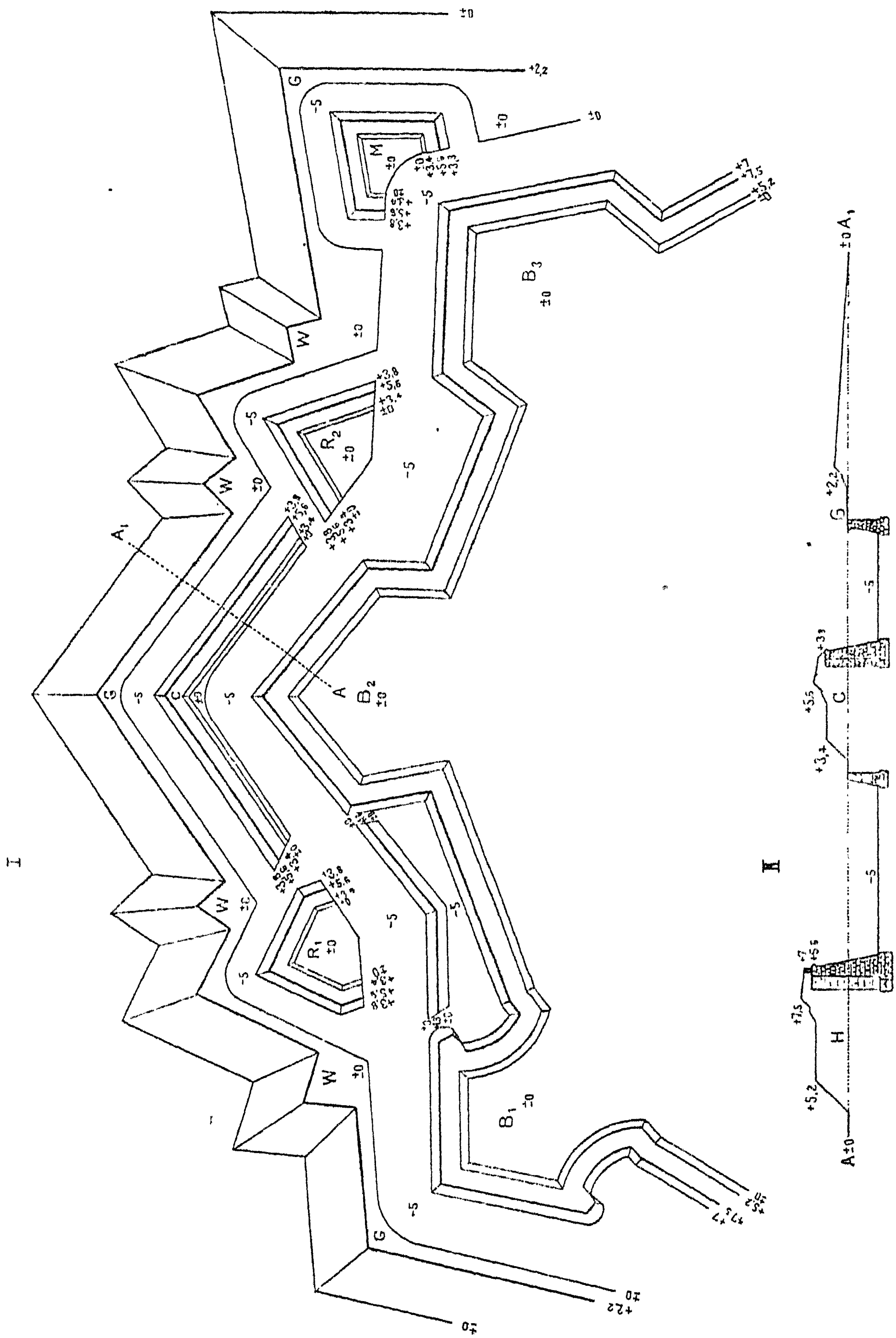
EULERS Übersetzung der *New Principles of gunnery* beginnt mit einer von EULER verfaßten Vorrede, in der er über die Einteilung des Werkes und über die von ihm hinzugefügten „Anmerkungen“ orientiert, die auf einen jeden der ROBINSSCHEN „Sätze“ folgen. Der sich daran anschließende „Vorbericht des Verfassers“ enthält eine Darstellung der Entwicklung der beständigen Befestigung und der Artillerie. ROBINS verfolgt darin die Ausgestaltung der Fortifikation von der Entstehung der Bastionen an bis auf VAUBAN und

1) Die biographischen Angaben über ROBINS wurden der Vorrede des p. VII zitierten Buches von JAMES WILSON entnommen.

COEHOORN und bedient sich dabei einiger technischer Ausdrücke, die hier an Hand der Figuren I und II auf S. XI erklärt werden sollen.

Fig. I zeigt den Grundriß eines Ausschnittes einer Bastionärbefestigung im Maßstab 1 : 5000 und Fig. II einen Vertikalschnitt im Maßstab 1 : 1250 längs der schwach gebrochenen Linie AA_1 des Grundrisses. Der letztere stellt drei mit B_1, B_2 und B_3 bezeichnete *Bastionen* oder *Bollwerke* dar, welche die Gestalt von Fünfecken haben, die auf einer Seite, nämlich gegen das Innere des befestigten Platzes, offen sind. Die Ecke, die der offenen Seite gegenüberliegt, ist die *Bastionsspitze.* Die in ihr zusammenstoßenden Wallteile sind die *Facen* und die sich rückwärts an sie anschließenden Wallteile die *Flanken.* Die Gerade, die den von den Facen gebildeten Winkel halbiert, wird *Kapitale* genannt. Der Punkt, wo die Flanke an die Face anstößt, heißt *Schulterpunkt.* Während die Flanken der Bastionen B_2 und B_3 geradlinig verlaufen, sind die der Bastion B_1 in der Weise kreisförmig gekrümmt, wie sie VAUBAN anfänglich anlegte; überdies schließen sie nicht, wie bei B_2 und B_3, an die Schulterpunkte an, sondern sie sind etwas zurückgesetzt, wodurch an jedem Schulterpunkt ein *Orillon* oder *Bollwerksohr* entsteht, das den Zweck hat, die dahinterliegenden Batterien zu decken. Der Teil des Walles, der zwei benachbarte Bastionen verbindet, heißt *Courtine.* Die Bastionen und Courtinen bilden zusammen die fortlaufende gebrochene Linie des Hauptwalles H (Fig. II), bestimmt zur Aufstellung von Geschützen, aber auch eingerichtet zur Verteidigung mit dem Gewehr. Vor dem Hauptwall zieht sich ein breiter Graben hin. Vor der Courtine rechts befindet sich das *Ravelin* R_2 (von den Franzosen auch *Demi-lune* genannt), dessen Wall nur aus den beiden Facen besteht, während das Ravelin R_1 vor der Courtine links noch zwei kurze Flanken hat. Zwischen der Courtine links und dem zugehörigen Ravelin ist zur wirksamen Grabenverteidigung eine *Grabenschere* (*Tenaille*) eingebaut. Vor den beiden Facen der mittleren Bastion wurde zu ihrem Schutz eine *Contregarde* C angelegt und vor der Spitze der Bastion B_3 ein *Halbmond* M, wie ihn ROBINS in Holland gesehen haben mag. Vor dem Graben, der alle genannten Anlagen umzieht, befindet sich der *gedeckte Weg* G, der in den einspringenden Ecken *Waffenplätze* W aufweist, die oft zu hartnäckiger Verteidigung eingerichtet waren und an die sich eine für Infanterieverteidigung eingerichtete Umwallung anschließt; sie zieht sich vor dem gedeckten Weg hin und soll ihn vor feindlicher Einwirkung schützen. Rampen, Brücken und unterirdische Gänge, die die einzelnen Befestigungsteile miteinander verbinden, sowie Traversen zum Schutze gegen seitliches Feuer sind der Einfachheit halber in der Zeichnung weggelassen worden.

Die Profilierung der einzelnen Teile der ganzen Befestigungsanlage zeigt Fig. II. Die Zahlen geben an, wie viele Meter eine im Grundriß angegebene Linie oder ein im Profil angedeuteter Punkt mit + über, mit — unter dem Bauhorizont liegt, der in der Fig. II durch die punktierte Linie bezeichnet ist, an deren Enden ± 0 steht. Die den Hauptwall



auf der Vorderseite begrenzende, mit einwärts angebrachten Strebepfeilern versehene Mauer heißt *Escarpe* und die ihr jenseits des Grabens gegenüberliegende Mauer *Contre-Escarpe*. Der Teil des Hauptwalles, der die Escarpemauer überragt, wird *Brustwehr* (*Parapet*) genannt, weil er den hinter ihm stehenden Schützen Deckung vor den feindlichen Geschossen gewähren soll (Fig. II). Derartige Brustwehren befinden sich auf jedem zur Verteidigung eingerichteten Wall, insbesondere auch auf den Ravelins, der Contre-Garde und der Grabenschere. Die höchste Linie an jeder Brustwehr, die *Feuerlinie* (*Crète*), wird in Fig. I durch einen etwas dickeren Strich dargestellt. Die ganz schwach geneigte Fläche vor der Feuerlinie des gedeckten Weges, die sich im Vorgelände verliert, heißt *Glacis*. Die zwischen den Kapitalen zweier benachbarter Bastionen liegenden Teile einer Festung bilden eine *Festungsfront*.

Bei der Belagerung einer Festung richtete sich der durch VAUBAN bis in alle Einzelheiten ausgebildete förmliche Angriff meistens gegen *eine* bestimmte Front. Nach Zurückdrängung der Vortruppen des Verteidigers legte man parallel zur Angriffsfront im Abstand von etwa 575 m von den nächsten Festungswerken einen Schützengraben, die *erste Parallele* genannt, an, der von den Schnittpunkten mit den die Front begrenzenden Kapitalen parallel zu den Nachbarfronten verlängert wurde. In die erste Parallele baute man die *Ricochetbatterien* und einzelne Wurfbatterien ein. Die Geschosse der ersteren sollten die Deckungen des Verteidigers in möglichst flachen Bogen überfliegen und die Festungslinien in mehreren Sprüngen der Länge nach bestreichen. Von der ersten Parallelen ausgehend schnitt man dann im Zickzack Laufgräben oder *Sappen* ein, deren Richtung so gewählt wurde, daß sie von der Festung aus nicht der Länge nach bestrichen werden konnten. Gegen die Festung zu waren sie mit einer Brustwehr versehen und hatten den Zweck, die Verbindung der ersten mit der *zweiten Parallelen* herzustellen, die ebenfalls in Schützengrabenprofil in einer Entfernung von etwa 250 m vom befestigten Platze angelegt wurde. In dieser Linie oder unmittelbar davor und durch einen Laufgraben damit verbunden wurden die *Demontierbatterien*, deren Geschütze die des Verteidigers zum Schweigen bringen sollten, und überdies *Wurfbatterien* gebaut. Von der zweiten Parallelen aus wurden wiederum Sappen vorgetrieben und dann wurde am Fuße des Glacis zur Aufnahme von Mörserbatterien die *dritte Parallele* erstellt. Hernach ging man von dieser aus mit traversierten Sappen gegen die Feuerlinie des gedeckten Weges vor und etablierte dort die *Breschebatterien* zum Zerstören des Mauerwerkes und die *Contrebatterien* zur Bekämpfung der nicht selten kasemattierten Batterien der Bastionsflanken. Hatte die Bresche eine genügende Breite erreicht, so schritt der Angreifer, wenn nötig, über den Grabenniedergang zum Sturm, den der Verteidiger gelegentlich dadurch zu vereiteln suchte, daß er in der Bastion hinter der Bresche ein *Retranchement*, das heißt eine neue Verteidigungslinie, einbaute.

Die Artillerie schleuderte um die Mitte des 18. Jahrhunderts aus glatten Vorderladern kugelförmige eiserne Geschosse und Kartätschen. Die Bezeichnung eines Geschützes als Sechspfünder, Zwölfpfünder usw. richtete sich nach dem Gewicht einer gußeisernen Vollkugel, deren Durchmesser mit dem Kaliber des betreffenden Geschützrohres übereinstimmte. Das Artilleriematerial zeigte in allen europäischen Staaten eine große Mannigfaltigkeit. Die kurze Charakteristik und Benennung der Geschütze auf Seite 320 ist deutschen Verhältnissen in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts angepaßt. Das Wort *Kartaune* oder Cartone (mittellateinisch Quartana) bezeichnete ursprünglich ein kurzes Geschütz, dessen Geschoßgewicht ein Viertel des 100 bis 200 Pfund schweren Geschosses eines „Hauptstückes" betrug.

Die zahl- und umfangreichen „Anmerkungen", die EULER in der Übersetzung des ROBINSSCHEN Buches den einzelnen „Sätzen" hat folgen lassen, bilden die erste Darstellung der innern, äußern und Ziel-Ballistik unter Zuhilfenahme der Infinitesimalrechnung. Auf Grund der Versuchsergebnisse von ROBINS setzt er den Widerstand, den die Bewegung einer Kugel durch die Luft erleidet, gleich dem Gewicht eines über ihrer Großkreisfläche stehenden Zylinders vom spezifischen Gewicht der Luft, die das Geschoß umgibt, und von der Höhe $\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\frac{v^2}{h}$. Dabei bedeutet h die Höhe eines Zylinders, der mit dem soeben genannten in der Basis und dem spezifischen Gewicht übereinstimmt, dessen absolutes Gewicht jedoch dem über der Basis lastenden Luftdruck gleichkommt, während v die Höhe bedeutet, bis zu welcher ein Körper, der mit der augenblicklichen Geschoßgeschwindigkeit lotrecht aufwärts geworfen wird, im luftleeren Raum steigt. Der Versuch, die Koordinaten der Flugbahnpunkte unter Voraussetzung dieses Luftwiderstandsgesetzes als Funktionen des Abgangswinkels und des Neigungswinkels der Bahntangenten gegen die Horizontale durch unendliche Reihen darzustellen, führte zu keinem befriedigenden Resultat. J. H. LAMBERT hat dann später, ausgehend von der Annahme, daß der Luftwiderstand dem Quadrat der Geschoßgeschwindigkeit proportional sei, derartige Reihenentwicklungen durchgeführt.[1])

Auf die EULERSCHE Bearbeitung des ROBINSSCHEN Werkes folgen im vorliegenden Bande noch vier Abhandlungen EULERS über Ballistik. Die Abhandlung 217 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses) *Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jettés dans l'air ou dans une autre fluide quelconque* erschien 1755 in den Memoiren der Berliner Akademie.[2]) Eine Abhandlung mit ungefähr demselben Titel war aber nach C. G. J. JACOBI

1) J. H. LAMBERT (1728—1777), *Mémoire sur la resistances des fluides avec la solution du problème balistique,* Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin 21 (1765), 1767, p. 102—188.

2) Eine englische Übersetzung der Abhandlung 217 ist p. VIII, Anmerkung 2, erwähnt.

schon am 20. Juli 1752 der Berliner Akademie vorgelegt worden. EULER nimmt darin den Luftwiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit an und ersetzt dann, um die sich ergebenden Integrale ausrechnen zu können, die Flugbahn durch eine gebrochene Linie. Jeder ihrer Teile wird durch Streckung eines Flugbahnbogens erhalten und ist gegen die Horizontale unter einem Winkel geneigt, der ein Mittelwert der Winkel ist, welche die Tangenten in den Endpunkten jenes Bahnbogens mit der Horizontalen einschließen. Diese Abhandlung bildet insofern die Grundlage der modernen äußern Ballistik, als hier zum ersten Mal die Methode angewandt wird, eine von der Zeit abhängige Größe *für Teile der Flugbahn* durch einen Mittelwert zu ersetzen, um die Gestalt der ersteren näherungsweise bestimmen zu können; ein Verfahren, das gegenwärtig noch eingeschlagen wird.

Die Abhandlung 411 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses) *De ictu glandium contra tabulam explosarum* ist nach den Akten am 14. Januar 1771 der Petersburger Akademie vorgelegt worden und auch in demselben Jahr in den Novi Commentarii erschienen. Sie hat das Eindringen eines Geschosses in eine Zielscheibe, die zuerst als feststehend, sodann aber auch als in horizontaler Richtung beweglich angenommen wird, sowie das Durchschlagen der Scheibe zum Gegenstand. Als lebendige Kraft (vis viva) eines bewegten Körpers wird hier noch das Produkt aus seinem Gewicht und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit bezeichnet und es wird gezeigt, daß der Verlust an lebendiger Kraft, den das bewegte System beim Eindringen des Geschosses in die Scheibe erleidet, der Größe proportional ist, die man jetzt die vom Geschoß geleistete Arbeit nennt.

Die folgende Abhandlung 853 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses) *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta*, auf die schon am Anfang des Vorwortes hingewiesen worden ist, wurde erst 1862 in den *Opera postuma* veröffentlicht. Wie aus dem Wort „nuper“ geschlossen werden muß[1]), ist sie 1727 oder 1728 geschrieben worden. Sie knüpft an sieben Schießversuche an, die mit einem senkrecht aufwärts gerichteten Geschützrohr ausgeführt worden waren, dessen Seele nach dem dritten Schießversuch um ein Fünftel ihrer Länge verkürzt wurde. Die Abhandlung enthält die Berechnung der Steighöhe und der Steigzeit des Geschosses aus der ganzen gemessenen Flugzeit mit Hilfe einer Formel, deren Herleitung nicht angegeben ist, die aber auf dem NEWTONSCHEN Luftwiderstandsgesetz beruht und die im wesentlichen von EULER in seiner *Mechanica* entwickelt ist. Es bestehen jedoch zwischen den Gewichten der verwendeten Ladungen einerseits und den beobachteten Flugzeiten andererseits Widersprüche, die sich nur durch irrtümliche Deutungen der in den Versuchsprotokollen enthaltenen Zahlen erklären lassen. Beim ersten Versuch sind vermutlich 8 Loth im Versuchsprotokoll für 8 Unzen gehalten und daher mit

1) G. ENESTRÖM, *Kleine Bemerkungen zur letzten (dritten) Auflage von CANTORS Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* Biblioth. Mathem. 14_3, 1913—1914, p. 81.

16 Loth wiedergegeben worden; auf dieselbe Weise mögen beim zweiten Versuch aus 4 Loth 8 Loth geworden sein. Der in Hinsicht auf die Geschützrohrlängen offensichtliche Widerspruch, der beim dritten und vierten Versuch zwischen den beobachteten Flugzeiten besteht, läßt vermuten, daß die Flugzeit beim dritten Versuch nicht 2, sondern 11 Sekunden betrug, daß aber die Zahl 11 für eine römische II gehalten und daher mit 2 wiedergegeben wurde. Die Rechnung ergibt nämlich für eine Flugzeit von 11 Sekunden eine Steighöhe von 472,6 rheinischen Fuß, was mit der Steighöhe, die man beim vierten Experiment erhält, gut harmoniert. DANIEL BERNOULLI hat übrigens die Beobachtungsresultate der in Rede stehenden Schießversuche im Jahre 1727 mathematisch bearbeitet und die Ergebnisse seiner Rechnungen in den Commentationes academiae scientiarum Petropolitanae 2, p. 338, sowie in seiner *Hydrodynamica*, p. 236 und 237, zusammengestellt. Der Umstand, daß er die Längen in englischen Fuß angibt und das spezifische Gewicht des Eisens in bezug auf atmosphärische Luft zu 7650 annimmt, während EULER hiefür 7000 setzt, erklärt im Zusammenhang mit den erwähnten wahrscheinlichen Versehen die Abweichung der berichtigten EULERSCHEN Rechenergebnisse von denen BERNOULLIS. Vermutlich hätte EULER selbst die numerischen Rechnungen, die den Inhalt der Abhandlung bilden, niemals drucken lassen. Seine Aufzeichnungen sind aber gleichwohl von Wert, einmal, weil sie erkennen lassen, daß er sich anfänglich an das NEWTONSCHE Luftwiderstandsgesetz gehalten hat, und sodann, weil darin zum ersten Mal in der Literatur der Buchstabe e zur Bezeichnung der Basis der natürlichen Logarithmen Verwendung findet, worauf ENESTRÖM[1]) aufmerksam gemacht hat.

In dem Bericht, den ENESTRÖM über die EULERSCHEN Manuskripte der Petersburger Akademie veröffentlicht hat, werden neun Notizbücher[2]) erwähnt. Das vierte derselben enthält p. 437—438 ein Fragment mit der Überschrift: *De motu globi per tubum tornatum explosi.* Nach ENESTRÖM ist das Eintragen der Notizen in diesen vierten Band in die Jahre 1740—1750 zu versetzen. Die kurze Notiz *De motu globi*, die sich mit der Bewegung eines Geschosses in einem gezogenen Rohr beschäftigt, erschien auch vom rein mathematischen Standpunkte aus wert, in die *Opera omnia* aufgenommen zu werden, weil darin bereits das Integral vorkommt, mit dem sich EULER dann in den *Institutiones calculi integralis*[3]) ausführlicher befaßt hat, nämlich der von SOLDNER[4]) später so genannte *logarithmus integralis.*

---

1) Siehe die Anmerkung p. XIV.

2) G. ENESTRÖM, *Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft über die EULERSCHEN Manuskripte der Petersburger Akademie,* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 22, 1913, Zweite Abt., p. 191.

3) *Institutiones calculi integralis*, vol. I, Petropoli 1768, cap. 4, § 228, p. 125; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 11, p. 127.

4) J. SOLDNER (1777?—1833), *Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante,* Munic 1809.

Die *Neuen Grundsätze der Artillerie* enthalten in unserer Ausgabe außer den bereits erwähnten auf die einzelnen „Sätze“ folgenden „Anmerkungen“ EULERS noch zweierlei Fußnoten. Die einen sind mit Sternchen versehen und stammen alle von ROBINS. Die andern haben Nummern und die Bezeichnung F. R. S. und sind, wie auch die übrigen so bezeichneten Fußnoten des vorliegenden Bandes, vom Herausgeber hinzugefügt.

Zum Schlusse danke ich dem Redaktionskomitee für die wertvolle Unterstützung, die es meiner Arbeit hat zuteil werden lassen, insbesondere für die Vervollständigungen der historischen Notizen und der Zitate, sowie für die große Sorgfalt, die es auf die Korrektur verwendet hat.

Dank und Anerkennung gebühren auch der Verlagsfirma B. G. TEUBNER, die allen Wünschen des Herausgebers stets größte Bereitwilligkeit entgegengebracht hat und deren Geduld bei der langwierigen Drucklegung oft auf eine harte Probe gestellt worden ist.

Küsnacht bei Zürich, im Januar 1922.

F. R. SCHERRER.

ÜBERSICHT
über die im vorliegenden Bande vorkommenden Maßeinheiten.

1. Längeneinheiten.

1 rheinländischer Fuß (Schuh) = 12 Zoll = 12 · 12 Linien = 0,31385 Meter.

1 scrupulum pedis rhenani = $\frac{1}{1000}$ rheinländische Fuß.

1 englischer Fuß (Schuh) = $\frac{1}{3}$ Yard = 12 Zoll = 0,30479 Meter.

1 rheinländischer Fuß = 1,0297 englische Fuß.

1 englischer Fuß = 0,9711 rheinländische Fuß.

1 englischer Faden (fathom) = 2 Yard = 6 Fuß = 1,8288 Meter.

1 englische Meile (statute mile) = 880 Fathoms = 5280 Fuß = 1609,3149 Meter.

1 Pariser Fuß = $\frac{1}{6}$ Toise = 12 Zoll = 12 · 12 Linien = 0,32484 Meter.

1 französischer Faden = 1 Toise = 1,9490 Meter.

2. Gewichtseinheiten.

1 englisches Troy-Pfund = 12 Unzen = 240 Pennyweights = 5760 Grains = 373,2419 Gramm.

1 (Troy) Unze (= 480 Grains) wird beim Apothekergewicht in 8 Drachmen = 8 · 3 Skrupel geteilt.

1 englisches Avoirdupois-Pfund = 16 Unzen = 256 Drachmen = 7000 Grains = 453,5926 Gramm.

1 Grain beider Gewichte = 0,0648 Gramm.

144 Avoirdupois-Pfunde = 175 Troy-Pfunden.

192 Avoirdupois-Unzen = 175 Troy-Unzen.

1 Avoirdupois-Unze = 437 $\frac{1}{2}$ Grains = 28,3495 Gramm.

1 englischer Quintal = 112 Avoirdupois-Pfunden = 50,802 Kilogramm.

1 (engl.) Ton = 20 Quintal = 1016,048 Kilogramm.

1 holländisches Troy-Pfund = 16 Unzen = 492,1677 Gramm.

1 holländisches Handelspfund = 32 Loth = 494,0904 Gramm.

1 Pariser Pfund = 16 Unzen = 16 · 576 Grains = 489,5058 Gramm.

1 Nürnberger Pfund[1]) Handelsgewicht = 2 Mark = 16 Unzen = 32 Loth = 128 Quint = 509,7 Gramm.

---

1) Nach v. ALTEN, *Handbuch für Heer und Flotte* 4, p. 196, bediente man sich zu Anfang des 18. Jahrh. in Deutschland bei der Artillerie des Nürnberger Pfundes zur Bezeichnung der Geschoßgewichte. F. R. S.

INHALT

Dieser Band umfaßt die Nummern 77 (*Neue Grundsätze*), 217, 411, 853 des ENESTROEMSCHEN Verzeichnisses sowie ein unediertes Fragment.

1) Die „Zusätze“, die ROBINS einzelnen seiner „Sätze“ hinzugefügt hat, werden in diesem Inhaltsverzeichnis nicht besonders aufgeführt. F. R. S.

2) Wie aus der Vorrede EULERS, S. 8, hervorgeht, rühren die „Anmerkungen“, die auf einen jeden „Satz“ folgen, samt den zugehörigen Figuren nicht von ROBINS, sondern von EULER her. F. R. S.

II

BALLISTISCHE ABHANDLUNGEN

I

NEUE GRUNDSÄTZE DER ARTILLERIE

Neue Grundsätze
der
ARTILLERIE

enthaltend
die Bestimmung der Gewalt des Pulvers
nebst
einer Untersuchung
über den Unterscheid des Wiederstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen

aus dem Englischen des Hrn. Benjamin Robins
übersetzt und mit den nöthigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen
von

Leonhard Euler
Königlichem Professor in Berlin.

Berlin bey A. Haude
Königl. und der Academie der Wissenschaften privil. Buchhändler. 1745.

Vorrede

Die Artillerie ist schon von langer Zeit her als ein Theil der Mathematic angesehen worden, indem dieselbe ohne eine hinlängliche Erkenntniß der Arithmetic und Geometrie nicht abgehandelt werden kann. Was zwar die Zubereitung des Pulvers betrifft, daher die Artillerie ihren Ursprung genommen, so läuft dieselbe vielmehr in die Chymie, als in die Mathematic: will man aber von der Ursache der erstaunenswürdigen Kraft, womit das Pulver begabet ist, Nachricht haben, so muß man die Natur-Wissenschaft zu Rathe ziehen. Ungeachtet aber die eigentliche Bestimmung der Kraft, welche die Würkungen des Pulvers hervorbringt, zur Mathematic gehöret; so erfordert dieselbe doch eine so weitläuftige Erkenntniß der höhern Geometrie und Mechanic, daß man genöthigt ist, dieselbe in den Anfangs-Gründen dieser Wissenschaft völlig mit Stillschweigen zu übergehen. Die Beschreibung der verschiedenen Feuer-Maschinen, welche in der Artillerie vorkommen, scheint auch nur in so fern mit den mathematischen Wissenschaften eine Verwandtschaft zu haben, als darinne die Verhältniß[1]) der verschiedenen Vermischungen betrachtet wird. Da sich nun diese auf die bloße Erfahrung gründen, die Mathematic aber eine solche Wissenschaft ist, welche nicht nur in einem jeglichen Fall die Verhältnisse anzeigt, sondern auch den Grund, worauf dieselben beruhen, aus der Natur der Sache selbst bestimmet; so ist klar, daß man sich aus der gewöhnlichen Verknüpfung der Artillerie mit der Mathematic in diesem Stücke nicht viel Vortheil versprechen könne. Eine gleiche Bewandtniß hat es auch mit der Beschreibung der verschiedenen Arten von Stücken, Canonen und andern Schieß-Maschinen, von welchen gemeiniglich nur die Proportion ihrer Theile, wornach dieselben verfertigt zu werden pflegen, angezeigt wird, ohne sich um die Ursachen zu bekümmern, warum dieselben so, und nicht anders, angenommen worden. Die Erklärung und Einrichtung des Caliber-

1) „Die Verhältniß" ist eine veraltete Form für „das Verhältnis". Das erst im 18. Jahrhundert entstandene Wort wurde, wie so viele andere Wörter auf „nis", bald mit dem weiblichen, bald mit dem sächlichen Artikel verbunden. Vgl. damit „die Befugnis", „die Bewandtnis", „die Erkenntnis" u. a. F. R. S.

Maaßstabes scheinet also hierbey das einige zu seyn, wozu eine Erkenntniß der Arithmetic und Geometrie erfordert wird, als welche sich auf die Cubische Verhältniß, und die Ausziehung der Cubic-Wurzel gründet. Insonderheit muß zwar die Mathematic zu Hülfe genommen werden, wenn man den Weg, welchen eine Bombe oder Stück-Kugel in der Luft beschreibet, bestimmen will; man nimmt aber gemeiniglich an, daß diese krumme Linie eine Parabel sey, und pflegt aus den Eigenschaften derselben auszurechnen, wie weit in einem jeglichen Bogenschusse die Kugel reichen müsse. Dieses würde seine Richtigkeit haben, wenn die Kugel in ihrer Bewegung keinen Wiederstand litte; da aber der Wiederstand der Luft bey so schnellen Bewegungen sehr merklich ist, so weicht auch dieselbe Linie, welche von einer Stück-Kugel beschrieben wird, sehr stark von einer Parabel ab. Und aus eben dieser Ursache hält auch derjenige Winkel, unter welchem eine Kugel am weitesten geschossen wird, nicht 45 Grad, wie man gemeiniglich glaubt, sondern etwas weniger. Wenn man aber die Natur derjenigen krummen Linie, nach welcher sich eine Canonen-Kugel in der That beweget, untersuchen will, so kann solches ohne die höhere Mathematic keinesweges geschehen.

Hieraus ist also klar, daß der Vortheil, welchen man bißher in der Artillerie aus der Mathematic gezogen, sehr geringe ist, und daß eine gemeine Erkenntniß der Mathematic, wie solche in den gewöhnlichen Anfangs-Gründen erkläret zu werden pflegt, keinesweges hinlänglich ist, in der Artillerie denjenigen Nutzen zu schaffen, welchen man sich sonsten von dieser Wissenschafft verspricht. Wenn man aber die höhere Mathematic zu Hülfe nimmt, so ist man im Stande, so wohl die wahre Kraft des Pulvers, als die wahre Bewegung der Kugeln, auf das genauste zu bestimmen; und da auf diesen zweyen Punckten die fürnehmste Wissenschafft der Artillerie beruhet, so können daraus auch die übrigen dahin gehörigen Stücke auf eine gründliche Art erkläret, und in ihr völliges Licht gesetzet werden. Ja wenn auch gleich ein bloßer Mathematicus aus Mangel einer hinlänglichen Erfahrung nicht im Stande ist, aus dieser Erkenntniß allen Nutzen zu ziehen, so ist doch kein Zweifel, ein erfahrener Artillerist werde diesen Abgang leicht ersetzen, und eine solche ihm mitgetheilte Erkenntniß in allen Umständen mit Vortheil anzuwenden wissen.

Man pflegt gemeiniglich in den Gedanken zu stehen, als wenn die höhere Mathematic bloß allein in solchen subtilen Speculationen bestünde, aus welchen man nicht den geringsten Nutzen hoffen könnte, und daß man alle Vortheile, welche man dieser Wissenschaft nicht absprechen kann, nur allein den niedrigen und schon genugsam bekannten Theilen der Mathematic zu dancken habe. Allein dasjenige, was in Ansehung der Artillerie angeführet worden, ist schon hinreichend, dieses Vorurtheil völlig zu heben; ja man kann so gar mit dem grösten Recht behaupten, daß keine Wissenschaft mit der Mathematic verknüpfet ist, welche nicht, wenn sie gründlich ausgeführet werden soll, die so genannte höhere Mathematic erfordere. Es finden sich so gar auch öfters die Gränzen dieser Wissen-

schafft noch nicht einmahl genugsam erweitert, um alle Umstände gehöriger maßen erklären zu können.

Um dieses deutlicher darzuthun, und dadurch den fast allgemeinen Vorwurf, welcher gegen die höhere Mathematic gemacht zu werden pflegt, aus dem Wege zu räumen, so wollen wir die fürnehmsten practischen Theile der Mathematic etwas genauer in Betrachtung ziehen.

In der Mechanic, welche in Erklärung und Bestimmung der Bewegung der Körper bestehet, kommen nicht nur die schwehrsten Fragen vor, welche ohne eine sehr tiefe Einsicht in die höhere Mathematic unmöglich erörtert werden können, sondern es findet sich darinne keine einzige Maschine, deren Würkung ohne eine solche Erkenntniß vollständig erkläret werden könnte. Was darinn insgemein von den Maschinen vorgebracht wird, gehet nur auf die Einrichtung derselben überhaupt, und man pflegt gemeiniglich dabey nicht mehr als das Gleichgewicht zwischen der Kraft, und dem Wiederstand der Last, anzuzeigen. Da aber die Last nicht nur im Gleichgewicht erhalten, sondern auch in Bewegung gesetzt werden soll, so muß die Kraft der Last überlegen, und also grösser seyn, als zur Erhaltung des Gleichgewichts erfordert wird. Wie nun in diesem Fall die Bewegung beschaffen seyn, und mit was für einer Geschwindigkeit die Last beweget werden müsse, davon findet man nicht ein Wort in den gemeinen Abhandlungen der Maschinen, ungeachtet hierauf die Haupt-Absicht und der Nutzen aller Maschinen beruhet. Dieses ist die fürnehmste Ursache, warum man sich fast auf keine auf dem Papier entworfene Maschine verlassen kann, ehe man davon eine würkliche Probe gesehen. Die gemeine Erkenntniß der Mathematic ist nun keinesweges hinreichend, diesem Mangel abzuhelfen: sondern wenn man die würkliche Bewegung so gar nur in den einfachen Maschinen bestimmen will, so ist man nicht im Stande, solches ohne die Infinitesimal-Rechnung zu verrichten, und es können sich öfters bey den gemeinesten Maschinen solche Umstände ereignen, zu deren Erklärung eine noch weit grössere Erweiterung der höheren Mathematic erfordert wird. Hierinne bestehet aber die vollständige Erkenntniß aller Maschinen, deren Nutzen folglich von Niemand in Zweifel gezogen werden kan, und gegen welche dasjenige, was davon insgemein vorgebracht wird, für nichts zu rechnen ist. Wenn man hergegen im Stande ist, für eine jegliche entworfene Maschine aus der Einrichtung derselben, und der Grösse der Kraft, die würkliche Bewegung der Last zu bestimmen, so kann man daraus leicht durch Hülfe der höhern Mathematic eine jede Maschine zu dem höchsten Grad der Vollkommenheit bringen. Denn da man für einen jeden Fall, wenn die Kraft und Last gegeben wird, immer unendlich vielerley Maschinen erdenken kan, durch deren Hülfe die Last von der Kraft beweget wird, so bestehet die wichtigste Frage darinne, wie man unter allen diesen Maschinen diejenige ausfündig machen soll, vermittelst welcher die Last am geschwindesten beweget werde. Diese Frage kann aber ohne die so genannte höhere Mathematic unmöglich aufgelöset werden.

Wie unvollständig die Abhandlung der Hydrostatic und Hydraulic sey, welche nur auf die gemeinen Theile der Mathematic gegründet ist, wird ein jeder leicht erfahren, welcher sich nur den leichtesten Fall deutlich zu erklären bemühet. Denn die Bewegung der flüßigen Körper ist eine von den schweresten und verwirrtesten Materien, welche in der Mathematic und Physic immer vorkommen können, und mit einer gemeinen Erkentniß der Mathematic ist darinne nicht das geringste auszurichten. Die berühmten Herren BERNOULLI sind die ersten gewesen, welche diese so dunkle Materie auf eine gründliche Art abgehandelt haben. Der Hr. Professor DANIEL BERNOULLI in Basel hat darüber zu erst sein unvergleichliches Werk unter dem Titul der *Hydrodynamic*[1]) herausgegeben, worinne er durch die subtilsten Rechnungen so wohl die Kräfte, als die Bewegungen der flüßigen Cörper, so gründlich bestimmet, daß allenthalben die schönste Uebereinstimmung mit der Erfahrung hervorleuchtet. Er hat sich hierzu meistentheils des Grundsatzes der Erhaltung der lebendigen Kräfte bedient; allein sein Herr Vater hat hernach Mittel gefunden, alle diese Bestimmungen aus den ersten Gründen der Bewegung herzuleiten, wie so wohl aus seinen Werken, welche kürzlich zusammen gedruckt[2]) heraus gekommen, als aus dem 9ten Tomo der Comment. der Petersburger Academie[3]) erhellet. Wer diese Werke nur obenhin ansieht, wird bald überführt werden, daß in dieser Wissenschafft ohne die höhere Mathematic nicht das allergeringste bestimmt werden kann.

Seit dem die Astronomie auf den gegenwärtigen Grad der Vollkommenheit gebracht worden ist, so ist die höhere Mathematic dazu ganz und gar unentbehrlich; denn ohne dieselbe können die Bewegungen der Planeten und Cometen unmöglich bestimmet werden. Insonderheit aber reichet uns der Mond die allerdeutlichste Probe von der Nothwendigkeit der höheren Mathematic in der Astronomie dar. Die Gesetze, nach welchen sich seine Bewegung richtet, sind offenbar, und es kommt nur darauf an, daß man aus diesen Gesetzen die würkliche Bewegung des Mondes bestimme. Hierzu wird nun nicht nur die tiefste Erkenntniß der Infinitesimal-Rechnung erfordert, sondern so hoch dieselbe auch bey jetziger Zeit gebracht zu seyn scheinet, so ist dieselbe doch noch bey weitem nicht hinlänglich, alle Veränderungen der Bewegung dieses Planeten auf das genaueste zu bestimmen. Alles, was bisher darüber zum Vorschein gekommen, bestehet nur allein in Näherungen, und wir

---

1) D. BERNOULLI (1700—1782), *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Argentorati 1738. F. R. S.

2) JOH. BERNOULLI (1667—1748), *Opera omnia*, Lausannae et Genevae 1742, 4 Teile, siehe besonders die Abhandlung *Hydraulica*, t. IV, p. 387. F. R. S.

3) JOH. BERNOULLI, *Dissertatio hydraulica de motu aquarum per vasa aut per canales quamcunque figuram habentis fluentium*, Comment. acad. sc. Petrop. **9** (1737), 1744, p. 3; der zweite Teil der Abhandlung folgte im Bande **10** (1738), 1747, p. 207. F. R. S.

können uns keine vollkommenere Erkentniß davon versprechen, ehe und bevor die höhere Mathematic auf einen weit höheren Grad wird getrieben worden seyn.

Hieraus folget also ganz deutlich, daß der Nutzen der Mathematic keines weges in den gemeinen Theilen derselben bestehe, als deren Gebrauch sich nicht sonderlich weit erstrecket; sondern daß man der höheren Mathematic meistentheils allein alle diejenigen Vortheile zu danken habe, welche man von dieser Wissenschaft theils schon würklich erhalten, theils aber noch zu erwarten hat. Es ist also so fern, daß man diese Untersuchungen zu weit treiben könnte, daß man vielmehr die wichtigsten Vortheile nicht eher zu erreichen vermögend ist, als bis man noch sehr grosse Erweiterungen und Entdeckungen darinne wird gemacht haben.

Aus dem gegenwärtigen Werke von der Artillerie, welches wegen der darinne enthaltenen fürtrefflichen und nützlichen Entdeckungen einen allgemeinen Beyfall gefunden, wird genugsam erhellen, daß der Verfasser unmöglich so weit gekommen seyn würde, wenn ihm nicht die höhere Mathematic dazu den Weg gebahnet hätte; indem darinne fast kein Satz vorkommt, welcher ohne die Infinitesimal-Rechnung vollkommen erörtert werden könnte. Weil nun der Nutzen von diesem Englischen Tractat nicht nur schon sehr beträchtlich ist, sondern auch ohne Zweifel noch weit höher gebracht werden kann, so habe ich den Vorsatz gefasset, dieses Werk ins Teutsche zu übersetzen, um die darinne enthaltenen herrlichen Erfindungen desto mehr bekannt zu machen. Da aber der Verfasser alles sehr kurz zusammen gezogen, so habe ich für gut befunden, nicht nur allenthalben die nöthigen Erläuterungen beyzufügen, sondern auch einen jeglichen Satz noch weiter auszuführen, damit man so wohl die Gründlichkeit, als den Nutzen, desto deutlicher einsehen möge. Ich habe mich bey dieser Uebersetzung einer ziemlichen Freyheit bedienet, und mehr auf die Sache selbst, als auf die Worte gesehen, welches bey Werken von dieser Art niemand übel deuten wird.

Es ist diesem Werk von dem Verfasser ein ziemlich weitläuftiger Vorbericht vorgesetzet worden, worinne eine historische Nachricht von dem Ursprung und Aufnehmen[1]) so wohl der Fortification, als der Artillerie ertheilet wird. Dieses dienet allem Ansehen nach fürnehmlich zu zeigen, wie wenig bißher von der wahren Theorie der Artillerie bekannt gewesen, und wie viele und wichtige Entdeckungen noch zu Verbesserung dieser Wissenschafft erfordert werden.

Das Werk selbst bestehet aus zwey Capiteln. Im ersten wird theils die Kraft des Pulvers, theils die Geschwindigkeit, welche dadurch einer Kugel eingedruckt wird, unter-

---

1) „Aufnehmen" bedeutet hier: geschichtliche Entwickelung. Im übrigen sei gleich an dieser Stelle auf das Vorwort des Herausgebers verwiesen, wo die im vorliegenden Bande vorkommenden fortifikatorischen und artilleristischen Kunstausdrücke erklärt werden. F. R. S.

suchet. Erstlich weiset der Verfasser durch unstreitige Versuche, daß die Gewalt des Pulvers in der Ausdehnungs-Kraft einer darinne eingeschlossenen subtilen Materie, welche durch die Entzündung in Freyheit gesetzt wird, bestehe. Hernach untersuchet er, wie groß diese Kraft sey, und nach was für Gesetzen dieselbe abnehme, indem sich die subtile Materie je länger je mehr ausdehnet. Er zeiget auch, wie viel die bey der Entzündung entstehende Erhitzung zur Vermehrung der Kraft beytrage. Nachdem er diese Stücke erörtert, so bestimmet er die würkliche Geschwindigkeit, welche einer Kugel von einer gegebenen Ladung Pulver in einem gegebenen Lauf eingedruckt wird. Damit man aber von der Wahrheit dieser Bestimmungen desto mehr versichert werde, so beschreibet er eine von ihm erfundene Maschine, durch deren Hülfe die würkliche Geschwindigkeit einer jeden Kugel bestimmet werden kann. Diese durch die Erfahrung befundene Geschwindigkeit hält er mit derjenigen, welche er aus der Gewalt des Pulvers gefunden hatte, gegen einander, und weiset allenthalben die schönste Uebereinstimmung.

Im andern Capitel stellt er seine Untersuchungen über den Wiederstand der Luft an, und weiset, daß derselbe auf solche schnelle Bewegungen weit stärker sey, als man nach den bisher angenommenen Regeln immer vermuthen könnte. Hieraus bestimmt er, wie viel eine jegliche Kugel, welche mit einer gegebenen Geschwindigkeit in die Luft geschossen wird, nach und nach von ihrer Geschwindigkeit verliere, und bekräftiget alles dieses beständig durch vielerley Erfahrungen, welche er vermittelst seiner obgedachten Maschine angestellet. Unterdessen gehet er hier nicht so weit, daß er die Bahn, nach welcher sich eine Kugel in der Luft beweget, bestimmte, sondern er verspricht darüber eine besondere Abhandlung, welche aber, so viel uns bekannt, noch nicht zum Vorschein gekommen.

Dieses ist kürzlich der Innhalt des ganzen Werks. Ungeachtet aber dasselbe nur diese zwey Haupt-Stücke in sich zu enthalten scheinet, so sind dieselben doch nicht nur der Grund und die Stütze der ganzen Artillerie, sondern es sind auch damit alle übrige Theile dieser Kunst dergestalt verknüpft, daß man dieses Werk mit Recht als eine vollständige Abhandlung der ganzen Artillerie ansehen kan.

Der Autor hat beyde Capitel ferner in Sätze abgetheilet, und einem jeden seine Erklärung und Beweis beygefüget; bißweilen hat er auch noch zu mehrerer Erläuterung Zusätze angehänget, welche mit den von dem Uebersetzer beygefügten Anmerkungen nicht müssen verwechselt werden.[1])

Die Anmerkungen, welche auf einen jeden Satz folgen, sind also nicht von dem Verfasser des Werks, und hätten folglich mit einer sonderbaren Schrift gedruckt werden sollen; da aber dieses, theils wegen der Weitläuftigkeit dieser Anmerkungen, theils wegen anderer Umstände, nicht füglich hat geschehen können, so ist nöthig, hiermit den Leser einmahl

1) Siehe das Vorwort des Herausgebers. F. R. S.

für allemahl zu erinnern, daß alles dasjenige, was sich unter dem Titul der Anmerkungen allhier befindet, bey der Uebersetzung beygefüget worden. In denselben ist man bemühet gewesen, erstlich die von dem Autore abgehandelten Materien weitläuftiger zu erklären, und hernach auch weiter auszuführen, damit man daraus um so viel grössere Vortheile ziehen könne. Bißweilen sind auch einige von dem Autore begangene geringe Fehler bemerket und verbessert worden. Im zweyten Capitel befinden sich auch einige Anmerkungen, in welchen man die wahre Bewegung einer Kugel in der Luft zu bestimmen gesuchet, nachdem vorher die Kraft des Wiederstandes auf eine allgemeine Formul gebracht worden. Die ganze Sache beruhet also nur auf der Ausführung der Rechnung; diese aber ist so schwehr und verworren, daß alle bißher bekannte Vortheile der Infinitesimal-Rechnung noch nicht hinlänglich sind, alle Schwierigkeiten zu überwinden, welches folglich einen neuen Beweis gegen diejenigen, welche der höhern Mathematic allen Nutzen absprechen wollen, an die Hand giebt.

VORBERICHT DES VERFASSERS

ODER

EINE HISTORISCHE NACHRICHT VON DEM URSPRUNG UND AUFNEHMEN DER FORTIFICATION UND ARTILLERIE

Ich war vor ungefehr einem Jahre beynahe entschlossen, öffentliche Vorlesungen über die Fortification und Artillerie zu halten; es fanden sich aber einige Hindernisse, welche nicht nöthig sind, hier anzuführen, so mich von diesem Vorsatz zurück hielten. Als aber inzwischen einige Abschriften von dem Inhalt, den ich mir vorgesetzet hatte, in verschiedene Hände geriethen, so wurde ich einiger massen zu gegenwärtiger Unternehmung genöthiget.

Denn da ich mir vorgenommen hatte, diese Abhandlung so vollständig, als mir immer möglich wäre, zu machen, sowohl durch grosse Modelle von den verschiedenen Arten zu befestigen, und dieselben zu attaquiren, als durch vielerley in der Erfahrung gegründete Regeln der Artillerie, so fand ich für nöthig, bey dieser letztern Materie eine Untersuchung von der Gewalt des Schieß-Pulvers, nebst einigen Betrachtungen über den Wiederstand der Luft, welche ich entdecket und durch die Erfahrung bestätiget hatte, mit einzurücken. Weil nun diese Grundsätze in den Papieren, welche bekannt worden, ganz kurz ohne einigen Beweis vorgelegt waren, dieselben aber noch streitig scheinen möchten, indem sie mit den Meynungen der meisten, welche hierüber geschrieben, nicht übereinstimmen, so lag mir ob, etwas ausführlicher einigen Schwierigkeiten, welche dabey entstehen könnten, zu begegnen, und die Gewißheit derselben durch viele ungezweifelte Experimente darzuthun. Hieraus ist also fürnehmlich der folgende Tractat erwachsen, worinnen die Gewalt und Würkung des Pulvers so genau bestimmet ist, daß man daraus die Geschwindigkeit von aller Gattung Kugeln, welche geschossen werden, ausrechnen, und dabey auch den ganz ausserordentlichen Wiederstand der Luft, welche in dergleichen schnellen Bewegungen weit grösser ist, als man bisher geglaubet, in

einem jeglichen Fall anzeigen kann. Hieraus wird nun erhellen, daß sowohl die erste Geschwindigkeit, womit eine Kugel durch volle Ladung ausgeschossen wird, als auch der Weg, welchen dieselbe in der Luft beschreibet, von demjenigen, was bißher von den Autoribus hierüber gesagt worden, gänzlich unterschieden sey.

Da die fürnehmsten Untersuchungen in den folgenden Blättern auf die Gewalt des Pulvers, und die Bewegung der Kugeln, gerichtet sind, so wird es verhoffentlich dem Leser nicht unangenehm seyn, einige Nachrichten von der Erfindung des Pulvers, nebst einer kurzen Beschreibung von dem Aufnehmen der Artillerie, und der damit verknüpften Fortification, allhier anzutreffen; und das um so vielmehr, da die Natur und Beschaffenheit desjenigen, welches in diesem Werk vorgebracht wird, nicht wenig erläutert werden wird, wenn man dasselbe mit den hierüber vormahls gehegten Meynungen gegen einander halten kann. Und obgleich meine Haupt-Absicht nur allein auf die Verbesserung der Theorie und Praxis der Artillerie gehet, so sind doch die jetzigen Arten zu befestigen so genau mit der Erfindung und Anwendung der Artillerie verbunden, und es erhält von diesen beyden Künsten gleichsam eine von der andern ihre Gesetze, daß ich vermuthe, eine kurze Nachricht von dem Ursprung und den Veränderungen der jetzigen Kriegs-Baukunst werde nicht unfüglich der Beschreibung derjenigen gewaltigen Maschinen vorgesetzet werden, welche dazu Anlaß gegeben haben.

Was die erste Erfindung der Bollwerke anlangt, so finden sich darüber bey den Autoribus verschiedene Meynungen, und es ist noch nicht ausgemacht, wenn und wo dieselben zuerst sind gebraucht worden. Einige haben diese Erfindung dem ZISCA[1]), in Böhmen, andere aber dem ACHMET BASCHA[2]), zugeschrieben, als welcher nach Eroberung von Otranto A. 1480, diese Stadt auf eine sonderbare Art fortificiret und dabey die Bollwerke angebracht haben soll.*) Diese Muthmassung findet sich aber nur bei den neuern Schriftstellern. Diejenigen, welche vor hundert und mehr Jahren von der Fortification ge-

*) Man sehe hierüber nach die Anmerkungen des Chevalier FOLARD[3]) über den POLYBIUM, Tom. 3, pag. 2.

1) JOHANN ZISKA (1360?—1424), der berühmte Feldherr der Hussiten. F. R. S.

2) KEDÜK-ACHMED-PASCHA, Großwesir unter SULTAN MOHAMMED II. F. R. S.

3) J. C. CHEVALIER DE FOLARD (1669—1752) veröffentlichte mit V. DE THUILLIER *Histoire de Polybe* (mit Kommentar), Paris 1727—1730, 6 Bde. Über die Entstehung und den Inhalt dieses berühmten Werkes siehe M. JÄHNS, *Geschichte der Kriegswissenschaften vornehmlich in Deutschland*, 2. Abt., München und Leipzig 1890, p. 1480. F. R. S.

schrieben, scheinen vielmehr der Meynung zu sein, daß die Bollwerke in der alten Art zu bauen nach und nach zur Vollkommenheit gebracht worden, und daß sich niemand ins besondere die Erfindung derselben zueignen könne. Insonderheit schreibt PASINO in dem ersten Theil seines Buches die Veränderungen in der alten Fortification, und die Einführung der neuern Arten der vermehrten Gewalt der Artillerie zu, ohne zu behaupten, daß dieselben auf einmahl, oder durch eine Person in Schwang gebracht worden.*) Woraus ich schliesse, daß man in diesem Stück, betreffend die Erfindung der Bollwerke, nicht mehr mit Gewißheit behaupten könne, als daß dieselben bald nach dem Jahr 1500 bekannt worden. Denn A. 1546 hat TARTALEA[1]) seine *Quesiti et Inventioni diverse* heraus gegeben, allwo er in dem sechsten Buche Meldung thut, daß, als er sich in Verona aufgehalten (welches einige Jahr vorher gewesen seyn muß), er daselbst einige Bollwerke von ungeheurer Grösse gesehen habe, deren einige schon zu Ende gebracht, andere aber noch in der Arbeit waren. Und ausser diesem befindet sich noch in eben diesem Buch ein Plan von Turin, welches damals mit 4 Bastionen fortificiret war, und offenbar kurz vorher vollendet worden ist.[2])

Ob wir nun gleich die Zeit, da man angefangen, die alten runden Thürme in Bollwerke zu verwandeln, nicht gewiß bestimmen können, so ist doch solches allem Ansehen nach nicht lange vor obgemeldeter Zeit geschehen. Denn in eben diesem Buche hält der Prior von Barletta, welcher selbst ein Kriegsmann gewesen, die Festung Turin für unüberwindlich, und berichtet dabey, daß dieses die allgemeine Meynung aller Kriegsverständigen gewesen. Hierbey wirft er auch die Frage auf, ob die Kunst der Menschen hierinne nicht schon den höchsten Grad der Vollkommenheit erreicht hätte? welches ein unstrei-

*) *Discours sur plusieurs Points de l'Architecture de Guerre concernans les fortifications tant anciennes que modernes.* Par Mr. AURELIO DE PASINO Ferrarois, Architecte de tres Illustre Seigneur, Monseigneur le DUC DE BOUILLON. Gedruckt bey Plantino 1579. Es erhellet aus einer Abschrift von Versen, welche diesem Buch vorgesetzet sind, daß dieser Autor die Stadt Sedan befestiget hat.

1) NICOLO TARTAGLIA (1500 oder 1506—1559), Quesiti et inventioni diverse, Venetia 1546 (und 1554); *Opere,* Venetia 1606. F. R. S.

2) EULERS Übersetzung: „... ein Plan von Turin, welcher mit 4 Bastionen fortificiret ist, und derselbe scheinet schon eine geraume Zeit vorher verfertigt zu seyn", ist nicht befriedigend. Im englischen Original heißt es: „... a plan of Turin, which was then fortified with four Bastions, and seems to have been compleated some time before". In der Tat geht auch aus dem sechsten Buche von TARTAGLIAS *Quesiti* hervor, daß die vier Bastionen nicht nur auf dem Plane, sondern in Wirklichkeit existierten. F. R. S.

tiges Merkmahl zu seyn scheinet, daß diese Erfindung damahls ganz neu gewesen, und daß dieselbe bey allen Kunstverständigen Nachdenken und Bewunderung erwecket habe; dergleichen eine neue Erfindung von dieser Art gewöhnlicher Weise zu verursachen pflegt.

Die ersten Bollwerke, als die von Turin, Antwerpen*), und andere von gleichem Alter, waren sehr klein, und weit von einander entfernet; denn damahls war die allgemeine Art zu attaquiren, daß man die Courtine und nicht die Bollwerke angriff. Aber nicht lange hernach wurden weit grössere Bollwerke eingeführet, und näher zusammen gesetzt, als vorher üblich gewesen, wie aus der Citadell von Antwerpen erhellet, welche um das Jahr 1566[1]), unter der Aufsicht des Duc d'Alva[2]), erbauet worden, und wegen der grossen Lobes-Erhebungen der damahligen Autoren das erste Exempel von dieser Verbesserung zu seyn scheinet.

Man kann also setzen, daß die neue Gestalt der Kriegs-Baukunst zu dieser Zeit ihren Anfang genommen. Denn die meisten heut zu Tag bekannten Verbesserungen sind nicht viel mehr, als eine Ausführung solcher Methoden, welche innerhalb wenig Jahren von dieser Zeit an zu rechnen gemacht worden. Denn bald nach dieser Zeit traten schon verschiedene berühmte Männer auf, als La Treille**), Alghisi[3]), Marchi[4]), Pasino, und vor allen der Speckle***),

*) Antwerpen wurde fortificiret um das Jahr 1540, wie man aus dem Speckle[5]) ersieht im 1. Buch 10ten Capitel.

**) *La Maniere de fortifier Villes, Chasteaux, et faire autres lieux forts*, mis en françois par le Seigneur Bereil François de la Treille, Commissaire en l'Artillerie, Lyon 1556. Dieser Autor war, wie ich gesehen, der erste, der die retirirten Courtinen vorgeschlagen, welche hernach durch andere unter dem Nahmen der verstärkten Ordnung bekannt gemacht worden.

***) Daniel Speckle war Architect in der Stadt Straßburg und starb im Jahre 1589. Er hat ein Buch von der Fortification in deutscher Sprache heraus gegeben, welches zu Leipzig im Jahr 1736 gedruckt ist.[5])

1) Genauer 1567—1571. Die Zitadelle ist 1874 geschleift worden. F. R. S.

2) Der bekannte spanische Staatsmann und Feldherr Herzog von Alba (1508—1582), Statthalter der Niederlande. F. R. S.

3) Alghisi da Carpi verfaßte um 1548 *Delle fortificationi libri III*, Venedig 1570. F. R. S.

4) F. de' Marchi (ungefähr 1506—1574), *Dell' architettura militare libri tre*, Brescia 1599. Über Geschichte und Inhalt dieses bedeutenden Werkes berichtet ausführlich M. Jähns, *Geschichte der Kriegswissenschaften vornehmlich in Deutschland*, 1. Abt. München und Leipzig 1889, p. 805. F. R. S.

5) D. Speckle (auch Specklin genannt) wurde 1536 in Straßburg geboren und starb daselbst als Stadtbaumeister und Militärarchitekt im Jahre 1589. Sein Hauptwerk *Architectura Von*

welcher einer von den größten Geistern war, die sich jemahls auf diese Kunst gelegt haben.

Um desto besser von den Vorzügen der neuen Befestigungs-Arten urtheilen zu können, so wird nöthig seyn, sich in eine kurze Untersuchung der verschiedenen Manieren einzulassen, welche zu Bedeckung der Flanquen, und folglich zur Sicherheit des Walls gegen die feindlichen Anfälle, vorgeschlagen werden; indem man glaubt, daß die fürnehmste Vertheidigung einer Festung in den Flanquen bestehe. Dahero gibt die Art und Weise, wodurch für die Sicherheit der Flanquen gesorget wird, das sicherste Mittel an die Hand, die Vortheile einer jeglichen Befestigungs-Art richtig zu beurtheilen.

Die gewöhnlichsten Mittel, diese Absicht zu erhalten, sind nun die Orillons, die Ravelins, welche vor die Courtines gesetzt werden, die halben Monds vor den Spitzen der Bollwerke, und die Contreguardes; dahero ein jegliches von diesen Stücken ins besondere, sowohl in Ansehung des Alterthums, als des daher entstehenden Nutzens, in Betrachtung gezogen zu werden verdienet.

Die Orillons sind eben so alt, als die Bollwerke selbst; denn man findet zu Turin und Antwerpen (wie oben gemeldet worden) niedrigere Flanquen, welche in den Bollwerken eingeschnitten, und dabey mit ziemlich dicken Schultern versehen worden, um dieselben vor den Feld-Batterien zu verwahren. Ueber dieses kommen eben dergleichen Orillons, als jetzo im Gebrauch sind, in den Rissen des Pasino, Speckle, und anderer, häufig vor, nur mit diesem Unterscheid, daß die heutigen nicht so stark und massiv sind, als jene. Diese Erfindung hat das Glück gehabt, fast bei allen Befestigungs-Arten, welchen vor andern ein Vorzug gebühret, beybehalten zu werden; ungeachtet sich derselben Nutzen vielmehr auf den Ruff der vor Alters geleisteten Dienste, als auf die Vortheile, welche man noch würklich dadurch erhält, zu gründen scheinet. Denn bey den alten Belagerungen hatten die Belagerten die Gewohnheit, ein Retrenchement hinter der Breche zu machen, wodurch die Belagerer genöthiget wurden, sich auf den Ruinen der Breche fest zu setzen, um dasselbe Retrenchement anzugreiffen. In diesem Fall konnten die Canonen, welche von dem Orillon bedeckt waren, nicht unbrauchbar gemacht werden, und leisteten folglich den Belagerten bey dieser Gelegenheit herrliche Dienste.

Festungen erschien zuerst 1589 in Straßburg und erlebte sehr viele Auflagen bis 1736, wo es zum letzten Male (Dresden und Leipzig) gedruckt wurde. Siehe den Artikel von H. Janitschek in der *Allgemeinen deutschen Biographie*, Bd. 35, p. 82, ferner das wiederholt genannte Werk von M. Jähns, *Geschichte der Kriegswissenschaften*, 1. Abt., p. 822. F. R. S.

Man könnte auch viele Exempel anführen, da der Feind, nachdem er sich auf den Ruinen der Breche schon fest gesetzt hatte, dergestalt geängstiget worden, daß er sich genöthiget gefunden, von seiner Unternehmung abzustehen. Weil aber jetzo diese Gewohnheit länger auszuhalten, nachdem die Breche formiret, und der Graben ausgefüllet worden, abgekommen, so hört man auch bey den jetzigen Zeiten selten von dergleichen Vortheilen, welche man den Orillons zu danken hätte.

Die Ravelins, welche vor die Courtines gesetzt werden, (oder die halben Monds, wie dieselben in den neuern Arten genannt zu werden pflegen,) sollten dienen, um die Flanquen vor den Creutz-Schüssen zu verwahren, und die Batterien, welche auf dem entgegen gesetzten Theil der Contrescarpe aufgerichtet würden, auf eine Stelle einzuschränken, wo dieselben den Belagerten mehr ausgesetzt, und schwehrer sind, sich davor zu verwahren. Diese Erfindung ist gleichfalls beynahe eben so alt, als die Befestigungskunst selbst, indem sich dieselbe in den meisten alten Plätzen, und fast bey allen alten Scribenten, findet, und seithero in den meisten Befestigungs-Arten ist beybehalten worden.

Allein die alten Autores, deren fürnehmste Sorge auf die Sicherheit der Flanquen gerichtet war, verliessen sich nicht allein auf die Vortheile, welche sie von der letzt gedachten Erfindung erhielten. Denn obgleich durch dieses Mittel die Batterien, so zur Zerstörung der Flanquen dienen sollen, auf einem engen Platz eingeschränkt werden, so funden sie doch, daß der Feind auf diesem Platz mehr Raum hatte, als zu Aufrichtung seiner Contrebatterien erfordert würde; und um dieser Ursache willen haben sie noch die halben Monde vor die Spitzen der Bastionen gesetzet. Durch dieselben suchte man den Grund in Besitz zu nehmen, worauf die feindlichen Batterien gegen die Flanquen schon allbereit eingeschränket worden, und dadurch dem Feind die Errichtung dieser Batterien desto schwerer zu machen. Dem ungeachtet konnte diese Absicht hierdurch nicht völlig erreicht werden, und dahero hat man diese Manier einige Zeit aus der Acht gelassen.

Der Endzweck der Contreguardes*), welche ebenfalls sehr alt sind, ist mit den itzt gemeldeten halben Monden einerley, und besteht in Bedeckung

*) Pasino, dessen wir oben Meldung gethan, maßt sich die Erfindung der Contreguardes an, ungeachtet dieselben nachgehends durch Speckle sehr sind verbessert worden. Denn die Contreguardes dieses Autoris waren nicht nur vor die Bastionen allein gesetzt, sondern sie umringten den gantzen Platz.

der Flanquen, wozu dieselben, wann sie tüchtig angelegt werden, gantz ungemein geschickt sind. Denn, wenn der Feind die Flanquen miniren[1]) will, so muß er seine Contre-Batterien entweder auf der Contreguarde selbst errichten, welches ihm doch, wann dieselbe ein bequemes Profil hat, unmöglich fällt; oder er ist genöthiget, einen Theil der Contreguarde zu demoliren, um dadurch seine Batterien auf der Contrescarpe in Stand zu setzen, daß man die Flanque zu Gesicht bekomme; welches doch wegen der grossen Gefahr und Schwürigkeit ein mühseliges Werck ist, und eben so viel Hindernisse trifft er auch an, wenn er Breche schiessen will.

Allein, ungeachtet der Fürtrefflichkeit dieser Erfindung, so ist dieselbe doch in den neuern Methoden einer benachbarten Nation gäntzlich negligirt worden. Es sind in der That zwey oder drey Plätze durch die Frantzosen befestigt worden, in welchen zwar solche Werke, die von ihnen Contreguarden genennet worden, anzutreffen sind; dieselben haben aber mit denjenigen, von welchen hier die Rede ist, nichts als den blossen Nahmen gemein, obgleich ihre eigene Erfahrung von der Würkung dieser Werke bey Turin ihnen eine vortheilhafftere Meynung davon hätte beybringen sollen. Denn ich habe letztens gesehen, daß dieselben die Werke von alten Festungen mit Contreguarden von einer sehr beträchtlichen Fronte vermehret haben, ungeachtet dieselben vorher vor vollkommen feste Plätze gehalten wurden.

Aus allem diesem, was bißher gesagt worden, ist klar, daß sich die alten Ingenieurs die Bedeckung der Flanquen weit nachdrücklicher haben angelegen seyn lassen, als ihre Nachfolger, und daß folglich die Befestigungs-Kunst ihre Vollkommenheit nicht den neuern Ingenieurs zu danken habe, wie uns einige unwissende Schriftsteller bereden wollen. Denn es ist gewiß, daß die gröste Stärke einer Festung in der Sicherheit der Flanquen bestehe, weil, wenn auch schon alle übrige Beschützungs-Werke, welche den Batterien des Feindes ausgesetzt sind, ruiniret worden, dennoch der Feind sich dem Haupt-Wall nicht nähern darf, so lange die Flanquen noch unversehrt sind. Und derohalben, da dieser Umstand von einigen der neuern Ingenieurs so wenig in Betrachtung gezogen worden, so muß man gestehen, daß die wahren und eigentlichen Gründe dieser Kunst von ihnen sehr unvollkommen begriffen worden sind. Denn es hat sich öffters zugetragen, daß dieselben über einige Faden an der Länge der Flanque, Face oder Courtine, oder über einige Grade eines Winkels disputirt, da sie doch inzwischen die wichtigste Betrachtung, welche in

1) Im Original *ruin* zerstören. F. R. S.

der Bedeckung der Flanque gegen die Batterien des Feindes besteht, aus der Acht gelassen.

Diese Nachläßigkeit wurde bißweilen durch den Schein einiger Maximen unterstützet, deren eine insonderheit hierinne bestehet, daß derjenige, welcher den Feind sieht, auch von demselben hinwiederum gesehen werden könne.*) Woraus man geschlossen, daß wenn man von der Flanque den Feind sehen könne, derselbe auch von seinen Batterien die Flanque ruiniren könne. Der Fehler dieses Schlusses stecket aber hierinne, daß die Flanque, wenn sie wohl bedeckt ist, den Feind nicht sehen kan, so lang er sich an solchen Orten, wo es ihm möglich ist, Batterien anzulegen, aufhält: sondern alsdenn erst, wann er auf eine solche Stelle angerücket ist, da er dem hefftigsten Feuer der Flanque ausgesetzt ist, ohne sich im Stande zu befinden, dieselbe hinwiederum zu attaquiren. Als zum Exempel eine Canon, so nach der gemeinen Manier durch das Orillon bedecket ist, kan von dem Feind nicht eher gesehen werden, biß er den Graben schon meistentheils passirt ist, oder sich auf der Breche fest setzt; an beyden Orten aber fällt es ihm unmöglich, dagegen Contre-Batterien aufzuwerfen. Und je vollkommener das Werk ist, welches die Flanque bedecket, je grösser wird auch der Platz seyn, worinne sich der Feind in solcher Gefahr befindet.

Andere Ingenieurs haben sich unterstanden, dieser Kunst fast alle Würkung abzusprechen, und in dieser Absicht haben sie die Gewalt der neuen Art zu attaquiren dergestalt erhoben, daß sie behaupten wollen, es könne kein Platz so künstlich befestiget werden, daß er dagegen auszuhalten vermögend wäre. Diese Leute stehen in den Gedanken, daß, wann die Contrescarpe einmahl verlohren ist, die gantze Festung sich zugleich übergeben müsse: und in dieser Meynung suchen sie sich durch verschiedene Exempel von sehr wichtigen Festungen zu bestärken, welche in einer weit kürzeren Zeit, als man hätte vermuthen können, zur Uebergabe genöthiget worden sind. Wenn diese Meynung richtig wäre, so würde der größte Theil der Unkosten, so auf den Festungs-Bau gehen, sehr übel angewandt sein: indem ein einzeler Wall, nebst einer Contrescarpe, nicht weniger Vortheil schaffen würde, als die stärkeste Festung. Wann man aber diese Sache recht gründlich untersuchet, so

*) Diese Maxime wird in eben dieser Absicht behauptet in des PAGANS[1]) *Fortification*, Cap. IV.

1) BL. FR. DE PAGAN (1604—1665), *La Fortification*, Paris 1645. F. R. S.

wird man befinden, daß wenn eine Festung wohl gebauet, und rechtschaffen vertheidiget wird, der Verlust der Contrescarpe noch sehr wenig zur Uebergabe des Platzes beytrage.*) Es hat zwar öffters die Kühnheit und Eilfertigkeit des Directeurs über die Approchen einen verzagten und unerfahrnen Commandanten in Furcht gesetzt: wenn aber dergleichen übereilte Attaquen gegen einen Platz, darinnen sich ein tapferer und erfahrner Officier befunden, unternommen worden, so hat derselbe zuweilen daraus so viel Vortheil zu ziehen gewust, daß solche unzeitige Angriffe zum grösten Schaden der Belagerer ausgeschlagen. Auf diese Weise sind öffters die leichtesten Unternehmungen unmöglich gemacht worden; und die Absicht etliche Tage zu gewinnen, hat manchmal die gantze Entreprise zu nichte gemacht.**)

Ausser diesen Erfindungen, um die Flanquen zu bedecken, davon hier schon Meldung geschehen, sind noch andere von einer gantz andern Natur in Vorschlag gebracht worden; welche aber wegen ihrer sonderbaren Beschaffenheit nicht sonderlich in Betrachtung gekommen. Dergleichen ist die Errichtung einer Linie, welche durch den Graben von der Spitze des Bollwerks biß zum gegenüber stehenden Winkel der Contrescarpe gezogen werden soll. Dieser Vorschlag findet sich in den Memoires des Generals MONTECUCCOLI[1]), als ein solches Mittel, welches weit wenigern Schwierigkeiten unterworfen

*) In der letzten merkwürdigen Belagerung von Barcelona[2]) zog der Verlust der Contrescarpe (welche in einer Zeit von 14 Tagen war eingenommen worden) die Uebergabe der Stadt noch keinesweges nach sich: sondern der größte Wiederstand fand sich noch, nachdem der Platz schon durch viele Brechen eröffnet worden.

**) Verschiedene Exempel von dergleichen Schwierigkeiten und Gefährlichkeiten, denen die Alliirten im letzten Kriege in Flandern öffters ausgesetzt gewesen, sind beschrieben von LANDSBERG[3]), welcher damals als Ingenieur in Holländischen Diensten gestanden. Diese Zufälle kamen seiner Meynung nach insgesammt von den Vorurtheilen der Anführer her, welche, unter dem Vorwand die Sache zu beschleunigen, die Fronts von ihren Attaquen zusammen gezogen, und dadurch öffters des Feindes Werke in ihrem Rücken gelassen, welches ihren weitern Fortgang fast unmöglich gemacht.

1) RAIMUND GRAF MONTECUCCOLI (1609—1681), oesterreichischer Feldmarschall. F. R. S.

2) Von Anfang Juli bis 21. September 1714 durch die Franzosen. Siehe v. ALTEN, *Handbuch für Heer und Flotte,* Bd. 1, Berlin-Leipzig 1909, p. 834. F. R. S.

3) J. D. H. LANDSBERG, der Jüngere (1680?—1746), *Les fortifications de tout le monde*, La Haye 1712; *Nouvelle manière de fortifier les places*, La Haye 1712. Näheres findet man in dem mehrmals angeführten Werke von M. JÄHNS, 2. Abt., p. 1712. F. R. S.

seyn soll, als dem ersten Anblick nach scheinen möchte.*) Allein, ungeachtet eine solcher gestalt aufgeführte Linie die Flanque vor dem Gesicht der gegenüber auf der Contrescarpe errichteten Batterien ohne Zweifel bedecket, und dieselbe auch an sich selbst sehr wohl vertheidiget werden kann; so habe ich doch nimmer gehört, daß man sich derselben würklich bedienet hätte.

Ein anderes Mittel, die Flanque zu versichern, besteht darinne, daß man den einwärts lauffenden Winkel der Contrescarpe, oder des Ravelins, zwischen die Flanque und die Contre-Batterien setzt. Diese Manier ist bei ERRARD von Barleduc beschrieben**), und soll eine Erfindung des GRAFEN VON LYNAR[1]) seyn. Und obgleich einige Autores, welche die hieraus erwachsenden Vortheile nicht einsehen, keinesweges gutheissen wollen, daß ein Theil des Grabens von der Flanque verborgen seyn soll, welcher Umstand sich bei diesem Vorschlag notwendig ereignet, so haben doch die grösten Männer, welche sich jemahls auf diese Kunst gelegt, diese Manier angenommen, und ihrer Nachfolge gewürdiget. Die berühmte Festung Bergen-op-Zoom hat auch würklich ihre Flanquen zum Theil auf diese Art bedecket.

In einem guten Grunde aber kann man zu einer so kräftigen Defension gelangen, welche die bißher gemeldeten weit übertrifft: und dieses geschieht durch Hülfe der Contremines. Denn gesetzt, daß die Fortification eines Platzes nicht mehr Stärke hat, als erfordert wird, den Feind zu nöthigen, seine Batterien biß an das Glacis zu bringen, wann er entweder Breche schiessen, oder die Flanque ruiniren will, (wozu ein gutes Profil, sammt einem Ravelin vor der Courtine, hinreichend seyn kan), wann nur der Grund biß auf eine ziemliche Tiefe vom Wasser frey ist: so sind die Belagerten immer im Stande, durch ihre Minen die Batterien des Feindes zu ruiniren, welches nach der

*) Man sehe nach *Memorie del General* PRINCIPE DI MONTECUCCOLI pag. 116.[2])

**) *La fortification demontrée*[3]) Livr. III. Chap. 2. Außer dieser hier gemeldeten Invention findet sich bey diesem Autore der Vorschlag, eine Gallerie unter dem bedeckten Wege mit Öffnungen in den Graben anzubringen, welcher bei Tournay ins Werk gerichtet worden; vollständiger aber zu Bergen-op-Zoom. Livr. IV. Chap. 7.

1) R. GUERINI GRAF ZU LYNAR (1525—1596). F. R. S.

2) *Memorie della Guerra*, herausgegeben von HEINRICH VON HUYSSEN unter dem Titel: *Memorie del General* PRINCIPE DI MONTECUCCOLI, *che rinfermano* . . ., Colonia 1704. M. JÄHNS l. c. p. 1166. F. R S.

3) JEAN ERRARD de Bar-le-Duc (1554—1610), *La fortification reduicte en art et demonstrée*, Paris 1600. F. R. S

Tiefe des Grundes zu mehrmahlen wiederholt werden kan. Denn da diese Batterien, wie man supponirt, auf einer Stelle angelegt werden, so können sich die Belagerten darauf allzeit zum voraus gefaßt machen, und erhalten dadurch einen unendlich grossen Vortheil über den Feind, wann sich derselbe unterstehen sollte, dieselben auszugraben: welches doch bey solchen Umständen seine einige Zuflucht seyn würde.

Die erste vortheilhafte Anwendung der Minen in Belagerungen geschahe in dem Königreich Neapolis, allwo PETRUS DE NAVARRA[1]) sich durch dieses Mittel einer Festung bemeisterte, welche Frantzösische Besatzung hatte. Von den Minen aber, wodurch die Belagerten dem Feinde Schaden zugefügt, finden sich die ersten berühmten Exempel bey der Belagerung von Candia A. 1666, 67 und 68.[2]) Nicht, als wann dieselben nicht schon offt bey Vertheidigung der Plätze vorher wären gebraucht worden, obgleich auf keine so merkwürdige Art; sondern weil sich die Stadt Candia hauptsächlich durch Hülfe dieser Erfindung gegen die türckische Macht drey Jahr lang gehalten. Nach dieser Zeit hat man angefangen, die Vortheile der Contreminen besser einzusehen. Das letzte merkwürdige Exempel von ihrem grossen Nutzen findet sich in der Vertheidigung der Stadt Turin A. 1706. Denn dadurch wurden die Unternehmungen der Feinde dergestalt gehemmet, daß sie beynahe 4 Monathe nach Eröffnung der Tranchéen nicht mehr als die Contrescarpe in Besitz bekommen: und eben damahls wurden ihnen 11 Canonen von den Belagerten in die Luft gesprengt, nur 3 oder 4 Tag vorher, ehe der Platz entsetzt worden.

Ehe ich diese Materie schliesse, kan ich nicht umhin, von den grossen Verbesserungen der Minen Erwehnung zu thun, welche sich in der unvergleichlichen Abhandlung, so in dem dritten Buch des Frantzösischen POLYBII[3])

1) Gemeint ist PEDRO NAVARRO (1446—1528), der im Jahre 1503 das Castello dell' Uomo bei Neapel sprengte. Vergl. S. J. v. ROMOCKI, *Geschichte der Explosiv-Stoffe*, Bd. I, Berlin 1895, p. 251—253. F. R. S.

2) Über den Minenkrieg vor Candia gibt Auskunft der Artikel *Kandia* von Oberstleutnant FROBENIUS in v. ALTEN, *Handbuch für Heer und Flotte*, Bd. 5, Berlin-Leipzig 1913, p. 265. F. R. S.

3) Als Französischer POLYBIUS wird nach M. JÄHNS l. c. p. 1458 bezeichnet: *L'art de la guerre par M. le MARQUIS DE QUINCY, auquel est joint un traité des mines et des places de guerre par VALLIERE*, Paris 1726. F. R. S.

beygefüget worden, befinden.*) Denn es kan nichts vollständiger seyn, als die Manier, wonach die verschiedenen Arten der Minen eingetheilet worden. In der That kan zwar die Form der Aushöhlung, welche daselbst angezeigt wird, nicht so genau beobachtet werden, wie der Autor scheinet zu erfordern; inzwischen hat dieser Einwurf mit der allgemeinen Anordnung der Kammern nichts zu thun, als welche ungemein wohl ausgesonnen ist, theils zu Erspahrung des Grundes, theils auch zu Beschädigung des Feindes.

Ich habe schon einige Nachricht ertheilet von den Mängeln, so sich meistentheils in den Schriften derjenigen neuen Ingenieurs, welche neue Befestigungs-Arten herfür bringen wollen, befinden. Indem ich aber von diesen Autoribus und ihren Nachfolgern spreche, so muß ich zugleich die ausnehmenden Verdienste des grossen COEHOORNS[1]) erheben, welcher ausser Zweifel der tüchtigste Ingenieur gewesen, den die Welt jemahls gesehen. Dieser Autor hat zwey Bücher über diese Materie heraus gegeben.[2]) Das erste enthält eine Methode, ein Fünfeck zu befestigen, welchem ein Vorschlag beygefüget ist, die Fortifikation von Coevoerden[3]) zu verbessern. In dem andern Buche hat er drey verschiedene Manieren zu fortificiren angegeben, deren eine auf ein 6-Eck, die andere auf ein 7-Eck, und die dritte auf ein Achteck eingerichtet ist. Ausser diesem hat er noch beschrieben, wie man diejenige Seite einer Festung, welche an einem Fluß gelegen, fortificiren soll. In diesem Werke hat er alle mögliche Arten von Attaquen untersucht, welche gegen die von ihm vorgeschlagenen Festungen unternommen werden können, um dadurch den grossen Vorzug seiner Defension darzuthun. Dahero dieses Werk theils als eine Abhandlung von Attaquen und Defensionen, theils auch als ein Systema von der Fortification, angesehen werden kan; durchgehends aber ist

---

*) In der Vorrede wird gesagt, daß diese Abhandlung von Ms. DE VALIERE Marechal des Camps und Capitaine General des Mines[4]) komme.

---

1) M. VAN COEHOORN (1641—1704), Zeitgenosse und Gegner VAUBANS, Generalinspektor der niederländischen Festungen. F. R. S.

2) Nach M. JÄHNS, l. c., p. 1383 u. 1385 ist das erste dieser Bücher *Versterckinge de Vijfhoecks met alle sijne Buijtenwercken, gestellt tegens di van de Ing. en Capt. L. PAAN.* Leeuwarden 1682, und das andere *Nieuwe Vestingbouw op en natte of lage horisont,..* Leeuwarden 1685. F. R. S.

3) Die niederländische Festung Coevorden (Koeverden) war 1592 von MORITZ v. ORANIEN und 1672 von Bischof BERNHARD v. GALEN eingenommen worden. F. R. S.

4) J. F. DE VALLIERE (1667—1759). F. R. S.

dieses das fürtrefflichste Werk, so jemahls über diese Materie zum Vorschein gekommen. Dasselbe war erstlich in niederteutscher, als des Autoris Mutter-Sprache, beschrieben; es ist aber hernach ins Frantzösische und Englische übersetzet worden, aber sehr unvollkommen; obgleich in einer neuen Ausgabe der Frantzösischen Uebersetzung[1]), so neulich in Holland herausgekommen, viel Fehler verbessert, und einige sonderbare Stellen durch den Herausgeber, welcher den Sinn des Verfassers sehr wohl begriffen zu haben scheinet, erläutert worden.

Inzwischen bin ich von solchen Leuten, welche diesen grossen Mann sehr wohl gekannt haben, versichert worden, daß ihm diese seine Bücher damahls bey weitem nicht den Vortheil und die Ehre erworben, welche er sich daraus mit allem Recht hätte versprechen können: sondern daß er von den damahligen Ingenieurs, welche von der alten Gewohnheit keinen Fuß breit weichen wollten, vielmehr als ein unerfahrner und einbildischer Mann ausgeschrien worden. Endlich aber habe er doch alle diese Anfälle des Neides und der Vorurtheile durch seine Vertheidigung des Forts Guillaume[2]) bey Namur überwunden, als dieser Ort von den Frantzosen belagert worden. Nach dieser That, wodurch sein Ruhm befestiget worden, stieg er nach und nach zu den höchsten Kriegs-Bedienungen, und verewigte seinen Nahmen durch die Anführung der Belagerung Namurs unter dem König Wilhelm, und nachgehends bey Bonn[3]), Limburg, der Citadelle von Lüttich, und andern Orten. Sein Tod, welcher bey dem Anfange des letzten Krieges in Flandern erfolgte, war den Alliirten sehr fatal, wovon fast eine jegliche von ihnen nach A. 1707 unternommene Belagerung traurige Proben an den Tag legte.

Ausser den Belagerungen, welche er führte, wurde er auch zu Verbesserung und Anlegung verschiedener Holländischen Gränzfestungen gebraucht. Sein letztes Werk, welches er aber nicht zu Ende gebracht, war Bergen op Zoom, welches seinem Nahmen zur immerwährenden Ehre gereichet, ob ihn gleich noch jetzo die Tadelsucht nicht unangefochten lässt. Denn ich habe

---

1) In der zweiten Auflage der ersten französischen Übersetzung (La Haye 1706) betitelt: *Nouvelle fortification tant pour un terrain bas et humide, que sec et élevé, par Coehoorn*, La Haye 1741. F. R. S.

2) Im englischen Original und in der deutschen Übersetzung William statt Guillaume. F. R. S.

3) Im englischen Original und in der deutschen Übersetzung Bon statt Bonn. Die Einnahme Bonns durch Coehoorn erfolgte 1703. F. R. S.

Krieges-Leute gehört, welche an eben dieser Festung solche Werke, welche doch zur stärksten Verteidigung dienen, als Haupt-Fehler ansehen wollen.

In Betrachtung des grossen Ruhms, welchen der General COEHOORN durch seine wichtigen Dienste erworben, ist fast nicht zu begreiffen, daß seine Schriften so wenig hervor gezogen worden. Die natürlichste Ursache dieser Nachläßigkeit scheinet wohl die Verachtung zu seyn, welche man insgemein gegen die Erfindungen einer benachbarten Nation heget, welche, so herrlich dieselben auch seyn mögen, dennoch von einer andern Nation, deren Interesse entgegen ist, nimmer nach Würden hoch geschätzt werden. Dem sey aber wie ihm wolle, so glaube ich doch, daß der Ruhm dieses Autoris noch inskünftige weit höher steigen werde. Denn ich sahe vor einiger Zeit, daß in einer der beträchtlichsten Gränzfestungen von Frankreich ein Werk aufgerichtet wurde, welches augenscheinlich aus den gedachten Rissen des COEHOORNS genommen worden.

Uebrigens kan ich unter den neuen Autoribus von der Fortification, ohne ihrem Ruhm den geringsten Abbruch zu thun, keinen einzigen finden, welcher mit dem jetzt gemeldeten COEHOORN in gleichen Rang gesetzt zu werden verdiente. Es finden sich zwar noch zwey berühmte Autores, welche von der Art, die Plätze zu attaquiren und zu defendiren, geschrieben haben, welche Materie mit der Fortification auf das genauste verknüpfet ist, und die billig den grösten Beyfall verdienen: ich meyne den General GOULON[1]) und den Marechall DE VAUBAN[2]). Von dem erstern haben wir einen Tractat unter dem Titul: *Memoires sur l'Attaque et la Defense des Places*[3]), worinne er die fürnehmsten Maximen bey diesen Operationen sehr deutlich ausgeführet. Von dem andern hat man ein Werk, welches er dem vorigen König in Frankreich geschrieben praesentiret, wovon nachgehends verschiedene Copien herum gekommen, biß dasselbe endlich erst vor einigen Jahren in Holland gedruckt worden[4]). In diesem Buche hat Mr. VAUBAN diejenigen Theile der

---

1) P. VON GOULON, 1686 General in österreichischen Diensten. F. R. S.

2) S. LEPRESTRE DE VAUBAN (1633—1707). F. R. S.

3) Der genaue Titel ist: *Mémoires pour l'attaque et la deffense d'une place par Mr. GOULON, Ing. et Général des Armées de l'Empereur.* 1706 im Haag französisch und 1709 in Nürnberg deutsch erschienen. F. R. S.

4) Durch den Buchhändler DE HONDT unter dem Titel: *De l'attaque et de la défense des places par M. DE VAUBAN.* T. I, La Haye 1737. Die zweite Abteilung dieses Bandes bringt die Abhandlung über die Verteidigung, aber nicht die von VAUBAN, sondern von DESHOULIERES. F. R. S.

Attaque, welche insonderheit von seiner eigenen Erfindung sind, sehr umständlich beschrieben: als da sind die Batterie à ricochet, die Parallels, und eine besondere Anlegung der Sape. Ueber dieses hat er auch zugleich sehr weitläuftige Anleitung zu allen übrigen nöthigen Stücken gegeben, dergestalt, daß man das gantze Werk als ein würdiges Meisterstück der grossen Erfahrung und Geschicklichkeit dieses grossen Mannes mit Recht ansehen kan.

Man dürfte vielleicht erwarten, daß ich mit eben solchen Lobes-Erhebungen von der Tüchtigkeit dieses jetzt gemeldeten Ingenieurs in der Kunst zu fortificiren selbst Meldung thun sollte: allein da derselbe selbst über diesen Articul nichts geschrieben, so kann mich dieses entschuldigen, daß ich ihn unter der Liste der Autoren von dieser Art nicht aufführe. Wenn ich aber hierüber die Wahrheit sagen soll, so kan ich aus allem demjenigen, was ich bißher von seinen Werken gesehen, nicht glauben, daß er vielmehr wegen seiner übrigen Gaben, als wegen der Befestigungs-Werke, welche er aufgeführet, aestimiret zu werden verdiene. Denn ungeachtet ich seinen grossen Verstand und Einsicht sehr hoch schätze, so kann ich doch nicht begreiffen, wie man seine Erfindungen in dieser Kunst mit COEHOORN nur in einige Vergleichung bringen könne.

Dieses mag also genug seyn von dem Anfange, und den Veränderungen der neuen Kriegs-Baukunst. Wir wollen dahero zu Erläuterung desjenigen, welches mit dem folgenden Tractat näher verbunden ist, fortschreiten: nehmlich zur Erfindung des Pulvers und der Artillerie, und derselben Fortgang, nebst den verschiedenen Theorien, woraus dieselben entsprungen.

Die Erfindung des Schießpulvers wird gemeiniglich einem teutschen Mönch, Nahmens BARTHOLD SCHWARTZ, zugeschrieben, welcher dasselbe, wie man sagt, um das Jahr 1320 erfunden haben soll[1]). Der erste Gebrauch aber in dem Kriege wird insgemein den Venetianern 1380 gegen die Genueser zugeeignet. Diese beyden Meynungen aber sind unstreitig falsch. Denn eine dem Pulver ähnliche Vermischung findet sich schon bey dem ROGERIO BACON[2]),

1) ROMOCKI stimmt in seiner *Geschichte der Explosivstoffe*, Bd. I, Berlin 1895, p. 106—113, der von H. HANSJAKOB in der Schrift *Der schwarze Berthold*, Freiburg i. B. 1891, vertretenen Ansicht bei, wonach der genannte Franziskaner-Mönch in der Mitte des 13. Jahrhunderts zu Freiburg i. B. gelebt haben soll. F. R. S.

2) Der englische Franziskaner-Mönch ROGER BACON (1214—1294) erwähnt eine solche Mischung in seiner Schrift *Epistola fratris ROGERII BACONIS de secretis operibus artis et naturae et de nullitate magiae*, Paris 1542, cap. XI. Die betreffende Stelle ist abgedruckt in ROMOCKI, *Geschichte der Explosivstoffe*, Bd. I, p. 93. F. R. S.

als eine schon damahls wohl bekannte Sache, beschrieben, welcher beynahe 50 Jahr vor gemeldetem SCHWARTZ gelebet; und man hat auch unwiedersprechliche Proben, daß der Gebrauch der Artillerie viel eher, als A. 1380, bekannt gewesen.

Und in der That, da die Entdeckung des Salpeters gänzlich ungewiß ist, so hat man sich auch nicht zu verwundern, daß die Erfindung des Schießpulvers eine so verborgene und ungewisse Sache seyn soll. Denn diese zwey Entdeckungen sind mit einander so genau verbunden, daß man nicht wohl begreiffen kan, wie die erstere lange Zeit vor der andern hätte bekannt seyn können.

Die Haupt-Eigenschaft des Salpeters bestehet in der entsetzlichen Vermehrung der Anzündungs-Kraft, welche sich in allen verbrennlichen Materien, so damit vermischet werden, äussert: obgleich derselbe allein und ohne Vermischung weder Feuer fängt noch brennt. Denn, wann zum Exempel der blosse Salpeter in einen Tiegel gethan, und in das heftigste Feuer gesetzt wird, so schmeltzet er nur, und wird glüend, entzündet sich aber keineswegs. So bald er aber mit einer verbrennlichen Materie, als Schwefel oder Kohlen, versetzet wird, so entsteht im Augenblick eine heftige Entzündung, wodurch ein Theil des Salpeters, je nachdem mehr oder weniger verbrennliche Materie damit vermischet worden, verzehret wird. Eine gleiche Entzündung geschieht, wenn man den Salpeter nur bloß ins Feuer wirfft. Nun ist es nicht wahrscheinlich, daß diese Eigenschafft des Salpeters lange hat verborgen bleiben können, nachdem diese Materie selbst entdecket worden. Denn, wann nur zufälliger Weise etwas davon ins Feuer gefallen, so hat sich sogleich seine erstaunliche Kraft in Vermischung mit verbrennlichen Materien verrathen müssen. Und nachdem dieses einmahl wahrgenommen worden, so war es gantz natürlich und leicht, auf eine Vermischung des Salpeters mit einer verbrennlichen Materie zu fallen, welche alsdann viel heftiger, als immer eine schon bekannte Materie loßbrennen würde. Unser jetziges Schießpulver ist aber nichts anders, als eine solche verbesserte und zu grösserer Vollkommenheit gebrachte Vermischung.

Wenn wir also, dieses vorausgesetzt, die Zeit bestimmen könnten, wann der Salpeter zuerst bekannt worden, so könnte man auch ziemlich sicher muthmassen, wann dergleichen Mixturen, welche unserm Pulver gleichen, zuerst erfunden worden. Hierüber ist aber die allgemeine Meynung, daß der Salpeter entweder von den Arabern, oder von den neuen Griechen um das

9te Seculum entdecket worden, als welche Völker sich mit dem grösten Fleiß auf die Chymie und Alchymie gelegt hatten. Der arabische Nahme des Salpeters soll auch so viel, als eine loßbrennende Kraft, anzeigen; und das griechische Feuer, welches von den letzten Griechischen Kaysern im Kriege gebraucht worden, wenn die demselben von den Autoribus beygelegten Würkungen ihre Richtigkeit haben, muß nothwendig auch aus Salpeter bereitet worden seyn.[1])

Einige heutige Autores wollen so gar behaupten, daß der Salpeter schon zu weit ältern Zeiten bekannt gewesen, wozu dieselben die heut zu Tage gleiche Bedeutung der Nahmen Nitrum, und Salpeter, verleitet zu haben scheint. Es ist aber anjetzo bei den Chymicis eine ausgemachte Sache, daß die bey einigen Alten unter dem Nahmen Nitro erwehnte und bey dem PLINIO[2]) beschriebene Materie ein Saltz gewesen, welches von demjenigen, so wir Salpeter nennen, gänzlich verschieden ist.

Daß aber die erste Entdeckung des Schieß-Pulvers, oder eine demselben ähnliche Mixtur, weit vor die Zeiten, da SCHWARTZ und BACON gelebet, hinaus gesetzt werden, und dahero, allem Ansehen nach, eben so alt, als die Kenntniß des Salpeters selbst seyn müsse, erhellet aus dem BACONE selbst. Denn dasjenige, was er beschreibet, war zu seiner Zeit keine neu erfundene Composition, sondern nur eine Anwendung einer alten zum Behuf des Kriegswesens. Und aus seinen eigenen Worten ist deutlich zu ersehen*), daß da-

*) BACON erzehlet[3]), daß ein Knall, gleich dem Donner, und ein Blitz, welcher den natürlichen übertreffe, durch die Kunst hervor gebracht werden, und daß es verschiedene Mittel gäbe, wodurch eine Stadt oder eine Armée zu Grunde gerichtet werden könne. Er sieht auch in den Gedancken, daß GIDEON auf eine solche Art die Midianiter überwunden habe. Nachdem er an einem andern Orte eben diese Dinge mit andern Worten angeführet, so fügt er folgendes hinzu:

Et experimentum huius rei capimus ex hoc ludicro puerili, quod fit in multis mundi partibus, scilicet ut instrumento facto ad quantitatem pollicis humani ex violentia illius salis, qui Salpetrae vocatur, tam horribilis sonus nascitur in ruptura tam modicae rei scilicet modici pergameni, quod fortis tonitrui rugitum et corruscationem maximam sui luminis iubar excedit.

Man besehe des Doctor JEBBS Vorrede zu seiner Edition von *BACONIS Opus maius.*[4])

1) Diese Ansicht ist irrig, wie ROMOCKI l. c. p. 5—22 überzeugend nachgewiesen hat. F. R. S.

2) PLINIUS der Ältere (23—79), der bekannte römische Naturforscher und Verfasser der *Historia naturalis*. F. R. S.

3) Im letzten Kapitel seines *Opus maius*, betitelt *De dignitate artis experimentalis*. Die einschlägige Stelle ist auch abgedruckt bei ROMOCKI l. c. p. 93. F. R. S.

4) Diese von S. JEBB besorgte Ausgabe des *Opus maius* erschien in London 1733. F. R. S.

mahls schon eine Vermischung aus Salpeter und andern Materien bey den zur Lust angestellten Feuerwerken üblich gewesen. Dieses erhellet aber noch deutlicher aus einem Buche des MARCI GRAECI, *Liber Ignium* genannt.*) Denn dieser Autor beschreibet zwey Gattungen von Feuerwerken, eine fliegende, und eine andere, welche einen Knall von sich giebt. Die Hülse oder Cartusche zu dem erstern soll nach seiner Anweisung lang und schmal seyn, und die Composition sehr fest zusammen gestossen werden. Die Hülse zur andern Gattung muß kurz und dicke, an beyden Enden wohl verbunden und nur halb voll gefüllet werden. Die Composition, welche er zu beyden vorschreibt, bestehet aus zwey Pfund Kohlen, einem Pfund Schwefel, und aus 6 Pfund Salpeter, welche Materien pulverisirt und in einem steinern Mörsel zusammen wohl vermischet werden sollen. Dieses muß nun eine weit stärkere Composition seyn, als heut zu Tage vermittelst einer grossen Menge Pulver gemacht zu werden pfleget. Ungeachtet aber die eigentliche Zeit dieses Autoris nicht gewiß ist, so muß er doch lange vor dem Gebrauch der Artillerie gelebt haben; denn er thut nirgends, wie ich sehe, die geringste Meldung, daß diese Kunststücke in dem Kriege wären gebraucht worden; und da sich derselbe die Erfindung dieser Drachen und Schwärmer, wie man dieselben heut zu Tage nennen würde, nicht zuschreibet, davon auch nicht als von etwas neues spricht, so kan man sicher glauben, daß dieselben schon lange vor ihm üblich gewesen.

Der erste Gebrauch dieser Vermischungen im Kriegswesen scheinet bald nach dem Jahr 1300 gemacht worden zu seyn. Der Vorschlag des BACONS, welchen er um das Jahr 1280 gethan, sich dieser heftigen Loßbrennung zu Zerstörung der Städte und Arméen zu bedienen, mag dazu die ersten Gedanken gegeben haben, welche nachgehends besser sind verfolget worden. SCHWARTZ, an statt der erste Erfinder des Schießpulvers zu seyn, mag vermuthlich dasselbe zuerst bey dem Kriegswesen angewandt haben; und die gemeine Erzehlung, auf was Art derselbe zu dieser Erfindung gelanget seyn

*) Dieses ist ein Manuscript, welches der Doctor MEAD besitzt.[1]) Was aber hierinne gemeldet ist, wird bestätiget durch den Herausgeber des *BACONIS Opus maius* in der Vorrede.

1) Die Schrift mit dem genauen Titel *Liber ignium ad comburendos hostes, auctore MARCO GRAECO* befindet sich nach ROMOCKI l. c. p. 114 in den Handschriftenbänden 7156 und 7158 der Pariser Nationalbibliothek und wurde 1804 herausgegeben von LA PORTE DU THEIL. MARCUS GRAECUS lebte etwa in der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts. F. R. S.

soll, scheinet diese Meynung nicht wenig zu bestätigen.*) Und vielleicht sind die verschiedenen Verbesserungen, welche nach der Zeit durch andere gemacht worden, ingleichen auch die Ausführung der Gedancken des BACONS an verschiedenen Orten, die wahre Ursache, warum die Geschichtschreiber über dem Ursprung der Artillerie so sehr uneinig sind.

Das Schießpulver wurde einige Zeit nach Erfindung der Artillerie aus einer weit schwächern Composition bereitet, als anjetzo gewöhnlich ist**), und auch als dasjenige war, dessen bey dem MARCO GRAECO Meldung gethan wird. Allein, die Ursache hievon war vermuthlich vielmehr die Schwäche ihrer Stücke, als die Unwissenheit einer bessern und stärckern Mixtur. Denn die ersten Stücke der Artillerie waren von einer sehr kurtzen und ungeschickten Façon, indem dieselben gemeiniglich aus vielen der Länge nach zusammen geschmiedeten eisernen Stangen gemacht, und durch eiserne Ringe befestiget wurden. Da dieselben auch über das gebraucht wurden, steinerne Kugeln von ungeheurer Grösse zu schiessen, um dadurch den alten Maschinen, an deren Stelle dieselben gesetzt worden, nachzuahmen, so hatten sie auch eine sehr grosse Mündung. Allein, die Schwierigkeit, diese ungeschickten Maschinen fortzubringen und zu tractiren, ingleichen auch die Entdeckung,

*) Nach der gewöhnlichen Erzehlung wird gemeldet, daß als SCHWARTZ einmahl die Materien zum Pulver in einem Mörser gestampfet, und solchen hierauf mit einem Stein zugedecket, ein Funke ungefehr in den Mörser gesprungen, wodurch die Materie angezündet, und der Stein auf eine zimliche Höhe geschmissen worden. Weil wir nun dargethan haben, daß SCHWARTZ, der ein Chymicus war, auf diese Weise die Composition des Pulvers selbst, als welche schon lange vorher bekannt gewesen, nicht allererst kan erfunden haben, so mag ihm dieser Zufall Anlaß gegeben haben, auf die bequemste Art, wie man sich desselben in dem Kriege bedienen könnte, zu denken. Denn BACON scheinet vielmehr schon die Würkung desselben eingesehen zu haben, welche die Kraft der Flamme in die umliegenden Cörper auszuüben vermögend ist. Der Nahme, und die Figur vom Mörser, welcher in der alten Artillerie einer Gattung von Geschütz beygeleget worden, und der Gebrauch derselben, wodurch man Steine in die Höhe zu werfen pflegte, geben dieser Muthmassung einen starken Nachdruck.[1])

**) Man sehe in des TARTALEA *Quesiti et Inventioni* Libr. 3., Quesito 5., nach, allwo 23 verschiedene Compositionen, welche zu verschiedenen Zeiten im Schwange gewesen, angeführt werden. Die erste, welche zugleich die älteste ist, wurde aus gleichen Theilen Salpeter, Schwefel und Kohlen, gemacht.

1) Aus den sehr gründlichen und umfassenden Untersuchungen ROMOCKIS geht hervor, daß der p. 24 genannte BARTHOLD SCHWARZ zuerst auf den Gedanken kam, die Triebkraft des schwarzen Schießpulvers zum Fortschleudern von Geschossen zu verwenden. F. R. S.

daß weit kleinere eiserne Kugeln eine grössere Würkung thun, wann dieselben durch eine grössere Menge stärkeres Pulver geschossen werden, haben bald eine Veränderung so wohl in der Materie, als Form der ersten Stücke, verursachet. Hierdurch wurde man zu den Metallenen Canonen geleitet, welche, ob sie gleich leichter und bequemer zu tractiren waren, als die vorigen, so waren sie doch wegen ihrer kleinern Mündung viel stärker, und konnten eine grössere Ladung von besserem Pulver aushalten, als vorher im Gebrauch gewesen. Auf diese Art wurden die eisernen Kugeln, welche am Gewicht 40 biß 60 Pfund[1]) hielten, in eine weit schnellere Bewegung gesetzt, und erhielten also eine stärkere Kraft, als man vorher durch die grösten Steine hervor zu bringen vermögend gewesen.*)

---

*) Die Zeit, zu welcher diese Veränderung vorgenommen worden, und die dadurch erhaltenen Vortheile, werden von Guicciardini[2]) beschrieben, welcher, indem er von der Frantzösischen Armée, so A. 1494 in Italien einen Einfall thun sollte, Meldung thut, sich folgender Gestalt vernehmen lässt:

Et per unirsi con questo esercito erano state condotte per mare a Genova quantità grande d'artiglierie da battere le muraglie, et da usare in campagna, ma di tale sorte, che giamai non haveva veduta Italia le simiglianti. Questa peste trovata molt' anni innanzi in Germania, fu condotta la prima volta in Italia da' Venetiani nella guerra, che circa l'anno della salute 1380 hebbono i Genovesi con loro. — Il nome delle maggiori era bombarde, le quali, sparse dopo questa inventione per tutta Italia s'adoperavano nell' oppugnatione delle terre, alcune di ferro, alcune di bronzo, ma grossissime, in modo che per la macchina grande et per l'imperitia de gli huomini, et mala attitudine de gl' instrumenti tardissimamente et con grandissima difficultà si conducevano, piantavansi alle terre co' medesimi impedimenti, et piantate era dall' un colpo all' altro tanto intervallo, che con piccolissimo frutto a comparatione di quello, che seguitò dopo, molto tempo consumavano, donde i defensori de' luoghi oppugnati havevano spatio di potere otiosamente fare di dentro ripari et fortificationi. — Ma i Francesi fabricando pezzi molti più espediti, nè d'altro che di bronzo, i quali chiamavano Cannoni, et usando palle di ferro, dove prima di pietra, et senza comparatione piu grosse et di peso gravissimo, s'usavano, li conducevano in sulle carrette, tirate (non da buoi, come in Italia si costumava) ma da cavalli con agilità tale d'huomini, et d'instrumenti deputati a questo servigio, che quasi sempre al pari de gli eserciti caminavano, et condotte alle muraglie erano piantate con prestezza incredibile, et interponendosi dall'un colpo all' altro piccolissimo intervallo di tempo, sì spesso et con impeto sì gagliardo percuotevano, che quello che

---

1) Über die in diesem Bande vorkommenden Maßeinheiten gibt das Vorwort des Herausgebers Auskunft. F. R. S.

2) Das Zitat bezieht sich auf die 1561—1564 in Florenz erschienene *Storia d'Italia* des italienischen Staatsmanns, Heerführers und Historikers Francesco Guicciardini (1483—1540).
F. R. S.

Durch dieses Mittel kam also das Pulver, welches noch heut zu Tage in gantz Europa üblich ist, in Gebrauch. Diese Verbesserung des Pulvers bestund aber nicht nur in der Proportion der Materien, aus deren Vermischung dasselbe gemacht wird*), sondern die Erfindung, dasselbe zu körnen, brachte auch einen gantz besondern Vortheil. Denn anfänglich wurde das Pulver immer fein wie Meel bereitet, in welche Gestalt dasselbe durch die Zerstossung der Materialien gebracht worden. Und es ist noch zweiffelhafft, ob man zuerst bey Körnung des Pulvers die Absicht gehabt, seine Stärke dadurch zu vermehren, oder dasselbe bloß allein zu den kleinen Schieß-Gewehren bequemer zu machen, als wozu das gekörnte Pulver viele Jahr lang allein gebraucht worden, da man sich immittelst zu den Canonen beständig des Meel-Pulvers bedienet hat. Als man aber bemerket, daß die Stärke des Pulvers durch die Körnung nicht wenig vermehret wurde, indem dadurch das Feuer einen freyern Durchgang zwischen den Körnern erlangte, so wurde das Meel-Pulver völlig bey seite gesetzt.**)

---

prima in Italia fare in molti giorni si soleva, da loro in pochissime hore si faceva. Guicciardini *Histor.* Libr. I. p. 45.

Was dieser Autor von der erstaunlichen Grösse der Steine, welche bey den Stücken von der alten Art gebraucht worden, meldet, wird sich besser verstehen lassen, wann man bedencket, daß als Mahomet der Zweite A. 1453 die Stadt Constantinopel belagert, er die Wälle mit steinern Kugeln, welche biß auf 1200 Pfund schwer waren, beschossen. Diese Stücke konnten aber des Tages nicht mehr, als 4 mahl loßgeschossen werden.

*) Wir sehen aus dem Tartalea, daß das Canonen Pulver (polvere grossa moderna) zu seiner Zeit aus 4 Theilen Salpeter, einem Theil Schwefel, und einem Theil Kohlen; das Musqueten-Pulver aber aus 48 Theilen Salpeter, 7 Theilen Schwefel, und 8 Theilen Kohlen; oder auch aus 18 Theilen Salpeter, 2 Theilen Schwefel, und 3 Theil Kohlen zubereitet worden. Diese Compositionen des Musqueten-Pulvers kommen mit den jetzt gebräuchlichen ziemlich genau überein; dann die erstere hält in hundert Pfund Pulver nur etwa 1 Pfund, die andern aber 3 Pfund Salpeter mehr, als jetzt gewöhnlich ist.

**) Daß das Pulver erstlich in Meels Gestalt gebraucht worden, und daß erst lange hernach die Körnung zum Gebrauch der kleinen Schieß-Gewehre aufgekommen, zu denen Canonen aber das Meel-Pulver beibehalten worden, ist unstreitig gewiß. Tartalea versichert ausdrücklich in seinen *Quesiti* Libr. 3. Ques. 9. und 10., daß damahls das Canonen-Pulver in Meels Gestalt, das Musqueten-Pulver aber gekörnet gewesen. Und unser Lands-Mann William Bourne[1]) in seiner *Art of Shooting in great Ordnaunce,* welches Buch 40 Jahr nach Tartalea herausgekommen[2]), erzehlet im ersten Capitel, daß das Schlangen-Pulver, (welches er dem gekörnten Pulver entgegen setzt,) so fein als

---

1) Der Geschlechtsname Bourne fehlt in der deutschen Übersetzung. F. R. S.

2) Nämlich 1587 in London. Bourne war 1583 gestorben. F. R. S.

Die Form der Artillerie hat seit zweyhundert Jahren sehr geringe Verbesserungen erhalten: indem die besten Stücke, welche anjetzo gemacht werden, in Ansehung der Proportionen nicht viel von denjenigen unterschieden sind, welche zur Zeit des Kaysers Carls V. verfertiget worden. Es sind zwar in der Tat öfters leichtere und kürzere Stücke in Vorschlag gebracht, und probiret worden; allein, ungeachtet dieselben ihre Vortheile hatten, und in besondern Umständen sehr gute Dienste thaten, so scheint es doch, daß dieselben zum allgemeinen Gebrauch als unzulänglich verworfen worden. Ob aber gleich die Proportionen bey der Artillerie in dieser Zeit nicht merklich verändert worden, so hat man doch in dem Gebrauch derselben ziemliche Veränderungen vorgenommen; indem man nun insgemein eben dieselben Absichten durch kleinere Stücke zu erhalten trachtet, als man dazu vor diesem erfordert zu werden geglaubt hatte. Also sind die Batterie-Stücke, welche anjetzo durchgehends approbirt werden, halbe Carthaunen, so eine Kugel von 24 Pfund schiessen; weil man durch die Erfahrung befunden, daß der Schuß davon, ob er gleich schwächer ist, als von grösseren Stücken, dennoch in Ansehung der nunmehro gebräuchlichen Profilen in den Befestigungs-Werken, stark genug ist, und daß man durch die Bequemlichkeit dieselben fortzubringen und zu tractiren, ingleichen durch die Erspahrung an Ammunition, sehr wichtige Vortheile über die gantzen Carthaunen erhält, deren man sich vormahls Breche zu schiessen bedienet hat. Die jetzige Manier, Breche zu schiessen, welche allenthalben angenommen worden, da man erstlich den gantzen Wall so niedrig als möglich, durchschneidet, ehe man den obern Theil abzuwerfen sucht, scheinet auch eine sehr wichtige Verbesserung in der Ausübung der Artillerie zu seyn. Denn ich kann mich nicht erinnern, diese Manier bey irgend einem alten Autore angetroffen zu haben, und

---

Sand und Staub seyn muste: und im dritten Capitel sagt er, daß 2 Pfund gekörnt Pulver so weit treiben als 3 Pfund Schlangen-Pulver. Ferner berichtet der Herr Henrich Manwayring in seinem *Seamans Dictionnary*[1]), welches er dem Herzog von Buckingham zur Zeit Carls des Ersten praesentirt, unter dem Wort Pulver: daß zwey Arten von Pulver im Gebrauch waren, das eine genannt Schlangen-Pulver, welches nicht gekörnet war, sondern wie Staub aussahe; das andere aber gekörntes Pulver: ob er gleich hinzufügt, daß das Schlangen-Pulver auf der See nicht gebraucht worden. Ich glaube aber, daß zu der Zeit, als dieses Buch geschrieben worden, das Pulver schon durchgängig gekörnet worden; dann die ausländischen Scribenten von der Artillerie hatten schon lange vorher den Gebrauch des gekörnten Pulvers recommendirt.

---

1) In London erschienen 1644. F. R. S.

GABRIEL BUSCA*), welcher sich auf seine grosse Erfahrung sehr viel einbildet, will das Gegentheil ausdrücklich haben. COLLADO thut zwar davon, als von einer bey den Türcken**) üblichen Practique Meldung, ohne dieselbe jedoch gut zu heissen, oder noch als ein Exempel zur Nachahmung vorzuschlagen.

Die wichtigste Verbesserung aber in der practischen Ausübung der Artillerie (denn von der theoretischen soll an seinem Ort gehandelt werden), bestehet in der Manier, mit einer geringern Quantität Pulver zu schiessen, und das Stück dergestalt zu richten, daß die Kugel just auf das Parapet der Feinde und in ihre Werke hinein fährt. Denn da solchergestalt die Kugel unter einem kleinen Winkel zu Boden fällt, und mit einem geringen Grad der Geschwindigkeit nach der derselben eingedruckten Direction fort rollet, und dahero, wenn das Stück in einer Linie mit der Batterie, welche unbrauchbar gemacht werden, oder mit der Fronte, welche bestrichen werden soll, gerichtet ist, so durchstreichet ein jeglicher Schuß der Länge nach die gantze Batterie, oder die gantze Fronte, und verursachet dadurch unendlich viel mehr Ungemach bey den Vertheidigern, und thut auch ihren Canonen viel mehr Schaden, als wenn dieselbe auf die gemeine Art gegen diese Werke geschossen würde. Diese Anordnung der Artillerie, welche in der That über die massen vortheilhaft ist, ist eine Erfindung des Marschalls VON VAUBAN,

---

*) Man sehe seine *Instruzzione de Bombardieri*, gedruckt zu Carmagnola[1]) A. 1584, im 37sten Capitel nach, allwo er anrathet, die Breche an dem obern Theil des Walles anzufangen, und solche hernach abwerts fortzusetzen.

**) Man sehe nach: *Pratica manuale di Artiglieria dal Mag. Signor LUIGI COLLADO* Hispano, Bettico, Nebrisense, gedruckt zu Venedig A. 1586, im 20ten Capitel, wie er sagt:

Nelle fattioni del gran Turco — sempre si adoperano i pezzi — da tagliare le muraglie per di sotto di esse transversalmente, et di poi di alto in basso a perpendicolo, et applicandovi poi tutti a un tratto i basilischi, con che fanno cascar giù quella parte di muraglia che era già tagliata.

Das hier angeführte Buch ist in Italienischer Sprache geschrieben und gedruckt, obgleich der Verfasser ein Spanier gewesen: denn er diente als Ingenieur bey der Spanischen Armée in Italien, und er sagt in der Vorrede, daß er hernach gesinnt gewesen, dasselbe wiederum spanisch heraus zu geben.[2]) Welches, wie ich vermuthe, die letzte Edition ist, so vom BLONDEL[3]) in seiner *Art de jetter les Bombes* angeführt wird.

---

1) Zum ersten Mal gedruckt in Venedig 1545. F. R. S.

2) Diese (vollständigere) spanische Ausgabe ist nach M. JÄHNS l. c. p. 658 unter dem Titel: *Plática manual de Artilleria* 1592 in Mailand erschienen. F. R. S.

3) FR. BLONDEL (1617—1686), Direktor der Bauakademie in Paris. Seine *Art de jetter les bombes* erschien in Paris 1683. F. R. S.

und wird von ihm die Batterie à ricochet genennet*). Solche ist zuerst bey der Belagerung von Ath im Jahr 1692 angebracht worden**).

Nach dieser kurtzen Erzehlung desjenigen, was in dem practischen Theil der Artillerie gethan worden, müssen wir anjetzo von den verschiedenen Theorien, welche von Zeit zu Zeit über die Bewegung der Kugeln zum Vorschein gekommen, einige Nachricht ertheilen, in welcher Untersuchung wir in der That sehr wenig Dinge, so einige Aufmerksamkeit verdienen, antreffen werden. Dem ungeachtet aber, da diese Materie mit der folgenden Abhandlung einiger massen verknüpffet ist, so ist doch nöthig, hierüber dem Leser ein Genügen zu leisten.

Der erste Autor, welcher mit Fleiß von dem Flug der Canonen-Kugeln geschrieben, ist, so viel ich weiß, TARTALEA, ein berühmter Italiänischer Mathematicus, welcher sich durch Auflösung der Cubischen Aequationen, so gemeiniglich dem CARDANO[1]) zugeschrieben wird, einen unsterblichen Ruhm erworben. Dieser Autor hat erstlich in seiner *Scientia nova*, gedruckt in Venedig A. 1537, und hernach auch in seinen *Quesiti et Inventioni diverse*, eben daselbst A. 1546 gedruckt, mit vielem Fleiß einige Betrachtungen über die Beschaffenheit dieser Bewegungen ausgeführet. Und ob ihm gleich der damahlige unvollkommene Zustand der Mechanic sehr betrügliche Gründe um darauf zu bauen an die Hand gab, so war er doch nicht gäntzlich in seinen Untersuchungen unglücklich; denn er kann mit Recht für den ersten gehalten werden, welcher gefunden, daß der weiteste Schuß unter einem Winkel von 45 Graden mit dem Horizont hervor gebracht wird. Er hat auch dargethan (gegen die gemeine Meynung der Schützen), daß nicht der geringste Theil des Weges, welchen eine geschossene Kugel in der Luft beschreibt, eine grade Linie sey, ungeachtet die Krümmung in einigen Fällen nicht merklich

---

*) Man besehe seinen Tractat *De l'Attaque et la Défense des places.*[2])

**) Man besehe das Journal von seinen Belagerungen, welches zu Ende bey der letzten Ausgabe[3]) der *Mémoires* des General GOULONS beygedruckt worden.

---

1) HIERONIMO CARDANO (1501—1576). Die erste Auflösung der kubischen Gleichungen verdankt man dem italienischen Mathematiker SCIPIONE DAL FERRO (1460?—1526), 1496—1526 Professor an der Universität Bologna. F. R. S.

2) Siehe die Anmerkung 4 p. 23. F. R. S.

3) Damit ist wohl die Ausgabe von 1730 gemeint, die im Haag und in Paris erschienen ist. Siehe auch die Anmerkung 3 p. 23. F. R. S.

ist; denn er hat dieselbe mit der Oberfläche des Meers in Vergleichung gezogen, welche, ob sie gleich in einem geringen Theil betrachtet, vollkommen flach scheint, dennoch ausser allem Zweifel gegen das Mittel-Punct der Erde gekrümmt ist. Er eignet sich auch selbst die Erfindung des Artillerie-Quadranten zu, und hat öffters auf Schrauben gesetzte Muthmassungen über den Ausgang einiger noch nicht probirten Methoden, so ihm vorgelegt worden, gegeben. Weil er aber in der Ausübung der Artillerie nicht wohl bewandert war, sondern seine Meynungen auf die blosse Theorie gründete, so ist er fast von allen folgenden Scribenten immer angegriffen worden, jedoch öfters ohne von ihnen genennt zu werden, wovon viele Exempel in den Werken des BUSCA, COLLADO*), UFANO[1]), SIMIENOWICZ[2]) und andern angeführet werden könnten. Und als die Philosophie dieser Zeiten sich öffters in die hierüber entstandenen Fragen gemischet, so entstunden über diese Bewegung viele Streitigkeiten, absonderlich in Italien, welche biß auf die Zeiten des GALILEI fortdaureten, und allem Ansehen nach Anlaß zu seinen bekannten Gesprächen über die Bewegung[3]) gegeben haben, welche das erste mahl im Jahr 1638 an das Licht traten. Innerhalb dieser Zeit, und ehe die Lehre des GALILEI festgesetzet worden, kamen verschiedene Theorien über die Bewegung der Stück-Kugeln, und manche Tabellen über die Weite der Schüsse, in Ansehung

---

*) COLLADO eugnet im 63. Capitel, daß TARTALEA der erste Erfinder des Artillerie Quadranten sey, und will, daß DANIEL SANTBECH oder REGIOMONTANUS, (dann er confundiret dieselben) solchen schon viele Jahre vorher gehabt haben. Allein die Wahrheit zu bekennen, so ist des SANTBECHS Buch, woraus diese Muthmassung genommen (*Problematum Astronomicorum et Geometricorum sectiones septem*) erst A. 1561 herausgekommen, welches folglich lange nach TARTALEA geschehen ist. Zu diesem war auch dem SANTBECH die Methode, den Quadranten zu seinem vorgesetzten Zwecke einzurichten, ungeachtet er von den verschiedenen Elevationen der Stücke spricht, unbekannt.[4])

---

1) *Tratado dela Artilleria y uso della platicada por el capitan DIEGO UFANO en las Guerras de flandes*, Bruselas 1613. 3. Traktat p. 600. F. R. S.

2) *Artis magnae Artilleriae pars I. . Autore CASIMIRO SIMIENOWICZ*, Amstelodami 1650. F. R. S.

3) G. GALILEI (1564—1642), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica ed ai movimenti locali*, Leida 1638; *Le opere di GALILEO GALILEI*, Edizione nazionale vol. VIII, Firenze 1898. F. R. S.

4) Der Quadrant wird schon im 15. Jahrh. im Feuerwerksbuch des ABRAHAM VON MEMMINGEN erwähnt. Einen Geschützquadranten, der ein einigermaßen genaues Visieren ermöglichte, erfand nach M. JÄHNS l. c. p. 410 GEORG VON PEURBACH (1423—1461), Professor an der Universität zu Wien, der Lehrer REGIOMONTANS (1436—1476), im Jahre 1450. F. R. S.

der verschiedenen Elevationen, zum Vorschein, welche aber über die massen unrichtig waren, und mit der wahren Bewegung dieser Cörper keineswegs bestehen konnten; ungeachtet einige von diesen Arbeiten von solchen Leuten herkamen, welche den grösten Theil ihres Lebens in Ausübung der Artillerie zugebracht hatten. Dergleichen sind die Tabellen des Ufano, Galeus, Ulrich und anderer, welche vom Blondel*) angeführet werden[1]); welchen noch verschiedene andere, deren bey diesem Autore keine Meldung geschieht, beygefügt werden könnten. Es finden sich in der That unter den alten Scribenten, welche über diese Materie geschrieben, und deren Anzahl sehr groß ist, gar wenige, welche sich nicht mit ihren Speculationen über den Unterscheid zwischen der natürlichen, gewaltsamen und vermischten Bewegung, eingelassen, obgleich von denselben kaum zwey in Bestimmung dieser irrigen Begriffe überein kommen.[2])

Was uns aber am meisten befremdet, ist, daß bey diesen Streitigkeiten sich so wenig Leute, welche doch dazu Gelegenheit gehabt, haben angelegen seyn lassen, diese verschiedenen Theorien durch die Erfahrung zu untersuchen. Wie nun dieses auch mag zugegangen seyn, so kann ich mich nicht

---

*) Es ist zu mercken, daß die Meynung, welche Blondel in seiner *Art de jetter les Bombes* Cap. V. untersucht, ursprünglich nicht von Rivaltio, welchem er solche beymißt, herrühre, sondern von dem obgemeldeten Santbech, von welchem dieselbe der Rivaltius gestohlen. Man besehe Santbech Sect. 6.

---

1) Bondel führt keinen Ulrich an, wohl aber einen Daniel Elrich, Stückhauptmann zu Frankfurt a. M., der das p. 34 zitierte Buch des Simienowicz 1676 in deutscher Übersetzung herausgab. F. R. S.

2) Nach Ufano ergeben bei konstanter Ladung zwei Abgangswinkel, deren arithmetisches Mittel 45^0 beträgt, dieselbe und 45^0 selbst die größte Schußweite. Die Flugbahn setzt sich aus drei Teilen zusammen; der erste Teil (motus violentus) ist geradlinig, der zweite (motus mixtus) unter dem Einfluß der Triebkraft des Pulvers und der Schwere gekrümmt, und der dritte (motus naturalis) lotrecht abwärts gerichtet. Nach Blondel l. c. Chap. VII p. 35—38 vertritt David Rivault de Fleurance (Rivaltius) (1571—1616) in seinem Buche *Les éléments de l'artillerie*, Paris 1605, hinsichtlich der Form der Flugbahn die Anschauungen Ufanos, dagegen setzt er bei konstanter Ladung die Schußweite dem Cosinus des Abgangswinkels proportional. Das letztere tut auch Daniel Santbech (von Nymwegen) in seinem vom Verfasser p. 34 angeführten, 1561 in Basel erschienenen Buche und zwar in der Propositio CXIII: Ex quo fundamento sit extructum artificium eiaculandi sphaeras e tormentis p. 210—212; überdies bewegt sich nach seiner Meinung das Geschoß geradlinig, bis die Triebkraft der Ladung fast ganz erschöpft ist, weicht dann nur unerheblich von der Anfangsrichtung ab und fällt hierauf senkrecht zu Boden. F. R. S.

mehr als 4 Autorum erinnern, welche die Weite der Schüsse nach verschiedenen Elevationen würklich durch die Erfahrung bestimmet haben. Der erste von diesen ist COLLADO, welcher uns ein Verzeichnis der Weite der Schüsse eines dreypfündigen Falconets auf einen jeglichen Punct des Artillerie-Quadranten hinterlassen. Allein aus seinen Zahlen ist klar, daß bey diesem Stück nicht die gewöhnliche Ladung gebraucht worden*). Der nächstfolgende ist unser Landsmann BOURNE[1]), dessen Tractat im Jahr nach des COLLADO seinem gedruckt worden. Seine Elevationen waren nicht nach den Puncten des Artillerie-Quadranten, sondern nach den Graden genommen, und er bestimmt die Verhältniß der Schüsse nach verschiedenen Elevationen, ingleichen auch die Weite des Kern-Schusses**). Allein dieser Autor beschreibt nicht, mit was für einem Stücke er seine Versuche angestellet: es ist aber aus seinen Proportionen zu schliessen, daß dasselbe eines von den kleinesten müsse gewesen seyn. Es wäre zu wünschen, daß er diesen Umstand zugleich mit angeführet hätte: denn es wird im folgenden gezeiget werden, daß die Verhältnisse zwischen den verschiedenen Distanzen, auf welche ein Stück unter verschiedenen Elevationen trägt, nach der Geschwindigkeit, und der Grösse und Schwere der Kugel, sehr veränderlich ist. Die andern beyden, welche ich über diese Materie angetroffen, sind ELDRED und ANDERSON[2]),

---

*) Aus diesen Versuchen wurde festgestellt, daß sich die Weite des Kern-Schusses auf 268 Schritte erstreckte. Bey der Elevation auf den ersten Punct, (welches den 12ten Theil des Quadranten, oder $7\frac{1}{2}$ Grad beträgt,) reichte der Schuß auf 594 Schritt; bey dem zweiten Punct auf 794 Schritt, bey dem dritten auf 954, bey dem vierten auf 1010, bey dem fünften auf 1040, und bey dem sechsten auf 1053 Schritt. Die Weite des Schusses bey dem 7ten Punct wird zwischen derjenigen vom dritten und vierten; bey dem 8ten Punct zwischen dem andern und dritten; bey dem 9ten zwischen dem ersten und andern; bey dem 10ten zwischen dem Kern-Schuß, und dem Schuß des ersten Puncts; bey dem eilften fiel die Kugel nahe bey dem Stück wieder herab. Man besehe das 61te Capitel. Es ist auch zu merken, daß die hier gemeldeten Schritte keine geometrische, sondern gemeine gewesen, wie er im 42ten Capitel anzeigt.

**) Wenn die Weite des Kern-Schusses durch 1 ausgedruckt wird, so wird die Weite, so eine Elevation von 5 Graden hervor bringt, durch $2\frac{2}{3}$ ausgedruckt werden; bey einer Elevation von 10 Graden durch $3\frac{1}{3}$; bey 15 Graden durch $4\frac{1}{3}$; bey 20 Graden durch $4\frac{5}{6}$; und der weiteste Schuß, welcher bey der Elevation von 42^0 eintrift, wird seyn $5\frac{1}{2}$. Nachdem aber der Wind den Schuß entweder befördert oder verhindert, so kann der weiteste Schuß vom 45sten Grad bis zum 36sten variren. Man besehe seine *Art of Shooting in great Ordnaunce* im 7ten Capitel.

---

1) Siehe die zweite Anmerkung des Verfassers p. 30. F. R. S.

2) WILLIAM ELDRED lebte um 1646. ROBERT ANDERSON lebte in der zweiten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts. F. R. S.

beyde Engelländer: von welchen der letztere seine Experimenta aus allzugrosser Liebe zu seiner irrigen Theorie sehr merklich verfälschet hat, wovon ich nachgehends Gelegenheit haben werde ausführlicher zu sprechen. ELDRED aber verdienet ein weit besseres Lob.*) Seine Grundsätze sind einfältig genug, und ob dieselben gleich nicht nach aller Schärfe der Wahrheit gemäß sind, so kommen sie doch derselben unter gewissen Bedingungen ziemlich nahe. Er hat nur die Weite der Schüsse von unterschiedenen Arten Stücke bey kleinen Elevationen, welche alle unter 10 Grad sind, aufgezeichnet hinterlassen. Es befindet sich in seinem Buche eine sehr grosse Anzahl Experimente, welche mit besonderm Fleiße und grosser Behutsamkeit gemacht worden zu seyn scheinen: und er hat die Aufrichtigkeit gehabt, uns auch diejenigen nicht zu verschweigen, welche mit seiner Theorie nicht bestehen können. Ueberhaupt scheinet er sich weit mehr Mühe gegeben, und eine viel grössere Kenntniß von diesem Werke, als seine Mit-Brüder in dem practischen Theil der Artillerie gehabt zu haben. Denn diese hiengen insgesamt einer übelgegründeten Theorie allzu hartnäckig an, und hielten so fest über die angenommenen Gebräuche, daß sie auf die Erleuterung der Kunst durch eigene Experimente nicht dachten, und folglich nicht einmahl einsahen, daß dieselbe noch grosser Verbesserungen benöthiget wäre. Sonsten wäre es unmöglich gewesen, daß Sätze, welche so wenig mit der Erfahrung übereinstimmen, so lange Zeit hätten bestehen können, wovon die Lehre, welche nach des GALILEI Zeiten angenommen worden, ein merkwürdiges Exempel darlegt.

Die Gespräche des GALILEI über die Bewegung wurden, wie schon gemeldet, A. 1638 gedrucket, und hierinn hat er die allgemeinen Gesetze, welche die Natur in Hervorbringung und Veränderung der Bewegung beobachtet, ausfündig gemacht. Denn er war der erste, welcher die Würkungen der Schwehre auf die fallenden Cörper beschrieben[1]): und aus diesen Grundsätzen hat er hergeleitet, daß die Linie, welche eine Canonen-Kugel in ihrem Flug beschreibet, eine Parabel seyn müsse, in so ferne dieselbe nicht durch den

*) Sein Buch führt den Titul: *The Gunners Glasse,* und die Experimente, worauf er sich gründet, sind meistentheils zu Dover Castle, allwo er viele Jahre Büchsenmeister gewesen, gemacht worden. Das früheste Datum von seinen Experimenten findet sich vom Jahr 1611, ungeachtet sein Buch erst A. 1646 herausgekommen.

1) G. GALILEI, *Discorsi* (siehe die Anmerkung 3 p. 34), Giornata quarta, p. 237—250; *Le Opere di GALILEO GALILEI*, Edizione nazionale, vol. VIII, p. 269—279. F. R. S.

Wiederstand der Luft von dieser Bahn abgeleitet würde. Er hat auch Mittel vorgeschlagen, um die Veränderungen, so von diesem Wiederstand entstehen, zu bestimmen: indem er eine Methode beschreibt, wodurch man die Würkungen, welche die Luft in der Bewegung einer Canonen-Kugel in einer jeglichen Distanz von dem Stücke hervor bringt, bestimmen könnte.

Da nun solchergestalt GALILEUS gewiesen, daß alle geworfene Körper, in so ferne dieselben von der Luft nicht gehindert werden, eine Parabel beschreiben, so hätte man vermuthen sollen, daß diejenigen, welche nach ihm gekommen, sich alle Mühe gegeben haben würden, die Veränderungen, so aus dem Wiederstand der Luft entstehen, zu untersuchen, oder zum wenigsten fest zu setzen, ob man in dieser Wissenschaft nöthig habe, auf diesen Umstand zu sehen oder nicht. Allein, an statt hierinne alle Behutsamkeit zu gebrauchen, so haben die nachfolgenden Scribenten gantz verwegen, und ohne die Erfahrung darüber zu Rathe zu ziehen, behauptet, daß der Wiederstand der Luft keine merkliche Veränderung in dem Flug einer Stückkugel verursachen könne; und in diesem irrigen Wahn haben sie sich selbst zu bestärken gesucht durch die grosse Dünne, welche in Ansehung der übrigen dichten Körper an der Luft wahrgenommen wird. Da nun diese ungegründete Meynung immer beybehalten und beständig wiederholet worden, so hat man dieselbe so gar als einen Grund-Satz, welcher keinen ferneren Beweisthum bedürfte, angenommen, und durchgehends behauptet, daß die Bewegung dieser Körper ziemlich genau nach einer Parabel geschähe.

Denn in dem Jahr 1674 publicirte unser Landsmann ANDERSON einen Tractat, genannt: *The genuine use and effects of the Gun* [1]), worinne er nach den Grundsätzen des GALILEI zu Werke geht, und beständig behauptet, daß der Flug aller Canonen-Kugeln in einer Parabel geschehe: und bemühet sich zugleich allen Einwürfen, so dagegen gemacht werden könnten, zu begegnen.

Im Jahr 1683 gab Mr. BLONDEL *l'Art de jetter les Bombes* zu Paris heraus, allwo gleichfalls die Lehre des GALILEI auf die Bewegung der Stückkugeln von allen Arten gezogen, und die Veränderungen, welche der Wiederstand der Luft verursachet, ins besondere betrachtet worden: nach einer weitläuftigen Untersuchung aber macht dieser Autor auch den Schluß, daß die Würkungen der Luft so geringe seyn, daß dadurch die Richtigkeit seiner

---

1) Der Tractat erschien in London. F. R. S.

Schlüße keinen merklichen Abbruch litte.*) Gleichergestalt findet sich auch eben diese Materie in unsern Philosophical Transactions abgehandelt**) durch Dr. HALLEY[1]), welcher in Erwegung des grossen Unterscheids, so sich zwischen der Schwehre der Stückkugeln und der Luft befindet, für sehr wahrscheinlich hält, daß der Gegenstand der Luft bey schweren Canonen-Kugeln kaum merklich seyn könne: ungeachtet er zugibt, daß die Würkung derselben bey kleinen und leichten Körpern nicht aus der Acht gelassen werden könne.

Da also diese Meynung über den geringen und nicht merklichen Wiederstand der Luft in Schwang gekommen; vom GALILEO aber erwiesen worden, daß alle geworfene Körper, wann der Wiederstand der Luft gehoben würde, sich in einer Parabel bewegen müsten, so ist insgemein bey allen Schrifftstellern der Artillerie als ein Grundsatz angenommen worden, daß der Weg, welchen eine Canonen-Kugel in der Luft beschreibt, nicht merklich von der Parabel abweiche. Man darf, um hiervon überführet zu werden, nur alle diejenigen Autores, welche seit 40 Jahren über diese Materie geschrieben, nachsehen.

Ob nun gleich diese Meynung denjenigen, welche sich nur mit Speculationen aufhalten, herrlich zu statten kommt: so hat doch schon ANDERSON durch eine grosse Menge angestellter Versuche gefunden, daß dieselbe ohne einige neue Einschränkungen mit der Wahrheit nicht bestehen könne. Denn ob gleich aus seinen Schriften nicht erhellet, daß er jemahls die Verhältniß der Schußweiten von Canonen oder Mußketen, wenn dieselben mit der gewöhnlichen Ladung loß geschossen werden, untersuchet, so ist er doch durch die Experimenten, welche er nur mit kleinen Ladungen angestellt, wodurch die Kugeln mit einer weit kleinern Geschwindigkeit fortgetrieben werden, überführet worden, daß die gantze Bahn derselben nicht als eine Parabel angesehen werden könne, wie aus seinem Tractat, *To hit a Mark,* so A. 1690[2])

*) Man besehe pag. 345 von der ersten Edition in Quarto[3]), ingleichen auch pag. 355 und die folgenden.

**) Man sehe in No. 216 pag. 68.

1) E. HALLEY (1656—1742). Die Fußnote des Verfassers bezieht sich auf die Abhandlung: *A proposition of general use in the art of gunnery, shewing the rule of laying a mortar to pass, in order to strike any object above or below the horizont.* By E. HALLEY. Philosophical Transactions (London) **19** (1695—1697), 1698 p. 68. F. R. S.

2) Der Tractat erschien in London. F. R. S.

3) Erschienen in Amsterdam 1699. F. R. S.

gedruckt ist, ersehen werden kann. An statt aber hieraus die wahren Schlüsse zu ziehen, und die Größe dieses so merklichen Wiederstandes der Luft zu bestimmen, so hat er vielmehr aus einer allzugrossen Neigung zu seinen schon gefaßten Meynungen lieber eine neue Hypothesin geschmiedet, welche darinne bestand, daß eine jegliche Kugel im ersten Anfang ihrer Bewegung biß auf eine gewisse Distantz nach einer geraden Linie fortgehe, und bey dem Ende derselben erst anfange in einer Parabel fortzulauffen. Er meynet auch, daß diese gerade Linie, welche er die Linie der Gewalt des Feuers nennt, bey allen verschiedenen Richtungen der Canonen gleich groß sey. Durch diese Hypothesin, ob dieselbe gleich auf keinerley Art bestätiget werden kann, war er doch im Stande, alle Abweichungen der Schüsse von der gemeinen Meynung zu erklären, so stark dieselben auch immer dagegen stritten, indem er seine gerade Linie nach Belieben annehmen konnte. Dem ungeachtet scheinet es, daß diese neu ausgefundene Meynung mit den von ihm nachgehends angestellten Versuchen nicht weiter bestehen konnte. Denn er konnte es nimmer so weit bringen, daß er die Schußweiten von drey verschiedenen Elevationen mit dieser seiner Hypothesi hätte vergleichen können, ob ihm gleich solches bey zweyen glücklich gelungen. Da nun dergleichen merkliche Abweichungen von dem Wiederstand der Luft bey Bomben oder Kugeln, welche nur durch eine geringe Ladung geschossen worden, herrührten, wie groß muß die Würkung der Luft nicht alsdenn seyn, wenn man sich einer völligen Ladung bedienet? Denn da in diesem Fall die Kugel einen drey biß viermal grösseren Grad der Geschwindigkeit bekommt, als in dem vorigen, so muß die Resistentz der Luft, wie im folgenden gewiesen werden soll, bey nahe funfzig mahl grösser, und allso sehr merklich werden.

Daß die Resistentz der Luft, welche doch eine grosse Gewalt auf alle schnell bewegte Cörper ausübet, von den practischen Artilleristen gantz und gar aus der Acht gelassen wird, solches ist nicht der einzige Anmerkungswürdige Umstand in dieser Untersuchung. Denn, nachdem des grossen Newtons *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* heraus gekommen[1]), so hätten allem Vermuthen nach alle Mathematici von dieser beträchtlichen Würkung der Luft völlig überzeugt werden sollen, indem in diesem verewigten Werke die Gesetze und die wahre Grösse dieser Resistenz für langsame

1) I. Newton (1643—1727). Die *Philosophiae naturalis principia mathematica* (so lautet der Titel) erschienen 1687 in London. Eine dritte, noch von Newton selbst besorgte und als „aucta et emendata“ bezeichnete Ausgabe wurde ebendaselbst 1726 veröffentlicht. F. R. S.

Bewegungen bestimmet und durch viele Experimente bestätiget worden. Eben diese Gesetze, wenn dieselben auf sehr schnelle Bewegungen bezogen werden, geben zwar die Resistenz viel zu geringe an, als aus der würklichen Erfahrung abgenommen werden kann, und NEWTON selbst hat schon diese Abweichung bemerkt*); allein eben hieraus erhellet, daß die Würkung der Luft auf die Stückkugeln um so viel weniger aus der Acht gelassen werden könne. Dieser augenscheinlichen Probe von der Nothwendigkeit, die Lufft bey der Bewegung der Stückkugeln mit in Betrachtung zu ziehen, ungeachtet aber habe ich bißher nur ein einiges Exempel angetroffen, worinne dergleichen Bewegungen nach den Grundsätzen des NEWTONS berechnet worden sind.**)

Wenn wir nun alles zusammen nehmen, was über diese Materie beygebracht worden, so erhellet ganz deutlich, daß sich die heutigen Scribenten über die Artillerie sehr gröblich betrogen haben, wenn sie geglaubt, daß die Resistenz der Luft nicht verdiene, in Betrachtung gezogen zu werden, und dahero behauptet haben, daß der Weg, welchen die Bomben und Stückkugeln in der Luft beschreiben, von einer wahren Parabel nicht merklich unterschieden sey. Hieraus folget also unstreitig, daß alle bißher gemachten Bestimmungen über den Flug der Stückkugeln, welchen ein sehr hoher Grad der Geschwindigkeit eingedrucket worden, von der Wahrheit sehr stark abweichen, und daß folglich die gegenwärtige Theorie der Artillerie in diesem sehr wichtigen Punct gänzlich unbrauchbar und falsch sey.

Um nun einiger massen diesen Unvollkommenheiten abzuhelfen, so haben wir uns im zweyten Capitel der folgenden Abhandlung bemühet, nicht allein dasjenige, was hier in Ansehung der Unrichtigkeit der parabolischen Bewegung ist angeführet worden, auf das gründlichste zu beweisen, sondern auch zugleich die würkliche Grösse der Resistenz, welche eine Stückkugel in einem jeglichen Grad der Geschwindigkeit leidet, richtig zu bestimmen. Denn da aus den im ersten Capitel festgesetzten Gründen die Geschwindigkeit einer

*) *Phil. Nat. Princ. Math.* p. 351.

**) In Comment. Acad. Petrop. Tom. 2, p. 338, 339.[1])

1) Es handelt sich um die Abhandlung von D. BERNOULLI *De actione fluidorum in corpora solida et motu solidorum in fluidis*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 304, deren Pars quarta (p. 329—342) unter dem Titel *De motu corporum sursum proiectorum, ubi ad calculum revocantur experimenta ab Excellentiss. Dno GÜNTHERO cum tormentis instituta,* den hier vorliegenden ballistischen Aufgaben gewidmet ist. F. R. S.

Kugel, mit welcher dieselbe aus dem Stück würklich heraus fährt, leicht bestimmet werden kann: so wird die Beschreibung des Weges, den die Kugel in der Luft nimmt, in ein geometrisches Problema verwandelt, welches zwar in seiner gänzlichen Ausdehnung eine sehr verwirrte und mühsame Rechnung erfordert; allein in den Fällen, welche in der Praxi öffters vorkommen, können einige gewisse leichte Approximationen angebracht werden, welche genugsam hinreichend sind, die verschiedenen Schußweiten aus der Theorie ziemlich genau zu bestimmen.

Ob aber gleich diejenigen, welche die folgende Abhandlung mit Aufmerksamkeit durchlesen, keinen Zweifel über die Gewißheit von den daraus gezogenen Bestimmungen übrig behalten werden, so möchte man doch erwartet haben, daß man die Accuratesse dieser Gründe noch weit sicherer durch Experimente über die würklichen Schußweiten von verschiedenen Stücken, und durch derselben Vergleichung mit den Rechnungen der Theorie hätte fest setzen können. Und in der That hatte ich einmahl den Vorsatz gefasset, ein Capitel über diese Materie beyzufügen, es haben mich aber zwey Ursachen hievon abgehalten. Die erste bestund in der grossen Schwierigkeit, sich von den wahren Distantzen, so weit ein Stück in verschiedenen Richtungen treibt, zu versichern, welche Schwierigkeit niemand so leicht, als wer würklich Proben von dieser Art angestellt, einsehen wird. Die andere Ursache war eine gewisse Irregularität, welche sich bey diesen Distantzen einfand, und alle meine Bemühungen fruchtloß machte. Denn eben dasselbe Stück schiesset öfters unter einerley Ladung die Kugel auf sehr verschiedene Distantzen, dergestalt, daß selten zwey unter einerley Umständen gemachte Versuche mit einander überein stimmen, wie ich ausführlicher in der 7ten Proposition des zweyten Capitels anmerken werde.

Ungeachtet aber dieser Schwierigkeiten, welche mich verhindert haben, dem folgenden Tractat solche Experimenta über die Weite der Schüsse beyzufügen, wodurch die Theorie der Resistenz mehr befestiget werden könnte: so habe ich mich doch entschlossen, diese Materie abzuhandeln, und ich schmeichle mir einen Weg gefunden zu haben, um den obgedachten Ungleichheiten vorzubeugen. Denn so lange diese Hindernisse nicht aus dem Wege gehoben werden, so ist klar, daß man sich aus allen Experimenten von dieser Art nicht viel Nutzen versprechen könne. Ich behalte mir aber den Ausgang meiner künftigen Versuche über diesen Articul zu einem zweyten Theil dieser Abhandlung vor, worinne ich ausser diesen über den Flug der Stückkugeln angestellten Experimenten, und derselben Vergleichung mit den auf

geometrische Art bewiesenen Bestimmungen, mir vorgesetzt habe, noch viele andere Experimente anzuführen; welche, ob sie gleich von einer vermischten Natur sind, dennoch sowohl mit der Theorie, als mit der Praxi der Artillerie, in einer genauen Verbindung stehen. Diesem zweyten Theil werde ich auch verschiedene Nachrichten und practische Regeln beyfügen, welche aus den vorher festgesetzten Grundsätzen fliessen, und verhoffentlich bey künftiger Ausübung der Artillerie von nicht geringem Nutzen seyn werden. Es liegt von diesem zweyten Theil schon eine ziemliche Partie bey mir würklich fertig, nebst einem guten Vorrath, um dasselbe gänzlich zu vollenden. Diejenigen Experimenten aber, welche mir noch fehlen, erfordern lange Zeit, und eine bequeme Gelegenheit ins Werk zu richten.

Da die folgenden Blätter ausser der Bestimmung des Wiederstands der Luft, auch zugleich eine Theorie von der Kraft und Würkung des Pulvers in sich enthalten, so wird man von mir auch eine Erzehlung von demjenigen, was andere Autores bißher davon geschrieben haben, erwarten. Allein, alles dasjenige, was mir bisher darüber vorgekommen, ist so unbestimmt und undeutlich, daß es öfters sehr schwehr ist, die Meynung der Autoren nur zu verstehen. Die verständlichste Hypothesis hierüber, und welche auch scheint der Grund zu seyn von allem, was andere davon gesagt haben, ist diejenige, welche DE LA HIRE gegeben.

In der Historie der Französischen Academie A. 1702 hat Mr. DE LA HIRE[1]) supponirt, daß die Kraft des Pulvers von der vermehrten Elasticität der Luft herrühre, welche in demselben und zwischen den Körnern befindlich ist, und durch die Hitze des Feuers im Loßbrennen erreget werde. Wenn nun die Luft in den Körnern selbst sowohl als zwischen denselben vor der Abfeuerung in ihrem natürlichen Ausdehnungs-Stande befindlich wäre, so könnte keine grössere Kraft hervor kommen, als welche von der Flamme verursachet würde. Diese Ausdehnungs-Krafft ist aber aufs höchste fünfmahl grösser, als diejenige, womit die Luft in ihrem natürlichen Zustande begabet ist, wie im folgenden mit mehrerm dargethan wird*), und folglich würde dieselbe nicht einmahl hinlänglich seyn, den zweyhundertsten Theil der Gewalt, welche das Pulver würklich ausübet, hervor zu bringen.

*) Man besehe die Vte Prop. des ersten Capitels in der folgenden Abhandlung.

1) G. PH. DE LA HIRE (1677—1719), *Sur les effets du ressort de l'air dans la poudre à canon et dans le tonnerre.* Histoire de l'acad. roy. des sciences (1702), Paris 1704, p. 9.
F. R. S.

Inzwischen hat doch diese Erklärung zu verschiedenen Dissertationen und Abhandlungen bey einer benachbarten Nation Anlaß gegeben: und insbesondere sieht ein gewisser Autor[1]) seine Forderung sehr billig an, wann er supponirt, daß die Ausdehnungskraft der Luft, wenn dieselbe durch die Loßbrennung des Pulvers erhitzet wird, hundert mahl grösser sey, als in der Hitze des siedenden Wassers. Weil ich aber glaube, die Unmöglichkeit dieser Lehre, um die Gewalt des Pulvers zu erklären, genugsam erwiesen zu haben, so will ich die Leser mit einer weitläuftigern Erzehlung der Meynungen über diesen Punct nicht länger aufhalten: insonderheit weil ich mir mit der Hofnung schmeichle, daß die Theorie der Gewalt des Pulvers, welche in den folgenden Blättern festgesetzt wird, durch solche Experimente unwiedersprechlich bekräftiget worden, daß eine förmliche Wiederlegung anderer Meynungen unnöthig seyn würde.

1) Gemeint ist wohl Joh. Bernoulli. Siehe Eulers Anmerkungen p. 47. F. R. S.

ANMERKUNGEN DES UEBERSETZERS

Was unser Autor hier von dem Ursprung und der Erweiterung sowohl der Artillerie, als der Fortification, erzehlet, zeiget eine ungemeine Belesenheit und Kenntniß aller alten Autoren, welche von diesen Wissenschaften geschrieben haben, an. Diese Nachrichten, welche absonderlich die Praxin betreffen, scheinen auch so gründlich und der Wahrheit gemäß zu seyn, daß man darüber den geringsten Zweifel zu hegen keine Ursach findet. Indessen scheinen doch dem Verfasser verschiedene Bücher von der Theorie der Artillerie unbekannt gewesen zu seyn, worinnen schon eine weit gründlichere Nachricht von der Bewegung der Stück-Kugeln und der Gewalt des Pulvers gegeben wird, als er anführet: oder derselbe müßte solche mit allem Fleiß mit Stillschweigen übergangen haben, um die Wichtigkeit seiner eigenen Erfindungen desto mehr zu erheben. Denn aus demjenigen, was er anführet, sollte man fast schliessen, daß man vor ihm sowohl von der Bewegung der Stück-Kugeln, als von der Gewalt des Pulvers, sehr wenig zuverläßiges gewust hätte, indem von denjenigen, welche darüber sehr schöne Entdeckungen gemacht haben, nicht die geringste Nachricht ertheilet wird, da derselbe doch in den übrigen Stücken alle Autores, welche davon etwas merkwürdiges herausgegeben, so sorgfältig anführet.

Was nun erstlich die Bewegung der Canonen-Kugeln in der Luft anlanget, so haben die Theoretici schon längst erkannt, daß die Linie, welche eine solche Kugel in der Luft beschreibt, sehr merklich von einer Parabel unterschieden sey. Von was für einer Natur aber diese krumme Linie sey, konnte wegen der grossen Schwierigkeit der Rechnungen, welche diese Untersuchung erfordert, nicht so leicht bestimmt werden. HUGENIUS[1]) hatte zwar schon bewiesen, daß wenn die Resistenz der Luft der Geschwindigkeit der

---

1) CHR. HUYGENS (1629—1695), *Traité de la Lumière avec un Discours de la Cause de la Pesanteur,* Leide 1690, p. 169; *Dissertatio de causa gravitatis*, CHR. HUGENII *Opera reliqua,* Amstelodami 1728, vol. I, p. 93. F. R. S.

darinne bewegten Cörper proportional wäre, diese krumme Linie eine Art der logarithmica seyn müsse; NEWTON aber hat sehr deutlich dargethan, daß diese Resistenz der Luft nicht den Geschwindigkeiten selbst, sondern ihren Quadratis proportional sey, und hat sich alle Mühe gegeben, die Natur der krummen Linie, welche ein Cörper, so einer solchen Resistenz ausgesetzt ist, beschreibet, ausfündig zu machen. Dem ungeachtet konnte derselbe doch nicht seinen Endzweck erreichen, sondern mußte sich mit Approximationen begnügen, wie aus den *Principiis Math. Phil. Natur.* genugsam erhellet.[1]) Diese Frage wurde auch A. 1718 dem berühmten Hrn. Professor JOH. BERNOULLI in Basel von dem Engelländer KEILL[2]) aufgegeben, als ein solcher Knoten, über dessen Auflösung sich die Engelländer bißher umsonst bemühet hatten. Als nun gedachter Herr BERNOULLI sogleich dieses Problema aufgelöset[3]), und zwar in einem viel weitern Sinn, als solches vorgelegt worden, so kam auch eine Solution in des Hrn. HERMANNS *Phoronomie*[4]) zu gleicher Zeit zum Vorschein, und der scharfsinnige Engelländer TAYLOR[5]) machte gleichfalls eine Solution bekannt.[6]) Ob nun gleich der Hr. ROBINS gefunden, daß die Resistenz der Luft bey sehr schnellen Bewegungen grösser ist, als man geglaubet, so ist doch auch für diesen Fall die Auflösung in der Methode enthalten, daß man also dieselbe nicht als eine bisher unbekannt gewesene Sache ansehen kann; ungeachtet man gestehen muß, daß sich bisher noch kein Mathematicus sonderliche Mühe gegeben, dieselbe zum Vortheil der practischen Artillerie anzuwenden.

Daß aber die Resistenz der Luft auf schnelle Bewegungen, dergleichen die Stück-Kugeln haben, eine sehr merkliche Würkung habe, hat der berühmte

---

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Editio tertia, Londini 1726, p. 259—264. F. R. S.

2) J. KEILL (1671—1721), Professor der Physik und hernach der Astronomie zu Oxford. F. R. S.

3) JOH. BERNOULLI, *Responsio ad nonneminis provocationem eiusque solutio quaestionis ipsi ab eodem propositae de invenienda linea curva, quam describit proiectile in medio resistente*, Acta eruditorum, Lipsiae 1719, p. 216; *Opera omnia*, Lausannae et Genevae 1742, t. II, p. 393—399. F. R. S.

4) JAC. HERMANN (1678—1733), *Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo,* Amstelaedami 1716. F. R. S.

5) B. TAYLOR (1685—1731), *Propositiones aliquot de Projectilium motu Parabolico, Scriptae An. 1710,* Philosophical Transactions (London) **31** (1721), 1723, p. 151. Dieser Aufsatz bezieht sich aber nur auf die Wurfbewegung im luftleeren Raum. F. R. S.

6) Siehe zu diesen Darlegungen auch EULERS *Mechanica*, t. I § 883; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 1, p. 318. F. R. S.

Hr. Prof. Daniel Bernoulli im 2ten Tomo Comment. Acad. Petrop.[1]), welche Stelle so gar der Hr. Robins in einer andern Absicht anführet, auf das deutlichste aus vielen Experimenten erwiesen; indem er zum Exempel pag. 338 zeiget, daß eine Stück-Kugel, welche in der Luft nur auf eine Höhe von 7819 Schue gestiegen, in einen Luftleeren Raum 58750 Schuh hoch hätte steigen müssen, von welcher merkwürdigen Anmerkung unser Autor nicht die geringste Meldung thut.

Eine gleiche Bewandniß hat es auch mit der Erklärung der Gewalt des Pulvers, wovon unser Autor keine andere anführet, als welche de La Hire A. 1702 gegeben, und in der That keine tiefe Einsicht in die Natur-Wissenschaft zu erkennen giebt; dahero man auf die Gedanken gerathen sollte, als wenn niemand anders in diesem Stücke glücklicher gewesen wäre. Daß sich aber die Luft in dem Schieß-Pulver nicht in ihrem natürlichen Zustande, sondern sehr stark zusammen gedruckt befinde, hat schon der vorgemeldte Hr. Joh. Bernoulli A. 1690 in seiner *Dissertatio de effervescentia et fermentatione*[2]) sehr klar bewiesen. Denn derselbe hat aus einigen über die Loßbrennung des Pulvers angestellten Experimenten den richtigen Schluß gezogen, daß die in dem Pulver befindliche Luft zum wenigsten hundert mahl mehr zusammen gedruckt seyn müsse, als solche natürlicher Weise zu seyn pflegt. Es kan zwar seyn, daß diese Dissertation dem Hrn. Robins niemahlen zu Gesicht gekommen; allein es ist nicht wahrscheinlich, daß derselbe des Papini[3]) Experiment, als welches in die Philosophical Transactions[4]) eingerücket ist, nicht gesehen haben sollte, worinne gleichfalls gewiesen wird, daß in dem Salpeter würcklich eine sehr elastische flüßige Materie enthalten sey, von welcher die Gewalt des Pulvers herrühre; und daß in 6 granen Pulver zum wenigsten 1 gran pure Luft, welche so sehr zusammen gepreßt, enthalten sey. In den Supplementi al Giornale de letterati d'Italia Tom. I. n. 8 hat auch ein Gelehrter, Nahmens Brachus[5]), Experimente über die Gewalt des Pulvers angestellt, und daraus geschlossen, daß die im Pulver enthaltene Luft 450 mahl dichter sey, als die natürliche.

---

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 41. F. R. S.

2) Joh. Bernoulli, *Opera omnia*, Lausannae et Genevae 1742, t. I, p. 7—40. F. R. S.

3) Denis Papin (1647—1712), französischer Physiker und Erbauer des ersten Dampfschiffes (1707). F. R. S.

4) Philosophical Transactions (London) **10**, 1675, p. 546—548. F. R. S.

5) Jacopo Brachi, *Saggio sopra l'aria nel polve d'arcobugio e la sua compressione,* Suppl. al Giorn. de letter. d'Italia, Tom. I n. 8, Venezia 1723. F. R. S.

Der Hr. Prof. Daniel Bernoulli hat auch diese Materie in seinem unvergleichlichen Werk von der Hydrodynamic[1]), so A. 1738 zu Straßburg gedruckt ist, sehr ausführlich abgehandelt, in der 10ten Section, allwo er aus einigen Experimenten behauptet, daß die Elasticität der im Pulver enthaltenen Luft mehr als 10000 mahl grösser sey, als der natürlichen. Wenn also die Elasticität der Luft in eben der Proportion mit der Zusammendruckung zunähme, so müßte auch die Luft im Pulver 10000 mahl dichter, als die gewöhnliche Luft, womit wir umgeben sind, und folglich das Pulver mehr als 10000 mahl schwerer seyn, als die ordentliche Luft. Da nun das Wasser nur ungefehr 1000 mahl schwehrer ist, als die Luft, die Schwehre des Pulvers aber nicht viel vom Wasser verschieden ist, so sieht man wohl, daß diese Hypothesis unmöglich bestehen kann, wann auch gleich das Pulver nichts anders wäre, als eine zusammen gepreßte Luft. Dahero glaubet obgemeldter Autor, daß die Regel, krafft welcher die Elasticität der Luft ihrer Dichte proportional seyn soll, bey sehr starken Zusammendrückungen nicht mehr Platz habe, und daß vielleicht die natürliche Luft, wann dieselbe zum Exempel nur in einen tausend mahl kleinern Raum zusammen gedruckt wird, schon eine 10000 mahl grössere Elasticität erlange: welche Meynung mit der angenommenen Lehre von der Beschaffenheit der Luft sehr wohl bestehen kann. Da aber der Herr Bernoulli diese Folgen aus der Resistenz der Luft hergeleitet, und dieselbe beständig den Quadraten der Geschwindigkeit proportional setzt; unser Autor aber die Resistenz bey sehr schnellen Bewegungen weit grösser befunden hat: so werden diese Folgen einer Correction nöthig haben, wodurch man vielleicht die Elasticität der im Pulver enthaltenen Luft nicht mehr so erstaunlich groß anzunehmen genöthiget seyn wird. Welcher Umstand in den folgenden Anmerkungen mit grösserm Fleiß untersuchet werden soll.

---

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 6. F. R. S.

ERSTES CAPITEL

VON DER GEWALT DES SCHIESS-PULVERS

ERSTER SATZ

Wenn Schieß-Pulver sowohl in der Luft, als in einem Luft-leeren Raum, angezündet wird, so wird durch die Entzündung eine beständige, flüssige und mit einer Ausdehnungskraft versehene Materie hervorgebracht.

Wenn man ein feuriges Eisen unter einen Recipienten setzt, die Luft vermittelst einer Luftpumpe rein auspumpet, und alsdenn einige Pulverkörner auf das glüende Eisen fallen lässt: so wird das Pulver Feuer fangen, und der Mercurius in dem damit befestigten Indice Mercuriali plötzlich herunter sinken. Gleich darauf wird derselbe zwar wiederum herauf steigen, seine vorige Höhe aber nimmer wiederum erreichen, sondern beständig um so viel tieffer stehen bleiben, je mehr man Pulver im Recipienten angezündet hat. Dieses ist ein sehr bekanntes Experiment, und findet sich nach allen Umständen beschrieben in den Philosophical Transactions No. 295 von Mr. HAUKSBEE, an welchem Ort er meldet, daß, nachdem er eine geringe Quantität Pulver auf diese Art angezündet, der Mercurius in dem Indice mercuriali, welcher vor der Loßbrennung $29\frac{1}{2}$ Zoll hoch gestanden, darauf biß auf $12\frac{3}{4}$ Zoll herunter gefallen.[1]) Dieses

1) Diese Beschreibung findet man in den beiden Abhandlungen von FRANCIS HAUKSBEE (gest. um 1713): VI. *An Experiment made at a meeting of the Royal Society Dec. 20. 1704 of firing gun-powder on a red hot iron in vacuo Boyliano.* VII. *An account of an experiment made Decemb. the 26th 1704. To try the quality of air, produced from gun powder, fir'd in vacuo Boyliano.* Philosophical Transactions (London) 24 (1704/1705), 1706, p. 1806—1807. F. R. S.

Experiment beweiset also unstreitig, daß durch die Loßbrennung des Pulvers in dem Recipienten eine subtile elastische Materie hervorgebracht worden, durch deren Ausdehnungskraft das Quecksilber so tief herabgedruckt worden, und daß folglich unser Satz, in Ansehung des Luft-leeren Raums, der Wahrheit gemäß ist. Daß aber diese hervorgebrachte flüßige Materie auch fortdaurend gewesen, erhellet aus demjenigen, was Mr. HAUKSBEE an eben dem Ort noch beyfüget, daß ungeachtet das Quecksilber nach der Hand wiederum gestiegen, dasselbe doch den folgenden Tag nicht höher als $22\frac{1}{2}$ Zoll gestanden, und auch nachgehends diese Höhe unverändert behalten habe. Daß hernach diese flüßige Materie elastisch, oder mit einer Ausdehnungs-Kraft versehen gewesen, beweiset der niedrige Stand des Indicis mercurialis zur Gnüge; indem dieselbe durch ihre natürliche Schwehre allein keine merkliche Würkung hätte hervor bringen können. Dieses erhellet auch daraus, daß sich diese Materie durch den gantzen Recipienten ausgebreitet, welches ohne die Elasticität nicht hätte geschehen können; und geht dieses Experiment gleicher Weise von statten, der Recipient mag groß oder klein seyn. Inzwischen ist aber der Fall des Mercurii um so viel geringer, je grösser der Recipient genommen wird, wann man nehmlich einerley Quantität Pulver behält: woraus folget, daß diese flüssige Materie, je weiter sich dieselbe ausdehnen kan, eine um so viel kleinere Elasticität behalte, und folglich mit der Luft in diesem Stück überein komme.

Eben diese flüßige und elastische Materie wird hervorgebracht, wenn das Pulver in der Luft angezündet wird.*) Denn, wann man eine kleine Quantität Pulver in den obern Theil einer Glaßröhre legt, das untere Theil der Röhre aber ins Wasser taucht, so tief, daß nur ein geringer Theil derselben worinne das Pulver befindlich, ausser dem Wasser zu stehen komme, und alsdann die Röhre an dem obern Ende fest zuschliesset, daß dadurch alle Communication mit der äussern Luft gehoben wird, hernach aber das Pulver vermittelst eines Brennglases in der Röhre anzündet: so wird das Wasser plötzlich wie das Quecksilber bey dem vorigen Experiment zurück treten, und darinne beständig tiefer stehen bleiben, als vor der Entzündung des Pulvers. Dieser Unterscheid wird auch um so viel grösser seyn, je mehr

*) Man besehe HAUKSBEES *Phys. Mechan. Exper.*[1]) pag. 81.

1) FR. HAUKSBEE, *Physico-mechanical experiments on various subjects touching light and electricity*, London 1709. F. R. S.

Pulver angezündet wird, und je enger die Röhre ist. Hieraus wird also auch der andere Fall unsers Satzes ausser Zweifel gesetzt, daß die Loßbrennung des Pulvers auch in der Luft eine fortdaurende elastische flüßige Materie hervor bringe.

ZUSATZ

Man hat schon seit der Zeit des berühmten Boyle[1]) wahrgenommen, daß viele Materien durch die Gährung, und andere chymische Operationen, ein fluidum elasticum, welches in vielen Stücken der natürlichen Luft sehr ähnlich kommt, hervorbringen. Man hat auch gleicher Weise befunden, daß andere Vermischungen in verschiedenen Umständen einen Theil der umliegenden Luft in sich schlucken und gleichsam verzehren. Insonderheit aber hat man beobachtet, daß alle verbrennliche Cörper, und alle schweflichte Dämpfe, einen grossen Theil der Luft zerstören, und solche entweder in sich verschlingen, oder zum wenigsten ihrer Elasticität berauben. Diese Hervorbringung und Verzehrung der Luft in chymischen Processen ist neulich sehr gründlich und glücklich von dem Hrn. Hales in seiner *Vegetable Statics*[2]) untersuchet worden. Aus diesen Gründen folget nun, daß in dem letztern Experiment der schweflichte Rauch, welcher bey Entzündung des Pulvers entstehet, etwas von der in der Röhre zurück gelassenen Luft verzehren müsse. Dahero ist nöthig, daß man bey diesem Experiment so wenig Luft in der Röhre zurück lasse, als möglich ist, damit die Richtigkeit des Experiments durch die verschluckte Luft, wann dieselbe der hervorgebrachten elastischen Materie beynahe gleich käme, nicht unterbrochen werde.

Hierzu kommt noch ein anderer Umstand, weswegen es rathsam ist, in dem letztern Experiment sehr wenig Luft in der Röhre zu lassen. Dieser ist die Würkung des Feuers, als wodurch die Elasticität der zurückgebliebenen Luft sehr starck vermehret wird; welcher folglich nebst der neu hervorgebrachten elastischen Materie die Röhre nicht wiederstehen, sondern zerspringen würde.

---

1) Robert Boyle (1627—1691). .F. R. S.

2) Stephen Hales (1677—1761), *Vegetable Statics*, London 1727. F. R. S.

ANMERKUNG

Die erstere Ursache, welche unser Autor anführet, weswegen man so wenig Luft als möglich, oben in der Röhre lassen solle, ist schwehr einzusehen. Denn da vor der Entzündung der Raum in der Röhre über dem Wasser theils mit Luft, theils mit der Materie des Pulvers, erfüllet gewesen, so muß sich nach der Entzündung daselbst noch die vorige Luft, nebst dem dadurch hervorgebrachten Fluido elastico weniger der von dem Dampf verzehrten Luft befinden. Folglich wird der Ueberschuß des Raums im letztern Fall dieses Fluidum elasticum, weniger der verzehrten Luft, und auch noch weniger dem Raum, welchen vorher das Pulver eingenommen, enthalten. Dahero dieser Ueberschuß, worauf die Sichtbarkeit des Experiments beruhet, einerley seyn müßte, obgleich anfänglich viel oder wenig Luft in der Röhre gelassen worden. Unter diesen Umständen würde also die angeführte Ursache ungültig seyn; oder man müßte behaupten, daß die Dämpfe um so viel weniger Luft verzehren, je weniger zurück gelassen würde: in welchem Falle diese Ursache noch einiger massen bestehen könnte. Man könnte aber gleichwohl noch dagegen einwenden, ob die Dämpfe nicht in Ermanglung genugsamer Luft die elastische flüßige Materie, so aus der Loßbrennung des Pulvers entstanden, selbst angreiffen, und davon einen Theil verzehren würden? angesehen diese Materie mit der Luft eine so sehr grosse Aehnlichkeit hat; und in diesem Fall müßte das Experiment eben so ungewiß bleiben, als wenn man viel Luft in der Röhre gelassen hätte. Weil aber dieser Umstand den gegenwärtigen Beweis nicht entkräfftet, so ist unnöthig sich dabey länger aufzuhalten. Wollte man aber die würkliche Quantität der aus dem Pulver entstandenen elastischen Materie auf diese Art bestimmen, so würde die gemeldte Verzehrung der Luft nicht sonderlich hinderlich fallen, wenn man nur sogleich die Würkung im Wasser bemerkte, indem vermuthlich dieselbe Verzehrung nicht in einem Augenblick vor sich gehet, sondern einige Zeit erfordert.

ZWEYTER SATZ

Enthaltend eine ausführlichere Erklärung der Umstände, welche bey der Loßbrennung des Pulvers, sowohl in der Luft, als in einem Luft-leeren Raum, bey den beyden vorhergemeldten Experimenten beobachtet werden.

Wenn eine genugsame Quantität Pulver unter einem Recipienten, woraus die Luft völlig gepumpt worden, vermittelst eines glüenden Eisens angezündet wird, so fällt der Index mercurialis augenblicklich, steigt aber auch sogleich wiederum hinauf, und bleibet, nach einigen wenigen Oscillationen, deren keine ausser der ersten sehr merklich ist, auf einer Höhe, so weit geringer ist, als vor der Loßbrennung, dem Ansehen nach still stehen: und dieses ist auch der Punct, worauf wir in unsern Experimenten hauptsächlich gesehen. Wenn aber gleich das Quecksilber diesen scheinbaren Ruhe-Punct erreichet, so fährt dasselbe dennoch noch eine geraume Zeit fort zu steigen, obgleich so langsam, daß man keinen Unterscheid so bald merken kann. Unter dessen geschieht dieses unvermerkliche Steigen je länger je langsamer, und hört auch endlich völlig auf, dergestalt, daß dasselbe bey einem Punct, so niedriger ist, als wo es vor der Entzündung des Pulvers gestanden, gänzlich fest stehen bleibt.

Fast eben diese Umstände ereignen sich, wenn Pulver, wie im zweyten Experiment beschrieben worden, in einer Röhre, ohne vorher die Luft ausgezogen zu haben, angezündet wird.

Alle diese Begebenheiten rühren nun von den verschiedenen Veränderungen her, welche in dem aus der Entzündung des Pulvers entstandenen Fluido elastico vorgehen. Der erste plötzliche Fall des Quecksilbers wird verursachet von der Gewalt dieser flüßigen Materie, so lange die Flamme dauret, als wodurch die Ausdehnungs-Kraft derselben noch vielmehr vermehret wird. So bald aber die Flamme und zugleich die heftige Erhitzung dieser Materie aufhöret, so wird auch die Elasticität derselben wiederum vermindert: welches, da es in sehr kurzer Zeit geschieht, so steiget auch das Quecksilber sehr bald nach dem ersten Fall wiederum herauf, welches Steigen so lange dauret, biß die elastische Materie mit dem Recipienten einerley Grad der Wärme erreichet; und alsdenn scheinet der Mercurius still zu stehen. Daß aber dieselbe noch nachgehends unvermerkt höher kommt, rühret theils von der darauf folgenden allmähligen Abkühlung des Recipienten, als welcher durch die Entzündung

des Pulvers auch einiger massen erhitzet worden, her, theils aber insonderheit von der Verzehrung eines Theils der Luft, so durch die schweflichten Dämpfe, wie oben angemerkt worden, geschieht, wodurch folglich die Drückung derselben auf den Mercurium vermindert wird.

ZUSATZ

In den folgenden Propositionen wird unwiedersprechlich dargethan werden, daß die Gewalt des Schießpulvers nichts anders sey, als die Ausdehnungskraft dieser flüßigen Materie, welche durch die Entzündung des Pulvers in den angeführten Experimenten gezeuget worden. Wir werden auch über dieses zeigen, daß diese flüßige Materie in ihren Würkungen einerley Gesetze mit andern elastischen Materien, und insonderheit mit der Luft, beobachtet. Dergestalt, daß was auch diese Gewalt immer für besondere Eigenschafften haben mag, die Würkung doch einerley seyn würde, wenn man an statt derselben eine gleiche Quantität Luft setzen sollte: wofern nehmlich diese Luft in eben denselben Raum eingeschlossen, und auf eben den Grad erhitzet würde, welchen jene flüßige Materie bey der Entzündung des Pulvers erhält. Hr. Hales hat auch so gar befunden, daß diejenigen elastischen Fluida, welche durch aller Gattung Chymische Processe erzeuget werden, mit der Luft einerley Schwehre haben, und dieses hat er insonderheit an derjenigen, welche aus dem Weinstein entstehet, sehr deutlich gewiesen. Er hat auch ferner gefunden, daß diese elastischen flüßigen Materien von der Wärme ausgedehnet, von der Kälte aber zusammen gezogen werden, und daß dieselben mit der Luft einerley Kraft erfordern, um in einen kleinern Raum zusammen gedrückt zu werden, daß auch über dieses dieselben, wenn sie von den schweflichten Dämpfen gereinigt werden, welches geschieht, wenn man dieselben durch das Wasser gehen läßt, nicht nur viele Monathe, sondern auch Jahre in einerley Zustand verbleiben, ohne einen merklichen Theil ihrer Elasticität zu verlieren. Wegen dieser und noch anderer Umstände hat er also nicht gezweifelt, alle diese auf solche Art erzeugten elastischen Fluida für eine würkliche und natürliche Luft zu halten. Wenn nun diese Meynung bey allen statt findet, so muß dieselbe insonderheit bey derjenigen, welche aus dem Pulver entspringet, gelten; massen dieselbe einig und allein aus dem Salpeter herkommt, indem weder der Schwefel noch die Kohlen solche in sich enthalten. Es ist aber bekannt, daß der Salpeter nichts anders ist, als eine mit Luft vermengte saltzigte Erde. Denn eben dasselbe Stück Erde, wenn solches der

Luft auf eine vortheilhafte Art ausgesetzt wird, kann beständig immer neuer Salpeter hervor bringen. Ob aber gleich diese Meynung, daß die durch Entzündung des Pulvers erzeugte subtile elastische Materie nichts anders als eine natürliche Luft ist, der Wahrheit vollkommen gemäß scheinet, so ists doch zu unserm Vorhaben einerley, ob dieselbe wahr oder falsch ist. Denn es ist uns genug, daß wir wissen, daß eine solche elastische Materie vorhanden ist, von welcher die Würkungen des Pulvers ihren Ursprung haben. Dieselbe mag nun Luft sein, oder nicht, so behalten unsere Schlüsse doch eben dieselbe Kraft; indem dieselben auf die Eigenschaften, welche die Experimenten klärlich ausweisen, und nicht auf blosse Speculationen über die Natur derselben gegründet sind.

ANMERKUNG

Man kann sich also das Pulver als eine solche Materie vorstellen, welche eine über die massen stark zusammen gedrückte Luft in ihren Theilgen eingeschlossen hält, und dabey so beschaffen ist, daß diese Behältnisse durch die Entzündung plötzlich geöfnet, und die eingeschlossene Luft in Freyheit gesetzt wird, sich auszudehnen. Denn auf solche Art müssen eben diejenigen Würkungen entstehen, welche bey den oben angeführten Experimenten wahrgenommen worden: so bald nehmlich diese eingeschlossene und sehr stark zusammengepreßte Luft durch die plötzliche Entzündung von ihren Banden befreyet wird, so erhält dieselbe durch die grosse Hitze des Feuers einen starken Zuwachs ihrer Ausdehnungskraft, und treibet folglich im ersten Experiment das Quecksilber, im andern aber das Wasser viel weiter zurück, als die blosse Ausdehnungskraft zu verrichten vermögend wäre; da aber diese grosse Erhitzung gleichsam nur einen Augenblick dauret, so lässt auch diese grosse Elasticität so gleich wiederum nach, und verursachet also, daß das Quecksilber und Wasser gleich nach dem ersten Fall wiederum in die Höhe steigt. Weil aber hierauf noch einige Zeit das Aufsteigen sehr langsam fortdauret, und die Ursache davon sowohl in der Verzehrung der Luft, welche von den schweflichten Dämpfen des Pulvers verursachet wird, als in der allmähligen Abkühlung des Recipienten verborgen liegt, so siehet man, daß diese Verzehrung sehr langsam vor sich gehe, und also die hierüber angestellten Experimenten nicht unrichtig mache, wie schon bey dem ersten Satz angemerket worden. Da also nicht nur eben dieselbe Würkung erfolget, wenn

man annimmt, daß in dem Pulver eine sehr heftig zusammen gepreßte Luft befindlich ist, sondern auch die aus dessen Entzündung würklich hervorgebrachte subtile elastische Materie alle übrige Eigenschaften der Luft vollkommen besitzet, so hat man um so viel weniger Ursache zu zweifeln, daß dieselbe nicht in der That Luft seyn solte: da aus der Erfahrung genugsam bekannt, daß die Luft ein aus allen elastischen Ausdünstungen der irdischen Cörper vermischtes Wesen sey, dahero man jederzeit eine jegliche flüßige Materie, welche mit der Luft einerley Schwehre und einerley Elasticität hat, ohne zu fehlen für eine wahrhafte Luft halten kan. Man kan hieraus auch eine besondere Art von Veränderung abnehmen, welche in der Luft beständig vorgeht. Denn da durch die Gährung, wie bey der Loßbrennung des Pulvers geschieht, die in den Cörpern eingeschlossene zusammen gepreßte Luft hervorbricht, und sich mit der offenen Luft vereiniget, so giebt es wiederum solche Cörper, welche die Luft in sich schlucken, und in ihre Poros zusammen zu drucken vermögend sind, worinne dieselbe so lange bleibt, biß sie Gelegenheit findet, wiederum heraus zu brechen. Und auf eben diese Art kann man begreiffen, wie der Salpeter und andere Cörper, so eine solche zusammen gepreßte Luft in ihren Poris eingeschlossen halten, nach und nach erzeuget werden.

DRITTER SATZ

Die Elasticität oder Ausdehnungs-Kraft der aus dem Pulver erzeugten flüssigen Materie ist, wann die übrigen Umstände einerley sind, ihrer Dichte oder Zusammenpressung proportional.

Dieses folget hieraus, daß wenn man unter eben demselben Recipienten zweymahl so viel Pulver anzündet, der Mercurius in der gläsernen Röhre auch zweymahl so tief herab sinkt. Da aber aus einer doppelten Quantität Pulver zweymahl so viel von dieser elastischen Flüßigkeit erzeuget wird, so muß dieselbe in dem von Luft gereinigten Recipienten zweymahl so dichte seyn. Weil nun ihre Elasticität durch den Fall des Mercurii angezeigt wird, so ist hieraus klar, daß mit einer doppelten Dichte auch eine doppelte Elasticität verknüpfet ist. Wenn auch gleiche Portionen Pulver in verschiedenen Recipienten von ungleicher Grösse angezündet werden, auf eben die Art, wie oben beschrieben worden, so wird der Fall des Mercurii accurat um so

viel grösser seyn, je kleiner der Recipient gewesen. Je kleiner aber der im Recipienten befindliche Raum ist, je dichter muß die aus dem Pulver erzeugte Materie seyn; und also ist auch in diesem Fall die Elasticität der Dichte proportional.

Weil man aber in den gewöhnlichen Experimenten von dieser Art genöthiget ist, sehr wenig Pulver zu gebrauchen, und es dahero nicht möglich ist, die wahre Proportion zwischen der Dichte, und der damit verknüpften Ausdehnungs-Kraft, auf das genaueste zu bemerken: so nahm ich einen ziemlich grossen Recipienten, welcher ungefehr 520 Cubische Zoll hielt, und ließ auf ein darunter gesetztes glüendes Eisen auf einmahl ein Drachma Pulver, nachdem die Luft völlig ausgepumpet worden, fallen; worauf das Quecksilber in dem Indice mercuriali accurat 2 Zoll tief fiel. Hernach glüete ich das Eisen zum zweyten mahl, und ließ, nachdem die Luft wieder wie vorher ausgezogen worden, 2 Drachmas Pulver darauf fallen, wodurch der Mercurius um $3\frac{3}{4}$ Zoll herab sunk. Es fiel aber etwas wenig vom Pulver neben das Eisen, welches, weil der Boden des Recipienten etwas feucht war, nicht Feuer fassete; und dieses scheinet die wahre Ursache zu seyn, warum das Quecksilber im letztern Fall nicht accurat zweymahl tiefer fiel, als im erstern. Wenn also im letztern Fall alles Pulver entzündet worden wäre, so würde der Mercurius um einen viertel Zoll tiefer, das ist, in allem auf 4 Zoll gefallen seyn, woraus wiederum erhellet, daß die Elasticität dieser aus dem Pulver erzeugten Materie ihrer Dichte proportional sey.

ANMERKUNG

Aus diesen Experimenten erhellet ziemlich klar, daß wenn die aus dem Pulver erzeugte elastische Materie in einem zwey mahl, oder drey mahl, oder vier mahl kleinern Raum eingeschlossen wird, ihre Elasticität auch 2, 3 oder 4 mahl grösser werde. Denn ungeachtet man noch zweifeln könnte, ob sich diese Proposition in der That so verhalte, oder ob dieselbe nur beynahe statt finde, immaßen durch diese Experimente eine geringe Abweichung von dieser Regel nicht beobachtet werden könnte, so hat man doch diese Proposition durch eine andere Art Versuche in der Luft richtig befunden. Da nun diese subtile Materie von der Luft nicht unterschieden ist, so hat man auch keine Ursache, an der Wahrheit dieser Proposition zu zweifeln. Dieses verstehet

sich aber nur, wenn der Unterscheid zwischen den verschiedenen Zusammendrückungen, deren Elasticität man untersuchen will, nicht allzugroß ist. Denn ob man gleich versichert seyn kann, daß wenn die gewöhnliche Luft in einen zehen mahl kleinern Raum gebracht wird, ihre Elasticität auch ziemlich genau zehen mahl grösser werde, so folget daraus doch noch nicht, daß eben diese Proposition auch bey den stärksten Zusammendrückungen unverändert bleibe, indem es gar wohl möglich wäre, daß zum Exempel eine hundert mahl dichtere Luft etwas mehr oder weniger, als hundert mahl elastischer wäre. Und dahero wird hierdurch die oben angeführte Muthmassung des Hrn. BERNOULLI, welcher glaubt, daß eine 1000 mahl dichtere Luft vielleicht eine 10000 mahl grössere Elasticität haben könne, noch keineswegs bestritten. Weil sich nun in dem Pulver eine so sehr zusammen gepreßte Luft befindet, deren Dichte die Dichte der natürlichen Luft etliche 100 mahl übertrift, so bleibet noch sehr zweifelhaft, ob die Elasticität derselben accurat eben so vielmahl grösser sey, als der natürlichen. Dahero kann man nicht sagen, daß dieser Satz des Autoris ohne Einschränkung mit der Wahrheit übereinstimme: sondern, wenn der angeführte Beweis gelten soll, so müsste man den Satz dergestalt einschräncken, daß die Elasticität der Dichte der Luft nur alsdenn proportional sey, wenn sich in der verschiedenen Dichte kein allzugrosser Unterscheid befindet.

VIERTER SATZ

Die Elasticität und Menge dieser subtilen Materie, welche aus einer gegebenen Quantität Pulver gezeuget wird, genau zu bestimmen.

Weil die verschiedenen Arten von Pulver auch verschiedene Quantitäten von dieser subtilen Materie, nach dem Unterscheid ihrer Güte, hervorbringen, so ist nöthig, ehe sich etwas in diesem Stück bestimmen lässt, daß man sich von der Art desjenigen Pulvers, welches man bey der Untersuchung brauchen will, versichere. Ich habe zu diesem Ende diejenige Sorte erwehlet, welche zum Gebrauch der Regierung bereitet zu werden pflegt; als wobey, kraft eines Contracts, beständig einerley Proportion der Materialien beybehalten werden muß. Diese Art ist also zu Anstellung der Versuche weit bequemer, als die andern Arten, welche nach eines jeden Gutdünken gemacht werden.

Nachdem also die Art des Pulvers, welches zu diesen Experimenten gebraucht werden soll, festgesetzt worden, so müssen wir noch diese nachfolgende zwey Grundsätze, welche in dem Zusatz des zweyten Satzes erinnert worden, voraus setzen. Erstlich, daß die Elasticität dieser subtilen Materie durch die Hitze vermehret, durch die Kälte aber vermindert werde, nach eben den Gesetzen, welche man bey der Luft wahrnimmt. Zweytens, daß die Dichte dieser Materie, und folglich auch ihre Schwehre, einerley sey mit einer gleichen Quantität Luft, welche eben den Grad der Elasticität und Wärme besitzt.

Aus dem in dem vorigen Satz angeführten Experiment erhellet also, daß ein Drachma oder $\frac{1}{16}$ Untz Avoir du poise, oder 27 Gran Troy Gewicht Pulver das Quecksilber um zwey Zoll fallen macht, da solches vorher beynahe 30 Zoll hoch gestanden. Wenn man also 15 mahl mehr Pulver, nehmlich 410 Gran Troy Gewicht genommen hätte, so würde das Quecksilber gänzlich hinab gefallen, und also die im Recipienten befindliche subtile Materie mit dem Druck der natürlichen Luft im Gleichgewicht gestanden seyn, folglich mit der Luft, in der wir leben, einerley Elasticität gehabt haben. Der Raum des Recipienten hielt in seiner Ausmessung 520 cubische Zoll, woraus folget, daß 410 Gran Pulver durch ihre Entzündung 520 cubische Zoll einer subtilen Materie hervorbringen, welche mit der ordentlichen Luft einerley Grad der Elasticität haben. Folglich wird eine ganze Untze Pulver ungefehr 575[1]) cubische Zoll von einer solchen subtilen Materie erzeugen.

Um aber von der Dichte dieser subtilen Materie urtheilen zu können, so ist zu merken, daß ein Theil der jetzt gefundenen Elasticität von der Hitze des im Recipienten befindlichen glüenden Eisens verursachet worden. Weilen nun die gemeine Wärme des Recipienten merklich kleiner gewesen, als des siedenden Wassers, welcher Grad der Wärme die Elasticität der Luft ungefehr um den dritten Theil zu vermehren pflegt: so habe ich aus allen Umständen geschlossen, daß der aus diesem Grund entstandene Zuwachs der Elasticität den fünften Theil möchte beygetragen haben. Wenn also der Recipient mit der äusseren Luft einerley Grad der Wärme gehabt hätte, so würde das Quecksilber, an statt 2 Zoll, nur um $1\frac{3}{5}$ Zoll haben fallen müssen. Man muß daher auch die obgefundenen 575 Zoll um den fünften Theil vermindern, welches noch 460 cubische Zoll gibt. Eine solche Quantität von

1) Das englische Original enthält diese Zahl auch. Die Rechnung ergibt jedoch $554\frac{2}{3}$.
F. R. S.

dieser subtilen elastischen Materie, welche mit der Luft einerley Grad der Elasticität und Dichte hat, ist derowegen in einer Untze Pulver enthalten, und wird daraus durch die Entzündung hervorgebracht. Nun aber wägen 460 Cubische Zoll gemeine Luft ungefehr 131 Gran, und da eine Unze, dergleichen ich gebraucht habe, 437 Gran hält, so trägt diese im Pulver befindliche subtile Materie am Gewicht den $\frac{131}{437}$ Theil, oder beynahe $\frac{3}{10}$ des ganzen Gewichts des Pulvers aus.

Wenn man die Quantität dieser subtilen Materie, in Ansehung des Raums, welchen das Pulver einnimmt, zu wissen verlangt, so ist zu merken, daß 1 Unze und 1 Drachm. oder 17 Drachm. Avoir du poise Pulver, wenn dasselbe wohl zusammen gedruckt wird, 2 Cubische Zoll ausfüllen. Nach obiger Rechnung aber müssen 17 Drachm. und also 2 Cubische Zoll Pulver $488\frac{3}{4}$ cubische Zoll einer solchen subtilen Materie, welche der Luft gleich ist, in sich enthalten. Dahero ist in einem cubischen Zoll Pulver so viel von dieser Materie eingeschlossen, welche, wenn sie sich so weit ausdehnet, biß sie mit der natürlichen Luft einerley Dichte und Elasticität erhält, einen Raum von 244 cubischen Zollen ausfüllen wird.

Um aber diese Bestimmung noch mehr zu bekräftigen, so habe ich zu verschiedenen mahlen eine Drachmam Pulver in einem Luft-leeren Recipienten, welcher 470 cubische Zoll hielt, vermittelst eines Brennglases verbrennet. Diese Versuche waren etwas mühsamer, als die vorigen, in welchen das Pulver durch Hülfe eines glüenden Eisens angezündet worden. Denn es dauret bißweilen sehr lange, ehe das Pulver Feuer fangen will, in welcher Zeit bißweilen Luft in den Recipienten hineindringen, und die folgende Ausmessung unrichtig machen kan. Ueber dieses blieb auch gemeiniglich wohl der vierte Theil des Pulvers unentzündet, und wurde im Recipienten herum zerstreuet. Um also hierinne eine Gewißheit zu erlangen, so sammlete ich die unverbrennten Pulverkörner zusammen, wog dieselben, und vermehrte den geschehenen Fall des Quecksilbers nach dieser Proportion, damit derselbe sich bey einem jeglichen Experiment auf eine gantze Drachmam Pulver schickte. Solchergestalt fand ich bey dem ersten Experiment $2\frac{1}{10}$; bey dem andern $1\frac{8}{10}$; bey dem dritten $2\frac{1}{10}$ und bey dem vierten $1\frac{85}{100}$ Zoll. Hiervon nahm ich ein Mittel, und schloß, daß der von einer Drachma Pulver verursachte Fall des Quecksilbers seyn müßte $1\frac{96}{100}$ Zoll, für den Recipienten, welcher 470 cubische Zoll hielt. Hieraus folget, daß eine Drachma Pulver in dem vorher gebrauchten Recipienten von 520 cubischen Zollen das Quecksilber nur $1\frac{77}{100}$ Zoll

würde haben fallen machen. Was nun in diesen Experimenten wegen der im Recipienten entstandenen Hitze muß abgezogen werden, ist sehr geringe. Denn nachdem ich ein klein Thermometer unter den Recipienten gesetzet, so fand ich, daß die Hitze nicht grösser war, als die gewöhnliche Sommer-Wärme, welche die Luft gemeiniglich um den zwölften Theil mehr ausdehnet. Wenn man nun $1\frac{77}{100}$ um den zwölften Theil vermindert, so kommen $1\frac{62}{100}$ Zoll heraus, welches sehr wenig von $1\frac{3}{5}$ oder $1\frac{60}{100}$ Zoll, die vorher gefunden worden, unterschieden ist. Dahero der vorhergemachte Schluß gültig bleibt, daß sich die in einer jeglichen Quantität Pulver enthaltene subtile Materie, wenn dieselbe sich so weit ausdehnet, biß sie mit der natürlichen Luft einerley Dichte erhält, einen 244 mahl grössern Raum einnimmt, als das Pulver, woraus dieselbe entstanden.

Diese Verhältniß stimmet auch sehr wohl mit dem Experiment überein, welches Hauksbee in seinem *Phys. Mech. Experiments* p. 81 anführet[1]). Denn er fand, daß ein Gran Pulver durch die Entzündung einen cubischen Zoll von der elastischen und der Luft ähnlichen Materie hervor bringe. Wenn man aber die Verhältniß des Raums, welchen das Pulver einnimmt, zu dem Raum, welchen die daraus erzeugte subtile Materie, nachdem dieselbe mit der natürlichen Luft einerley Dichte erreichet, erfüllet, zu wissen verlangt, so wird dieselbe von Hauksbee angegeben, wie 1 zu 232; welche Abweichung von der unsrigen so geringe ist, daß dieselbe bloß allein von dem Unterscheid des Pulvers mag hergekommen seyn. Hieraus können wir auch den Schluß ziehen, daß die äussere Luft in der Erzeugung dieser subtilen Materie aus dem Pulver keine Veränderung verursache. Denn wann wir des Hauksbees Versuche mit unsern eigenen vergleichen, so erhellet, daß aus dem Pulver eben so viel dergleichen subtile Materie in der Luft, als in einem Luft-leeren Raum, hervor gebracht worden.

Wenn also diese aus dem Pulver erzeugte subtile Materie sich nicht ausdehnen könnte, sondern in eben dem Raum, welchen vorher das Pulver eingenommen, eingeschlossen bliebe, so würde dieselbe 244 mahl dichter seyn, und folglich auch eine 244 mahl grössere Elasticität haben, als die natürliche Luft, wenn dieselbe nehmlich mit der Luft auch einerley Grad der Wärme haben solte. Allein, da dieselbe durch die Entzündung sehr erhitzet wird, so muß auch in diesem Zustande ihre Elasticität noch weit grösser seyn.

---

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 50. F. R. S.

Hieraus folget also unstreitig, daß, wenn eine Quantität Pulver in einem verschlossenen Raum, welcher damit völlig angefüllet wird, entzündet werde, die Seiten dieses Raums im ersten Augenblick mit einer Gewalt gedruckt werden müssen, welche weit mehr, als 244 mahl grösser ist, als der Druck der natürlichen Luft, wegen des grossen Grads der Erhitzung, worinne sich diese Materie gleich nach der Entzündung befindet. Wie groß aber die Vermehrung der von dieser Hitze entstandenen Elasticität eigentlich sey, soll in dem folgenden Satze untersuchet werden.

ANMERKUNG

Es kan hier erstlich wegen des Gewichts, welches der Autor bey seinen Versuchen gebrauchet, ein Zweifel entstehen. Denn er thut von zweyerley Arten, welche in Engelland gebräuchlich sind, Meldung, nehmlich des Troy Gewichts, und des Avoir du poise Gewichts. Das erstere wird zu Abwägung des Goldes, Silbers, und anderer kostbaren Waaren, gebraucht: davon pflegt ein Pfund in 12 Untzen eingetheilt zu werden, deren eine sich zur Pariser Untze verhält wie 480 zu $472\frac{1}{2}$; und hält folglich eine solche Untze $585\frac{1}{7}$ Pariser Gran. Das Avoir du poise Gewicht wird bey groben Waaren gebraucht, und ein Pfund davon in 16 Untzen eingetheilet, eine Untze aber weiter nach des EISENSCHMIDS[1]) Tractat *De Ponderibus et mensuris veterum* in 8 Drachmas, und 24 Scrupel: und hält eine solche Untze 534 Pariser Gran. In den hier angeführten Experimenten nennet aber Hr. ROBINS den sechszehnten Theil einer Untze eine Drachmam, daß also nach ihm eine Drachma nur halb so groß, als nach dem EISENSCHMID wäre. Wir können aber hierinne, wegen der in andern Stücken hervorleuchtenden Accuratesse keinen Irrthum vermuthen; und da die Eintheilung und Benennung der Gewichte willkührlich ist, auch alle in Engelland übliche Arten uns vielleicht nicht bekannt sind, so können wir dasjenige, was unser Autor von Drachmis sagt, gar wohl von halben Drachmis verstehen. Wenn aber die Experimenten ihre Richtigkeit haben, wie wir daran nicht zweifeln wollen, so braucht die Sache weiter auch keiner besondern Art von Maß oder Gewicht. Denn wann wir uns einen Raum von einem cubischen Schuh vorstellen, welcher völlig mit demjenigen

1) J. C. EISENSCHMID (1656—1712), *De ponderibus et mensuris veterum,* Argentorati 1708, p. 14. F. R. S.

Pulver, so unser Autor Gouvernements-Pulver nennet, angefüllet ist, so ist darinne so viel von der hier beschriebenen elastischen subtilen Materie enthalten, welche, biß sie mit der natürlichen Luft einerley Dichte erhält, einen Raum von 244 cubischen Schuhen einzunehmen vermögend ist. Und da diese Materie, so lange sie sich in dem Pulver so sehr zusammen gepreßt befindet, einen Theil des Gewichts derselben ausmacht, so beträgt, wie wir gesehen, dieser Theil $\frac{3}{10}$ des Gewichts. Dahero sind je in 10 Pfund Pulver 3 Pfund zusammen gepreßte Luft enthalten.

Ferner ist hier zu merken, daß ob gleich die aus dem Pulver in einem verschlossenen Raum erzeugte Luft 244 mahl dichter ist, als die natürliche Luft, dennoch aus dem vorigen noch nicht folgt, daß die Elasticität derselben auch 244 mahl grösser sey, als der natürlichen: indem wie schon gemeldet, aus den darüber angestellten Experimenten nicht mehr folgt, als daß diese Proportion statt finde, wann die Luft nicht allzu stark zusammen gepreßt wird. Es könnte also diesem ungeachtet gar wohl seyn, daß eine 244 mahl dichtere Luft eine mehr als 300 mahl stärkere Ausdehnungs-Kraft besässe; welcher Zweifel durch andere Experimente ausgemacht werden muß. Im übrigen, da auch die Dichte der natürlichen Luft in den verschiedenen Jahres-Zeiten ziemlich veränderlich ist, so hätte auch bey einem jeglichen Experiment der Grad der Wärme bemerket werden können. Weil man aber zu einer so vollkommenen Erkenntniß der Gewalt des Pulvers nicht gelangen kan, daß man nöthig hätte auf solche Kleinigkeiten Acht zu haben, so ist diese Unterlassung wohl zu entschuldigen.

FÜNFTER SATZ

Den Zuwachs der Elasticität der Luft zu bestimmen, wann dieselbe auf den Grad des glüenden Eisens erhitzet wird.

Um dieses zu bestimmen, nahm ich ein Stück von einem Musketen-Lauf, ungefehr 6 Zoll lang, und ließ dasselbe an einem Ende völlig zuschliessen, das andere Ende aber spitzig ausziehen, daß die Oefnung im lichten nicht mehr als $\frac{1}{8}$ Zoll austrug. Diese Röhre ließ ich bey einem Schmidt gantz roth glüend machen, und tauchte dieselbe mit dem offenen Ende abwärts gekehret in ein Gefäß voll Wasser, so lange, biß sie völlig abgekühlet war.

Hierauf nahm ich dieselbe mit aller Behutsamkeit wiederum aus dem Wasser, und wog das Wasser, welches in währender Abkühlung hinein getreten war, auf das genauste. In drey verschiedenen nach einander angestellten Versuchen betrug das Gewicht dieses Wassers 610, 595 und 600 Gran: die ganze Röhre aber hielt 796 Gran Wasser. Dahero in diesen Experimenten noch so viel Luft in der Röhre geblieben, als 186, 201 und 196 Gran Wasser einnehmen, und dieses war auch ohne Zweifel alle Luft, welche in der Röhre, so lang dieselbe glüete, befindlich war. Folglich verhält sich die Elasticität der Luft, wenn dieselbe auf den äussersten Grad des rotglüenden Eisens erhitzet wird, zur Elasticität eben derselben Luft, wenn sie mit der natürlichen Luft einerley Grad der Wärme angenommen, wie der gantze Innhalt der Röhre 796 zu dem vor der abgekühlten Luft eingenommenen Theil, der in den drey angestellten Versuchen war 186, 201 und 196; und wenn wir dazwischen ein Mittel nehmen, wie 796 zu $194\frac{1}{3}$, oder bey nahe, wie 4 zu 1.

Die Hitze, welche der Röhre bey diesen Versuchen gegeben wurde, war derjenige Grad, welchen die Schmiede die weisse Hitze zu nennen pflegen. Uebrigens muß man hierbey verhüten, daß bey dem Ablöschen der Röhre keine wässerigte Dünste hinein dringen, und die darinne noch befindliche Luft heraus treiben, wodurch das ganze Experiment unrichtig gemacht würde. Zu diesem Ende ließ ich einen eisernen Drath machen, welcher in die Oefuung der Röhre genau paßte, und damit verstopfte ich jederzeit die Röhre, ehe ich sie aus dem Feuer nahm, und ließ auch denselben so lang darinne, biß die Abkühlung im Wasser geschehen war. Hierauf zog ich erst unter dem Wasser diesen Drath heraus, damit das Wasser herein gehen, und den von Luft entledigten Raum anfüllen konnte.

ANMERKUNG

Da die Luft, welche die Röhre, so lange sie glüend war, gänzlich erfüllte, nach der Abkühlung nur noch den vierdten Theil einnahm, so folget hieraus unstreitig, daß wenn die Luft in einem verschlossenen Raum biß auf den Grad des glüenden Eisens erhitzet wird, ihre Elasticität vier mahl so groß seyn werde, als vorher, und daß dieselbe also mit der natürlichen Luft nicht eher im Gleichgewichte seyn könne, als biß sie sich in einen 4 mahl grösseren Raum ausgebreitet. Ob nun gleich dieses bey der natürlichen Luft seine völlige Richtigkeit haben mag, so hat man doch noch grosse Ursache

zu zweifeln, ob eine etliche hundert mahl dichtere Luft, dergleichen im Pulver eingeschlossen ist, gleichfalls eine 4 mahl grössere Elasticität bekomme, wenn dieselbe auf eben den Grad erhitzet wird. Da es also noch ungewiß scheinet, ob eine Luft, welche etliche hundert mahl dichter ist, als die natürliche, mit derselben aber einerley Grad der Wärme hat, auch accurat eben so vielmahl mehr elastisch sey, so scheinet noch viel mehr ungewiß zu seyn, ob die Elasticität einer so dichten Luft, wenn dieselbe auf den Grad des glüenden Eisens erhitzet wird, just 4 mahl grösser werde, weil man diese Vermehrung bey der gewöhnlichen Luft wahrgenommen: weswegen bey den folgenden Untersuchungen nöthig seyn wird, wohl auf diese Umstände Achtung zu geben, damit nicht alles als gewiß und bewiesen angenommen werde, woran man noch wichtige Ursachen zu zweifeln haben kan.

SECHSTER SATZ

Zu bestimmen, um wie viel die Elasticität der subtilen Materie, welche aus dem Pulver erzeuget wird, noch durch die Hitze, womit die Entzündung begleitet wird, vermehret werde.

Weil diese subtile elastische Materie mit der Luft eine solche Aehnlichkeit hat, daß beydes Elasticität und Dichte durch die Wärme und Kälte auf eine gleiche Art verändert werden; wann wir setzen, daß bey Entzündung des Pulvers eine so grosse Hitze entstehet, welche derjenigen, so an dem glüenden Eisen verspühret wird, gleich kommt: so muß die Elasticität der aus dem Pulver erzeugten subtilen Materie im ersten Augenblicke der Entzündung viel grösser seyn, als nachgehends, wann dieselbe schon mit der äusseren Luft auf einerley Grad der Wärme gekommen, und das in der Proportion wie 796 zu $194\frac{1}{8}$ oder bey nahe wie 4 zu 1, das ist, im ersten Augenblicke mußte die Elasticität dieser subtilen Materie wegen der Hitze 4 mahl grösser seyn, als sie in Ansehung ihrer blossen Dichte seyn würde.

Daß aber die Hitze, welche bey Entzündung einer merklichen Menge Pulvers entsteht, nicht geringer ist, als eines glüenden Eisens, solches ist klar aus dem Ansehen der Flamme, und aus der Natur der Materien, woraus das Pulver besteht. Denn dieses Feuer ist ohne Zweifel eben so kräftig als

gemeines Feuer; und da bekannt ist, daß ein jegliches Feuer hinreichend ist, Eisen zum Glühen zu bringen, so kan auch dem Feuer selbst ein gleicher Grad der Hitze nicht abgesprochen werden.

Wann wir also annehmen, daß die Flamme, welche bey Entzündung des Pulvers entsteht, keine geringere Hitze als glüendes Eisen bey sich führe, und daß die Elasticität der aus dem Pulver entstandenen subtilen Materie davon nach der Verhältniß wie $194\frac{1}{3}$ zu 796 vermehret werde, wie in dem vorigen Satz gefunden worden: so folget hieraus, daß, da diese Materie, so lange sie in eben dem Raum eingeschlossen bleibt, 244 mahl dichter ist, als die gemeinere Luft, ihre Elasticität nicht nur 244 mahl, sondern wegen der Erhitzung $\frac{2388}{583}$ mahl 244 mahl, das ist $999\frac{1}{3}$ mahl grösser seyn müsse, als die Elasticität der gemeinen Luft. Welche Vermehrung aus vorher angeführten Gründen genugsam erhellet.

Hieraus kan also die wahre Grösse der Gewalt des Pulvers im ersten Augenblick der Entzündung angezeiget werden. Denn, da diese subtile Materie, welche daraus erzeuget wird, eine elastische Kraft hat, so $999\frac{1}{3}$ oder nach einer vollen Zahl 1000 mahl grösser ist, als der gemeinen Luft, die gemeine Luft aber auf eine gegebene Fläche einen Druck ausübet, welcher dem Gewicht der Athmosphäre gleich ist, als mit welcher die Elasticität im Gleichgewicht steht: so muß die Gewalt des entzündeten Pulvers im ersten Augenblick, ehe sich dieselbe ausdehnet, 1000 mahl grösser seyn, als der Druck der Athmosphäre; und folglich muß diese Gewalt, welche auf eine Fläche von einem Quadrat-Zoll ausgeübet wird, über 6 Tonnen am Gewicht betragen. Diese Gewalt aber nimmt gleich ab, so bald sich diese elastische Materie mehr ausdehnet, und ihre Erhitzung vermindert wird, wie in den vorigen Sätzen gezeiget worden.

ZUSATZ

Ob wir hier gleich angenommen haben, daß die Hitze des Pulvers, wann dasselbe in einer ziemlichen Menge angezündet wird, der Hitze des Eisens, wann dasselbe glüend roth gemacht wird, oder dem Anfang der weissen Hitze gleich komme, welche Bestimmung noch im folgenden durch manche Experimente bekräfftiget werden wird: so ist doch kein Zweifel, daß das Feuer, welches bey der Entzündung entstehet, gleich allen andern Feuern nicht etwas variiren sollte, je nachdem sich dabey mehr oder weniger verbrennliche Materie befindet; und es ist leicht abzunehmen, daß, nach der Quantität

des Pulvers, welche zugleich angezündet wird, die Flamme alle verschiedene Grade der Hitze, nehmlich von demjenigen, welcher das Eisen glüend roth macht, biß zu demjenigen, welcher die Metallen in Glas zu verwandeln vermögend ist, haben könne. Allein da die zu diesem letztern Ende erforderte Menge Pulver so groß ist, daß der Fall, da so viel Pulver auf einmahl angezündet werden sollte, im Kriegswesen niemahls vorkommt, so werden wir durch unsere folgende Experimente finden, daß wir uns nicht weit von der Wahrheit entfernen, wenn wir annehmen, daß die Hitze, welche bey den gewöhnlichen Quantitäten Pulver, so zugleich angezündet zu werden pflegen, entstehet, beynahe einerley sey mit der grösten Hitze, welche das roth glüende Eisen haben kann, wann wir nur in unsern Untersuchungen diesen Grad der Hitze, bey grösseren Quantitäten Pulver etwas vermehren, bey kleinern aber etwas vermindern.

ANMERKUNG

Vielleicht werden sich einige wundern, daß eine jede Flamme einen eben so grossen Grad der Hitze in sich haben soll, als glüendes Eisen, angesehen man die Hand ohne Schaden geschwind durch das Feuer ziehen, kein glüendes Eisen aber ohne Gefahr anrühren kann. Es ist aber hierbey zu merken, daß ungeachtet zwey Cörper einerley Grad der Wärme haben, uns dennoch derjenige, welcher dichter ist, dem Gefühl nach viel wärmer vorkomme, als der dünnere. Eine gleiche Bewandniß hat es auch mit der Kälte. Denn es ist jedermann bekannt, daß uns im Winter das Wasser, oder ein Eisen, welches lange in der Kälte gelegen, viel kälter vorkomme, als die Luft, obgleich nach Anzeige des Thermometers bey allen einerley Grad der Kälte befindlich ist. Die Ursache hiervon ist auch leicht zu begreiffen. Denn, wenn wir einen Cörper anrühren, dessen Grad der Wärme oder Kälte merklich von dem Grad unsers Gliedes unterschieden ist: so ist unsere Empfindung um so viel stärker, je mehr Theilchen des Cörpers uns berühren, indem ein jegliches Theilchen eine Aenderung in unserm Gliede verursachet. Weil nun ein dichterer Cörper in eben demselben Raum mehr Theilchen enthält, so wird auch die Empfindung, so aus dessen Berührung in uns entsteht, viel stärker, und dahero kommt uns ein kaltes Eisen viel kälter vor, als Wasser oder Luft, ob sich gleich in beyden einerley Grad der Kälte befindet. Hieraus wird man nun leicht verstehen, warum uns ein glüendes Eisen heisser scheine,

als das Feuer. Wenn man aber ferner bedenket, daß das Eisen seine ganze Hitze von dem Feuer erhalten, so muß man auch zugeben, daß eben derselbe Grad der Hitze im Feuer stecke, uns aber nur deßwegen nicht so heftig scheine, weil die Flamme ein sehr rarer oder dünner Cörper ist. Ob aber gleich die Flamme einen so hohen Grad der Hitze in sich hat, so wird doch einige Zeit erfordert, ehe sie solche einem Cörper mitteilen kann, und zwar um so viel mehr, je grösser und je dichter der Cörper ist, den man ins Feuer legt. Da nun die oben gemeldte elastische Materie sehr dünne ist, so ist leicht zu erachten, daß dieselbe gleichsam in einem Augenblick eben den Grad der Hitze annehmen müsse, welchen die Flamme hat: daß dieser Grad aber sehr heftig seyn müsse, läßt sich daraus abnehmen, daß eine Canone, wenn aus derselben etliche mahl hintereinander geschossen worden, einen solchen Grad der Hitze bekommt, daß man genöthiget ist, dieselbe mit Wasser abzukühlen. Da nun bey einem jeden Schuß die Flamme, von welcher diese Wärme entsteht, nur einen Augenblick dauret, so sieht man wohl, daß diese Hitze sehr groß seyn müsse, um einem Stück in so kurzer Zeit einen so merklichen Grad der Wärme mittheilen zu können. Im übrigen sind in der hier befindlichen Bestimmung zwey Sätze, unter dem Schein, als wenn dieselben schon bewiesen wären, angenommen worden, an welchen man gleichwohl noch grosse Ursache zu zweifeln haben kann, wie schon vorher angemerket worden. Erstlich ist nehmlich noch ungewiß, ob eine so sehr zusammen gepreßte Luft, welche 244 mahl dichter ist als die natürliche, auch accurat 244 mahl mehr elastisch sey. Hernach ist auch noch nicht ausgemacht, ob eine so dichte Luft von der Hitze eines glüenden Eisens gleichfalls eine 4 mahl grössere Elasticität erhalte, weil solches bey der natürlichen, und auch nicht allzusehr zusammen gepreßten Luft, wahrgenommen worden. Es wird allso rathsam seyn, diese Sätze nur so lange als richtig anzunehmen, biß aus der Vergleichung der folgenden Experimenten mit der hierauf gegründeten Theorie erhellen wird, ob dieselben mit der Wahrheit bestehen können oder nicht. Es wird also darauf ankommen, ob man vermittelst dieser Sätze im Stande seyn wird, alle aus der Erfahrung erkannte Würkungen des Pulvers zu erklären, wenn man diese beyden Sätze als gewiß annimmt, oder ob dieselben entweder eine allzugrosse oder allzukleine Würkung anzeigen werden. Nach des Hrn. Prof. Daniel Bernoulli Meynung müßte diese vom Autore bestimmte Kraft des Pulvers viel zu klein seyn, diejenigen Würkungen, welche uns die Erfahrung vorlegt, hervorzubringen; wir haben aber schon bemerket, daß derselbe die Resistenz der Luft in seinen Berechnungen

nicht so groß gesetzt, als der Autor dieselbe zu seyn behauptet, dahero man noch einige Hoffnung haben kann, daß die obgedachten beyden Sätze dem ungeachtet der Wahrheit noch gemäß seyn könnten. Dieses soll also in den folgenden Anmerkungen mit mehrerem Fleiß untersuchet werden.

SIEBENTER SATZ

Wenn die Länge und Weite eines Stückes, nebst der Schwehre der Kugel und der Ladung des Pulvers, bekannt sind, die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher die Kugel aus dem Stücke herausgetrieben wird; es wird aber auch die Elasticität des Pulvers im ersten Augenblicke der Entzündung für bekannt angenommen.

Um diese Frage aufzulösen, werden wir uns der beyden folgenden Grund-Sätze bedienen.

I. Daß die Würkung des Pulvers auf die Kugel aufhöre, so bald die Kugel aus dem Stück heraus getrieben worden.

II. Daß alles Pulver der Ladung entzündet und in eine elastische Materie verwandelt werde, ehe die Kugel merklich von ihrer ersten Stelle verrückt worden.

Wir werden diese beyden Articul im beygefügten Zusatz ausführlich beweisen: inzwischen aber dieselben als gewiß annehmen, aus welchen die nachfolgende Auflösung hergeleitet wird.

Es sey AB (Fig. 1, p. 70) die Axe der Canone, A der Grund und B die Oeffnung des hohlen Cylinders oder der Seele, CD der Diameter derselben, und $CDEG$ der Theil, welcher mit der Ladung des Pulvers angefüllt worden. Ferner setze man, daß die Kugel mit ihrem hintern Theil auf dem Pulver in EG aufliege, so wird der Druck, welchen die Kugel nach der Entzündung empfängt, auf einen Circul geschehen, dessen Diameter dem Diameter der Kugel gleich ist. Dahero die Kraft, womit die Kugel in der Direction FB fortgestossen wird, aus ihrem Diameter leicht bestimmt wird. Nun ziehe man die Linie FH perpendicular auf FB, und AJ derselben parallel, und beschreibe durch das Punct H eine Hyperbel $KHNQ$ zwischen den Asymtoten AJ und AB. Wenn man sich nun die Kraft, mit welcher die Kugel in F fortgetrieben wird, durch die Linie FH vorstellet, so wird die Linie MN die Kraft ausdrücken, womit die Kugel, wenn sie biß in M fortgerücket, nach

der Direction *MB* gestossen wird. Denn wenn sich die aus dem Pulver erzeugte elastische Materie biß in *M* ausdehnet, so wird sich ihre Elasticität zu derjenigen, welche sie anfänglich, da sie noch im Raum *AF* eingeschlossen war, verhalten, wie die Linie *AF* zu *AM*, das ist wie *MN* zu *FH*, wie aus

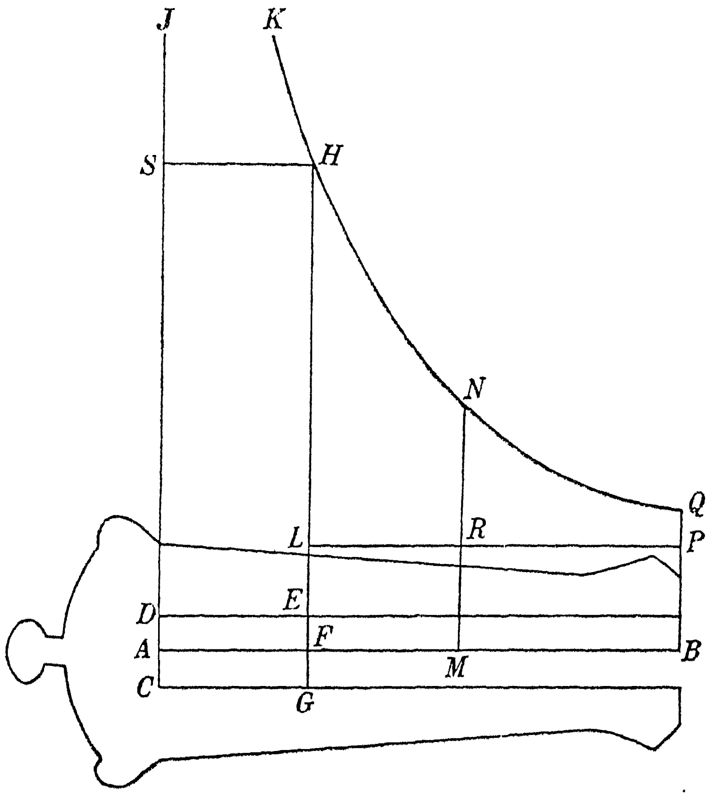


Fig. 1.

der Natur der Hyperbel bekannt ist. Diese Linien zeigen zwar eigentlich die Verhältniß der Dichte der subtilen Materie; wir haben aber im zweyten Satz dargethan, daß die Elasticität mit der Dichte einerley Proportion halte. Dahero wann *FH* die Gewalt, welche die Kugel in *F* forttreibet, andeutet, so wird *MN* die Gewalt, welche auf die Kugel in *M* würket, anzeigen.

Da wir nun die Gewalt in *F* bekannt setzen, und die Schwehre der Kugel gleichfals gegeben ist, so ist auch die Verhältniß der Kraft, womit die Kugel an einem jeglichen Ort in dem Stück fortgestossen wird, zu ihrem Gewicht bekannt. Man nehme also *FH*:*FL* wie die fortstossende Gewalt in *F* zum Gewicht der Kugel, und ziehe die Linie *LP* parallel mit *FB*, und alsdenn wird sich in einem jeglichen Punct *M* die Applicate der Hyperbel

MN zum Theil *MR* verhalten, wie die an diesem Ort befindliche Kraft zum Gewicht der Kugel. Folglich wird kraft der 39ten Prop. Lib. I. Newt. *Princ. Math. Phil. Nat.* die hyperbolische Area *FHQB* das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel von der Gewalt des Pulvers aus der Canone geschossen wird, vorstellen, die rechtlinichte Area aber *FLPB* wird auf gleiche Weise das Quadrat der Geschwindigkeit ausdrücken, mit welcher die Kugel ausgetrieben werden würde, wenn die forttreibende Gewalt allenthalben der Schwehre der Kugel gleich wäre; und also da diese beyden Figuren bekannt sind, so wird auch die Verhältniß zwischen diesen Geschwindigkeiten bekannt seyn. Die letztere Geschwindigkeit aber, welche die Kugel in ihrer Bewegung durch die Linie *FB* bekommen würde, wenn dieselbe beständig von einer ihrer Schwehre gleichen Gewalt fortgestossen würde, ist eben diejenige, welche die Kugel, wenn sie aus einer Höhe, so der Linie *FB* gleich ist, frey herunter fallen sollte, bekommen würde. Da nun diese Geschwindigkeit bekannt ist, so wird dieselbe zu derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel von der Gewalt des Pulvers würklich aus der Canone getrieben wird, sich verhalten, wie die Radix quadrata aus dem Rectangulo *FLPB* zur Quadrat-Wurzel aus der Hyperbolischen Figur *FHQB*, aus welcher Proportion folglich diese gesuchte Geschwindigkeit leicht bestimmet werden kann.

Um diese Auflösung durch ein Exempel zu erläutern, so laßt uns die Länge des hohlen Cylinders *AB* von 45 Zollen annehmen, der Diameter *DC*, oder vielmehr der Diameter der Kugel $\frac{3}{4}$ Zoll, und die mit Pulver angefüllte Länge *AF* sey $2\frac{5}{8}$ Zoll. Hieraus wollen wir nun die Geschwindigkeit, womit eine bleyerne Kugel unter den angeführten Bedingungen aus dem Lauf *AB* heraus getrieben wird, suchen.

Aus dem vorigen Satz ist erstlich klar, daß die Kraft des Pulvers im ersten Augenblick der Entzündung, welche auf die Kugel würket, 1000 mahl grösser ist, als der Druck der ganzen Athmosphäre. Der mittlere Druck der Athmosphäre aber gleichet dem Gewicht einer Wasser-Säule, welche 33 Schuh hoch ist. Da sich nun die Schwehre des Bleyes zur Schwehre des Wassers verhält, wie 11,345 zu 1, so muß der Druck der Athmosphäre dem Gewicht eines bleyern Cylinders, so 34,9 Zoll lang ist, gleich kommen. Diese Zahl mit 1000 multipliciret, giebt einen Zylinder, so 34900 Zoll hoch, dessen Gewicht folglich der Kraft des Pulvers im ersten Augenblick nach der Entzündung gleich ist. Die bleyerne Kugel hält aber $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, und ist folg-

lich einem Cylinder gleich, dessen Höhe auf eben der Basi seyn wird $\frac{1}{2}$ Zoll. Dahero ist die erste Kraft des Pulvers auf die Kugel 2 mahl 34900, das ist, 69800 mahl größer, als das Gewicht der Kugel. Wann wir also $FL = 1$ setzen, so wird $FH = 69800$. Ferner ist $FB : FA = 45 - 2\frac{5}{8} : 2\frac{5}{8}$ das ist wie 339 zu 21, und also das Rectangulum $FLPB$ zum Rectangulo $AFHS$ wie 339 zu 21×69800, das ist, wie 1 zu 4324. Aus der bekannten Eigenschaft aber der Hyperbel, kraft welcher die Spatia der Hyperbel durch die Logarithmos ausgedruckt werden können, folget, daß das Rectangulum $AFHS$ sich zur Area $FHQB$ verhalte, wie die Decimal-Fraction 0,43429 zum Logarithmo des Bruchs $\frac{AB}{AF} = \frac{360}{21}$. Der Logarithmus hiervon aber ist $= 1{,}2340579$[1]), dahero sich das Rectangulum $FLPB$ zur hyperbolischen Area $FHQB$ verhalten wird, wie 0,43429 zu $4324 \times 1{,}2340579$, das ist, wie 1 zu 12263, und folglich werden die Quadrat-Wurzeln daraus seyn, wie 1 zu 110,7, und diese Verhältniß wird seyn zwischen der Geschwindigkeit, welche die Kugel, wenn sie aus einer Höhe von FB oder von $42\frac{3}{8}$ Zollen frey herunter fiel, bekommen würde, und der Geschwindigkeit, mit welcher dieselbe würklich aus dem Lauf AB vom Pulver heraus getrieben wird. Wenn aber ein schwehrer Cörper $42\frac{3}{8}$ Zoll hoch herunter fällt, so erlangt er eine solche Geschwindigkeit, womit er in Stand gesetzt wird, in einer Secunde 15,07 Schuh weit zu lauffen; dahero ist die bleyerne Kugel, von welcher hier die Rede ist, indem sie bey B heraus getrieben wird, im Stand in einer Secunde $15{,}07 \times 110{,}7$, das ist, 1668 Schue zurück zu legen. So groß ist demnach die Bewegung, welche der bleyernen Kugel von dem Pulver nach dem Grundsatze der hier festgesetzten Theorie eingedruckt wird.

Auf gleiche Weise kan auch die Rechnung für einen jeglichen andern Fall angestellet werden. Wenn zum Exempel nicht der gantze Raum AF, welcher zwischen dem Boden des Stücks und der Kugel befindlich ist, mit Pulver angefüllet, sondern nur ein Theil desselben, die Kugel aber gleichwohl anfänglich in F gesetzt würde, so müßte man die Linie HF, und folglich auch den Platz $FHQB$ um eben so viel kleiner annehmen, als der ganze Raum AF grösser ist, als der Theil desselben, welcher mit Pulver angefüllt worden. Sollte das Calibre des Stücks, oder der Diameter der Kugel, grösser oder kleiner seyn, die Linien AB und AF aber die vorige Länge behalten,

---

1) Richtiger ist $\log \frac{360}{21} = 1{,}2340832$, welchen Wert denn auch EULER in seiner Ersten Anmerkung, p. 80, für $\log \frac{120}{7}$ genommen hat. F. R. S.

so würde so wohl die Quantität des Pulvers, als die Superficies der Kugel, auf welche das Pulver würket, nach dem Quadrat des Diameters grösser oder kleiner werden. Weswegen die Linie FH, welche der absoluten Gewalt des Pulvers durch die Schwehre der Kugel dividirt proportional ist, um so viel grösser oder kleiner angenommen werden muß, so viel mahl der Diameter der Kugel kleiner oder grösser ist. Wenn die Länge AF, welche sich zwischen dem Boden des Stückes und der Kugel befindet, grösser oder kleiner wird, so wird auch das Rectangulum in der Hyperbola $AFHS$, und zugleich die Area, so zwischen zwey Applicatis, welche eben dieselbe Verhältniß unter sich haben, in eben der Proportion grösser oder kleiner. Aus allem diesem folget also, daß die Area $FHQB$, welche das Quadrat der Geschwindigkeit, so der Kugel eingedrückt wird, vorstellt, proportional seyn wird, directe dem Logarithmo des Bruchs $\frac{AB}{AF}$ (wo AB die Länge des gantzen Laufs, AF aber die Länge des hinter der Kugel befindlichen Theils andeutet), über dieses auch directe dem Theil des Raums AF, so mit Pulver angefüllt ist, und der Länge des Raums AF selbst, reciproce aber dem Diameter der Kugel. Da wir nun die Geschwindigkeit einer gegebenen Kugel, so aus einem gegebenen Lauf von einer gegebenen Quantität Pulver, welche hinter der Kugel einen gegebenen Raum einnimmt, ausgeschossen wird, bestimmet haben: so kann durch diese Verhältnisse in einem jeglichen andern Fall die Geschwindigkeit, womit die Kugel heraus geschossen wird, leicht bestimmet werden. Hierbey ist zu merken, daß wir in dem hier angebrachten Exempel den Diameter der Kugel $\frac{3}{4}$ Zoll angenommen haben, dahero der Diameter der Mündung etwas grösser, und die Quantität des Pulvers, welches den Raum $DEGC$ ausfüllet, exact 12 Drachmas seyn wird, den geringen Vorschlag von Hanf mit eingeschlossen.

ZUSATZ

In dieser Auflösung haben wir die zwey folgenden Sätze als richtig angenommen.

1. Daß die Gewalt des Pulvers auf die Kugel aufhöre, so bald dieselbe aus dem Stücke gefahren.

2. Daß alles Pulver von der Ladung sich entzünde, ehe die Kugel merklich von ihrer Stelle verrückt worden.

Diese beyden Sätze liegt uns also hier ob, mit mehrerem zu beweisen.

Der erste wird verhoffentlich klar genug scheinen, wenn man betrachtet, wie plötzlich sich die Flamme auf allen Seiten, kraft ihrer Elasticität, ausbreitet, wenn sie einmahl in die offene Luft heraus gedrungen. Als denn wird also ihre Kraft sogleich dergestalt zerstreuet, daß die Kugel von derselben nicht mehr merklich fortgetrieben werden kan.

Der zweyte Satz scheinet in der That nicht so ausgemacht zu seyn, indem derselbe von den meisten, welche davon geschrieben, bestritten wird. Dem ungeachtet aber ist derselbe nicht weniger gewiß. Zum Beweis hiervon könnte vielleicht genung seyn, wenn man nur bedenkt, wie groß die Zusammendruckung der Flamme gleich anfänglich seyn muß. Wenn man nun auf diesen Umstand Acht giebt, und zugleich erwegt, wie leicht die Flamme zwischen den Pulverkörnern durchdringen kann, so wird man leicht erachten, daß kein einiges Korn nur die geringste Zeit unentzündet bleiben kann, da ein jedes mit einer so heftigen Flamme umgeben ist. Damit aber dieser so wichtige Punct nicht auf blossen Vernunft-Schlüssen beruhe, so habe ich darüber folgende Experimente angestellt. Denn ich schloß, daß, wenn sich das Pulver nicht zugleich, sondern nach und nach entzündete, ein schwehrer Cörper, welcher vor das Pulver gesetzt würde, als 2 oder 3 Kugeln statt einer, auch eine grössere Kraft vom Pulver ausstehen müßte, indem dazu mehr Zeit, ehe derselbe durch die ganze Länge des Stücks fortgetrieben wird, erfordert würde, und sich folglich in dieser längern Zeit mehr Pulver entzünden könnte. Daß aber 2 oder 3 Kugeln, welche zugleich geladen werden, keiner grössern Gewalt ausgesetzt sind, als nur eine, solches habe ich aus der Erfahrung befunden. Denn nachdem ich mit eben der Ladung eine, zwey, und drey Kugeln nach einander geschossen, so habe ich durch eine Methode, welche nachgehends beschrieben wird, gefunden, daß ihre Geschwindigkeiten beynahe umgekehrt wie die Quadrat-Wurzeln aus ihren Gewichtern waren. Denn da eine willkührliche Ladung eine Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1700 Schuh in einer Secunde heraus trieb, so theilte eben dieselbe Ladung zwey zusammen geladenen Kugeln eine Geschwindigkeit von 1250 biß 1300 Fuß in einer Secunde, und drey Kugeln eine Geschwindigkeit von 1050 biß 1110 Schuh in einer Secunde mit. Woraus erhellet, daß die Kraft des Pulvers einerley Gewalt ausübet, es mag ein schwehrerer oder ein leichterer Cörper davor gesetzt werden. Denn, alle Mathematici stimmen hierinn mit einander überein, daß, wenn zwey Cörper von verschiedener Schwehre, von einerley Kraft, durch einen gleichen Raum fortgestossen werden, ihre Geschwindigkeiten umgekehrt oder reciproce seyn müßen, wie die Quadrat-Wurzeln aus ihrem Gewicht. Nach dieser Regel hätten zwar die 2 und 3 Kugeln

nur eine Geschwindigkeit von 1200 und 980 Schuh in einer Secunde bekommen sollen; allein ich glaube dennoch nicht, daß daran die allmählige Entzündung des Pulvers Schuld gewesen, sondern solches kam ohne Zweifel daher, daß die Flamme zwischen der ersten Kugel und den Seiten des Stücks hervorbrach, und insbesondere auf die zweyte Kugel würkte, und derselben den beobachteten Zuwachs der Geschwindigkeit mittheilte.

Dieser Unterscheid war auch in vielen andern Experimenten nicht einmahl zu merken, und die Geschwindigkeiten schienen accurat den Quadrat-Wurzeln aus der Schwehre der fortgestossenen Körper reciproce proportional zu seyn. Wo aber dieser Unterscheid am grösten gewesen, da hat er nimmer über ein Achtel des gantzen ausgetragen. Wenn aber die gemeine Meynung wahr wäre, daß sich anfänglich nur ein kleiner Theil des Pulvers entzündete, das übrige aber erst hernach, wenn die Kugel schon fortgerückt, und daß auch ein beträchtlicher Theil Pulver so gar unentzündet bleibe: so hätte die Geschwindigkeit, welche drey Kugeln bekommen, gar viel grösser seyn müssen, als wir gefunden haben, indem sich 3 auf einander geladene Kugeln beynahe zwey mahl länger im Lauf aufhalten, als nur eine, dahero nach der gemeinen Meynung in dieser doppelten Zeit eine viel grössere Portion Pulver hätte entzündet, und folglich eine viel grössere Gewalt hervorgebracht werden müssen, als bey einer einzeln Kugel, welches doch allen Experimenten entgegen läufft.

Die Wahrheit dieses Satzes aber wird noch fester erwiesen werden, wenn im folgenden erhellen wird, daß die hierauf gegründeten Regeln die wahren Grade der Geschwindigkeit anzeigen, die Kugel mag aus einem langen, oder aus einem kurzen Rohr geschossen werden, welche Uebereinstimmung nicht Platz finden könnte, wenn sich das Pulver nicht auf einmahl entzündete.

Was ferner die Pulverkörner anlangt, welche öfters unentzündet aus der Canone gestossen werden sollen, und welche man als die stärkste Probe anzuführen pflegt, daß sich das Pulver nicht auf einmahl entzünde, so hat meines Erachtens Diego Ufaño, ein in der Artillerie sehr erfahrner Mann, schon die wahre Ursache davon gegeben, welche darinne besteht, daß öfters etwas Pulver im vordern Theil der Canone liegen bleibt, welches mit dem Ladestock nicht hinter die Kugel gestossen, und folglich unentzündet wiederum heraus geschmissen wird.*) Dieses kann auch sowohl in kleinen Gewehren, als in

*) Man besehe seine Dialog. 20.[1])

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 34. F. R. S.

Canonen, schwehrlich vermieden werden, insonderheit wenn schon etliche Schüsse daraus geschehen sind. Unterdessen will ich doch nicht läugnen, daß sich nicht bisweilen auch im besten Pulver einige Körner finden sollten, welche dem übrigen Wesen des Pulvers so ungleich sind, daß dieselben, ungeachtet sie rings herum mit Feuer umgeben sind, dennoch nicht Feuer fangen, und also unentzündet aus der Canone heraus getrieben werden; dergleichen ich selbst mehrmahlen wahrgenommen. Dem sey aber wie ihm wolle, so kann doch die Wahrheit dieses Satzes deswegen nicht gänzlich in Zweifel gezogen werden.

Nachdem also hier gezeiget worden, wie man die Geschwindigkeit, welche einer Kugel von der Gewalt des Pulvers eingedruckt wird, aus den hier fest gesetzten Grund-Sätzen berechnen soll: so werde ich im folgenden darthun, daß die würcklichen Geschwindigkeiten, welche Kugeln von verschiedener Grösse, so aus verschiedenen Stücken mit verschiedenen Quantitäten Pulver geschossen werden, erhalten, mit unsern Berechnungen völlig überein kommen, und daß folglich alles dasjenige, so bisher von der Gewalt des Pulvers vorgebracht worden, die Würkung dieser erstaunlichen Kraft ungezweifelt bestätige.

Damit man aber diese Geschwindigkeit einer Kugel, welche aus einem Gewehr geschossen wird, mit derjenigen, welche die Rechnung giebt, vergleichen könne, so ist es unumgänglich nöthig, die würkliche Geschwindigkeit, womit eine Kugel aus einer Canone, oder einem andern Gewehr heraus getrieben wird, durch ein Experiment ausmessen zu können, welches gleichwohl auf keine bisher bekannte Art bewerkstelliget werden kann. Die Mittel, deren sich andere bisher zu diesem Ende bedienet haben, waren, daß man entweder die Zeit, in welcher die Kugel durch eine gegebene Distantz geht, wohl beobachten, oder die Weite des Schusses unter einer gegebenen Elevation bemerken, und hieraus nach den gewöhnlichen Gesetzen, welche sich auf die Parabolische Bewegung gründen, die Geschwindigkeit ausrechnen soll. Die erstere Methode ist aber dieser unüberwindlichen Schwierigkeit unterworfen, daß die Bewegung der Kugeln gemeiniglich so schnell, und allso die Zeit so kurz ist, daß der geringste Fehler, so in Ausmessung der Zeit begangen wird, in der Geschwindigkeit einen sehr grossen Fehler von 200 biß 600 Schuh in einer Sekunde verursachen kann. Die andere Methode ist gänzlich unrichtig und falsch, wegen der Resistenz der Luft, (welcher auch noch die erste unterworfen ist), die so groß seyn kann, daß man öfters nicht einmahl den zehnten Theil der wahren Geschwindigkeit der Kugel auf diese Art heraus bringt.

Um nun diesen Schwierigkeiten zu begegnen, so habe ich eine neue Manier erfunden, die wahre Geschwindigkeit einer jeglichen Kugel durch ein Experiment ausfündig zu machen, und dieses auf einen solchen Grad der Gewißheit, (welcher nach Belieben noch mehr vermehret werden kann,) daß bey einer Kugel, welche 1700 Schuh in einer Secunde läufft, der Fehler nimmer den fünfhundertsten Theil austrägt; welches ohne eine besondere Sorgfalt in Verfertigung der dazu erforderten Machine geschehen kan. Die Beschreibung und der Gebrauch dieses Instrumentes wird uns also die Materie zum folgenden Satz darreichen.

ERSTE ANMERKUNG

Der Autor hat die Geschwindigkeit, womit eine Kugel aus einem Stück heraus getrieben wird, allhier auf eine geometrische Art bestimmet, damit auch solche Leute, welche in der Algeber nicht bewandert sind, dieselbe verstehen können: für diejenigen aber, welche die algebraischen Formuln zu gebrauchen wissen, wird ohne Zweifel auch eine solche Solution deutlicher seyn. Um also sowohl diesen ein Genügen zu leisten, als den Grund zu andern Untersuchungen zu legen, so wollen wir hier eben dieses Problema algebraisch solviren.

1. Es sey also die ganze Länge[1]) des Stückes $AB = a$.
2. Die Länge des Raums $AF = b$, welchen wir entweder ganz oder nur zum Theil mit Pulver angefüllt setzen.
3. Der Diameter der Kugel sey $= c$.
4. Sey die Materie, woraus die Kugel besteht, n mahl dichter oder schwehrer, als das Wasser.
5. Sey die Elasticität des Pulvers im Raum AF im ersten Augenblicke nach der Entzündung m mahl grösser, als die Elasticität der Luft.

Wenn also der ganze Raum AF mit Pulver angefüllt ist, so wird nach dem Autore seyn $m = 1000$; ist aber nur ein Theil desselben mit Pulver angefüllt, so muß der Werth von m auch um so viel kleiner angenommen werden.

Lasst uns nun setzen, die Kugel sey schon biß in M fortgetrieben worden, und nennen den Weg $FM = x$. Ferner sey die Geschwindigkeit der

1) Siehe die Figur 1 p. 70. F. R. S.

Kugel in M gleich derjenigen, welche ein Cörper, so aus einer Höhe $= v$ frey herunter fällt, erhält. Denn wenn diese Höhe v bekannt ist, so ist auch leicht die wahre Geschwindigkeit der Kugel anzuzeigen. Man drucke nehmlich diese Höhe v in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhes aus, und suche aus der Zahl dieser Theile die Quadrat-Wurzel, solche multiplicire man mit 250, so weiset das Product, wie viel solche tausendste Theile eines Schuhes von der Kugel in einer Secunde zurück gelegt werden würden, wann dieselbe einerley Geschwindigkeit behalten sollte.[1])

Weil sich nun der Druck des Pulvers in M zu dem in F verhalten wird, wie AF zu AM, das ist wie b zu $b+x$, so wird der Druck in M sich zum Druck der Athmosphäre verhalten, wie $\frac{mb}{b+x}$ zu 1. Wenn wir nun annehmen, daß der Druck der Athmosphäre einer Wasser-Säule, so 32 Schuh hoch, gleiche, so ist es eben so viel, als wenn die Kugel von dem Gewicht einer Wasser-Säule, so $\frac{32mb}{b+x}$ Schuh hoch ist, fortgetrieben würde. Wann aber die Kugel selbst von Wasser wäre, so würde sie einem gleich dicken Cylinder, dessen Höhe $= \frac{2}{3}c$, gleichen, folglich da dieselbe n mahl schwehrer als Wasser gesetzt wird, so wird ihr Gewicht einer Wasser-Säule, welcher Höhe $= \frac{2}{3}nc$, gleich seyn. Dahero wird sich die forttreibende Gewalt zum Gewicht der Kugel verhalten, wie $\frac{32mb}{b+x}$ zu $\frac{2}{3}nc$ oder wie $\frac{48mb}{nc(b+x)}$ zu 1. Aus den Grundsätzen der Mechanic wird man also diese Äquation ziehen:

$$dv = \frac{48mb}{nc(b+x)}dx,$$

deren Integrale seyn wird

$$v = \frac{48mb}{nc} l \frac{b+x}{b},$$

wo $l\frac{b+x}{b}$ den Logarithmum hyperbolicum von dem Bruch $\frac{b+x}{b}$ andeutet. Es entstehen aber die Logarithmi hyperbolici aus den gemeinen, welche man in den Tabulis findet, wenn man diese entweder durch 2,302585 multiplicirt, oder durch 0,43429448 dividirt. Lasst uns nun $x = FB$, und also $b+x = AB = a$ setzen, so finden wir die Höhe, aus welcher ein fallender Cörper eben die-

1) Die Beschleunigung der Schwere wird dabei zu 31,25 rheinländischen Schuhen pro Sekunde angenommen. F. R. S.

jenige Geschwindigkeit bekömmt, mit welcher die Kugel zum Stück hinaus getrieben wird, nehmlich

$$v = \frac{48\,mb}{nc}\, l\frac{a}{b},$$

welche in Schuhen ausgedrückt wird. Will man aber sich der in den gewöhnlichen Tabulis befindlichen Logarithmorum bedienen, so muß man dieselben erst mit 2,302585 multipliciren; wenn also $l\frac{a}{b}$ den gemeinen Logarithmum von $\frac{a}{b}$ andeuten soll, so wird

$$v = \frac{110{,}524\,08\,mb}{nc}\, l\frac{a}{b}$$

Schuh, folglich in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhes

$$v = \frac{110\,524{,}08\,mb}{nc}\, l\frac{a}{b},$$

dahero wird die Kugel eine solche Geschwindigkeit erhalten, womit sie in einer Secunde einen Weg von $250\sqrt{\frac{110\,524{,}08\,mb}{nc}\, l\frac{a}{b}}$ tausendsten Theilen eines Schuhes, oder von $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{110\,524{,}08\,mb}{nc}\, l\frac{a}{b}}$ Schuhen, das ist von $\sqrt{\frac{6907\frac{3}{4}\,mb}{nc}\, l\frac{a}{b}}$ Rheinländischen Schuhen durchlauffen kann.

Hier ist nun $m = 1000$, wenn der ganze hintere Raum $AF = b$ mit Pulver angefüllt ist; sollte aber nur ein Theil desselben, dessen Länge wir $= f$ setzen wollen, mit Pulver angefüllt seyn, so wird $m = \frac{1000f}{b}$, folglich wird die Bewegung der Kugel in einer Sekunde $\sqrt{\frac{6\,907\,750\,f}{nc}\, l\frac{a}{b}}$ Schuh austragen.

Also ist das Quadrat der Geschwindigkeit, womit die Kugel zum Stück herausgetrieben wird, directe wie der Logarithmus der Zahl $\frac{a}{b}$ oder $\frac{AB}{AF}$, und die Länge des Raums, so mit Pulver angefüllt ist, f, umgekehrt aber wie der Diameter der Kugel c, und ihre Dichte n: bey welcher Proportion sich der Autor etwas versehen, indem er zuletzt noch die Länge des Raums hinter der Kugel $AF = b$ hinzusetzet.

Last uns nun hieraus für das vom Autore angeführte Exempel die Geschwindigkeit der Kugel ausrechnen.

Es wird also seyn:

$$a = 45 \text{ Zoll},$$
$$f = b = 2\tfrac{5}{8} \text{ Zoll},$$
$$c = \tfrac{3}{4} \text{ Zoll},$$
$$n = 11{,}345,$$

weil die Kugel von Bley ist, also

$$\frac{a}{b} = \frac{120}{7}, \quad l\frac{a}{b} = 1{,}2340832, \quad \frac{f}{c} = \frac{7}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f}{nc} = \frac{7}{22{,}69},$$

dahero seyn wird

$$l\frac{f}{nc} = 9{,}4892635.$$

Wenn wir also die obige Formul durch Logarithmos ausrechnen, so kommt

$$\begin{array}{ll} l\,1{,}2340832 & = 0{,}0913445^{1)} \\ l\,\frac{7}{22{,}69} & = 9{,}4892635 \\ l\,6907750 & = \underline{6{,}8393366} \\ & \quad 6{,}4199446^{2)} \end{array}$$

davon die Helfte giebt

$$3{,}2099723^{3)},$$

welches der Logarithmus ist von 1622[4]). Weswegen die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit in einer Secunde einen Weg von 1622[4]) Rheinländischen Schuhen durchläuft: welche Zahl von des Autoris Ausrechnung nur deswegen unterschieden ist, weil wir hier Rheinländische Schuhe brauchen, da der Autor nach Englischen rechnet; und weil wir die Athmosphäre einer Wasser-Säule, so 32 Schuh hoch, gleich gesetzt haben, da der Autor 33 angenommen.

1) Im Original 0,0913447. 2) Im Original 6,4199448. 3) Im Original 3,2099724. 4) Im Original 1625. Berichtigt von F. R. S.

ZWEYTE ANMERKUNG

Es sind bey dieser Auflösung verschiedene Umstände aus der Acht gelassen worden, welche, ob sie gleich meistentheils sehr geringe sind und wenig austragen, dennoch alle die vorher bestimmte Geschwindigkeit der Kugel vermindern, und also insgesammt nicht wohl übergangen werden können. Man kann auch sogleich sehen, daß die gefundene Formul, wodurch die Geschwindigkeit der Kugel ausgedruckt worden, nach aller Schärfe mit der Wahrheit nicht bestehen kann; denn aus derselben müßte folgen, daß je länger das Rohr oder die Länge $AB = a$ wäre, die Kugel desto geschwinder heraus getrieben werden sollte, welches doch mit der Erfahrung streitet: indem bekannt ist, daß eine allzulange Canone die Kugel nicht so weit treibt, als eine kürzere. Derowegen wird nöthig seyn, diese aus der Acht gelassenen Umstände in einige Betrachtung zu ziehen, und zu untersuchen, wie viel durch dieselben die vorher bestimmte Geschwindigkeit der Kugel vermindert wird.

Erstlich ist nun der Gegendruck der äussern Luft nicht mit in die Rechnung gebracht worden. Denn, so lange sich die Kugel in der Höhlung FB befindet, so wird dieselbe von der äussern Luft zurück gestossen. Diese Kraft ist gleich einer Wasser-Säule, deren Höhe 32 Schuh beträgt, wie wir angenommen. Da nun die Kugel einer Wasser-Säule gleicht, deren Länge $= \frac{2}{3}nc$, so wird die zurückstossende Kraft sich zum Gewicht der Kugel verhalten, wie 32 zu $\frac{2}{3}nc$, das ist, wie $\frac{48}{nc}$ zu 1; und also wird hieraus diese Äquation entspringen

$$dv = \frac{48mb}{nc(b+x)}dx - \frac{48dx}{nc}$$

und ferner

$$v = \frac{48mb}{nc} l \frac{b+x}{b} - \frac{48x}{nc}.$$ [1)]

Setzt man nun $x = BF = a - b$, damit die Geschwindigkeit, womit die Kugel aus dem Stück herausgetrieben wird, heraus komme, so wird

$$v = \frac{48mb}{nc} l \frac{a}{b} - \frac{48(a-b)}{nc}$$

Schuh.

1) Im Original $v = \frac{48mb}{nc(b+x)}dx - \frac{48x}{nc}$. Berichtigt von F. R. S.

Zweytens ist auch nicht auf die Resistentz der Luft gesehen worden, welche zwar in dem kurzen Raum FB nicht viel austragen kan, ob dieselbe gleich wegen der schnellen Bewegung nicht geringe ist. Um aber dieselbe doch in die Rechnung zu bringen, so ist zu merken, daß, wenn die Kugel vorne gantz platt wäre, dieselbe gleich seyn würde dem Druck einer Luft-Säule, deren Höhe $= v$, und folglich einer Wasser-Säule, deren Höhe $= \frac{v}{864}$, wenn wir das Wasser 864 mal schwehrer annehmen, als die Luft. Die Ründung der Kugel aber macht, daß diese Resistentz nur halb so groß wird, und dahero einer Wasser-Säule gleichet, deren Höhe $= \frac{v}{1728}$. Diese Resistentz wird sich also zur Schwehre der Kugel verhalten, wie $\frac{v}{1728}$ zu $\frac{2}{3}nc$, oder wie $\frac{v}{1152nc}$ zu 1. Folglich wird man diese Äquation bekommen

$$dv = \frac{48mbdx}{nc(b+x)} - \frac{48dx}{nc} - \frac{vdx}{1152nc}$$

oder

$$dv + \frac{vdx}{1152nc} = \frac{48mbdx}{nc(b+x)} - \frac{48dx}{nc}.$$

Um davon das Integrale zu finden, so setze man e für die Zahl, deren Logarithmus hyperbolicus gleich ist 1, oder $e = 2{,}718281828$, und multiplicire die gefundene Differentialäquation mit $e^{x:1152nc}$, oder man setze der Kürze halber $1152nc = g$, und multiplicire mit $e^{x:g}$, so bekommt man

$$e^{x:g}\left(dv + \frac{vdx}{g}\right) = \frac{48mbe^{x:g}dx}{nc(b+x)} - \frac{48e^{x:g}dx}{nc},$$

wovon das Integrale ist

$$e^{x:g}v = \frac{48mb}{nc}\int\frac{e^{x:g}dx}{b+x} - \frac{48g}{nc}(e^{x:g} - 1)$$

oder

$$v = \frac{48mb}{nc}e^{-x:g}\int\frac{e^{x:g}dx}{b+x} - \frac{48g}{nc}(1 - e^{-x:g}).$$

Weil nun der Bruch $\frac{x}{g}$ sehr klein ist, so ist bey nahe

$$e^{x:g} = 1 + \frac{x}{g} + \frac{xx}{2gg}$$

und

$$e^{-x:g} = 1 - \frac{x}{g} + \frac{xx}{2gg},$$

dahero

$$\int \frac{e^{x:g}dx}{b+x} = \int \frac{dx}{b+x} + \int \frac{xdx}{g(b+x)} + \int \frac{xxdx}{2gg(b+x)}$$

$$= l\frac{b+x}{b} + \frac{x}{g} - \frac{b}{g}l\frac{b+x}{b} + \frac{xx}{4gg} - \frac{bx}{2gg} + \frac{bb}{2gg}l\frac{b+x}{b},$$

folglich wird

$$v = \frac{48mb}{nc}\left(\left(1 - \frac{b+x}{g} + \frac{(b+x)^2}{2gg}\right)l\frac{b+x}{b} + \frac{x}{g} - \frac{bx}{2gg} - \frac{3xx}{4gg}\right) - \frac{48x}{nc}\left(1 - \frac{x}{2g}\right).$$

Laßt uns nun setzen $x = a - b$, damit die Geschwindigkeit, womit die Kugel aus dem Stück geschossen wird, heraus komme, so wird

$$v = \frac{48mb}{nc}\left(1 - \frac{a}{g} + \frac{aa}{2gg}\right)l\frac{a}{b} + \frac{48mb(a-b)}{ncg}\left(1 - \frac{3a-b}{4g}\right)$$
$$- \frac{48(a-b)}{nc}\left(1 - \frac{a-b}{2g}\right)$$

oder wenn man die allzukleinen Terminos, welche nichts merkliches austragen, aussen läßt, so wird

$$v = \frac{48mb}{nc}\left(1 - \frac{a}{g}\right)l\frac{a}{b} + \frac{48mb(a-b)}{ncg} - \frac{48(a-b)}{nc}$$

Schuh.

Hieraus können wir nun berechnen, wie viel die sowohl von dem Gegendruck, als der Resistentz der Luft herrührende Verminderung der Geschwindigkeit austrage in dem obigen Exempel; da ist

$$a = 45, \quad b = 2\tfrac{5}{8}, \quad c = \tfrac{3}{4}, \quad n = 11{,}345, \quad nc = 8{,}509, \quad m = 1000,$$

$$g = 1152\,nc = 9802{,}37, \quad 48mb = 126000 \quad \text{und} \quad \frac{48mb}{nc} = 14808.$$

Der gemeine Logarithmus von $\frac{a}{b}$ ist 1,2340832, welcher mit 2,302585 multiplicirt werden muß, um den hyperbolischen Logarithmum $l\frac{a}{b}$ zu bekommen, welcher seyn wird $= 2{,}8415816$. Hieraus folget

$$\frac{48\,mb}{nc}\,l\,\frac{a}{b} = 42078{,}1$$

$$\frac{48\,mb}{nc}\,\frac{a}{g}\,l\,\frac{a}{b} = 193{,}1$$

$$41885{,}0$$

$$\frac{48\,mb(a-b)}{ncg} = 64{,}014\text{[1]}$$

$$\frac{48(a-b)}{nc} = 239{,}04$$

also $$v = 41710\text{[2]}$$

Schuh. Diese Schuh verwandle man in tausendste Theile, so kommen 41710000[3], woraus Radix quadrata gibt 6458[4], davon der 4te Theil 1615[5] weißt, wie viel Schuh die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit in einer Secunde läufft. Da wir nun vorher 1622[6] Schuh gefunden, so ist klar, daß diese zwey Umstände nur 7 Schuh austragen. Dahero dieselben von dem Autore ohne Fehler wohl haben negligirt werden können.

DRITTE ANMERKUNG

Ausser dem Druck und der Resistenz der Luft giebt es noch zwo andere Ursachen, welche die Geschwindigkeit der Kugel verringern, wenn wir auch mit dem Autore annehmen, daß sich alles Pulver im Stücke auf einmahl entzündet: wogegen gleichwohl noch verschiedene Einwürfe zu machen sind, welche hernach vorgebracht werden sollen. Diese zwo neuen Ursachen scheinen auch einen weit grössern Einfluss auf die Bewegung der Kugel zu haben, dahero dieselben um so viel weniger übergangen werden können. Die erstere bestehet in der Friction, kraft welcher sich die Kugel an der innern Wand des Laufs reibet, und dadurch einen Abgang in der Bewegung leidet. In den kleinern Schießgewehren, als Mußketen und gezogenen Röhren, in welche die Kugeln mit grosser Gewalt hinein gestossen werden müssen, ist diese Friction ohne

1) Im Original 0,035. 2) Im Original 41646. 3) Im Original 41646000. 4) Im Original 6453. 5) Im Original 1618. 6) Im Original 1625. Berichtigt von F. R. S.

Zweifel sehr groß. Sollte dieselbe der Schwehre der Kugel gleich seyn, so müßte man die vorhergefundene Höhe v um $BF = a - b$ vermindern, welches aber in Ansehung des sehr grossen Werths des v nichts austragen würde: ja wenn auch die Friction 100 mahl grösser wäre, als die Schwehre der Kugel, so würde man noch die $100\,(a-b)$ in Ansehung des v ohne merklichen Fehler negligiren können. Bey Canonen würde also die Friction noch viel weniger austragen müssen, weil die Kugeln nicht mit Gewalt hinein gestossen werden, sondern noch zwischen den innern Wänden und der Kugel ein Spiel-Raum bleibt, dahero die Friction nicht einmahl der Schwehre der Kugel gleich seyn kann. Es ist aber dem ungeachtet zu vermuthen, daß entweder die Friction, oder eine andere ähnliche Ursache in den Stücken der Bewegung der Kugel weit stärker entgegen stehen. Denn da die Kugel, so bald sie aus dem Stück heraus getrieben worden, noch alle Hindernisse ihrer Bewegung, nur allein die Friction ausgenommen, antrifft, welchen dieselbe noch in der Canone ausgesetzt gewesen, so könnte eine allzugrosse Länge der Canone der Bewegung der Kugel nicht hinderlich seyn, wie doch die Erfahrung bezeugen soll, wenn die Kugel nicht in der Canone einen Wiederstand anträffe, so ausser derselben verschwindet. Dieser mag nun von der Friction, oder von einer andern Ursache, herrühren, so müßte dieselbe doch ziemlich beträchtlich seyn, wenn dadurch in einer allzulangen Canone die forttreibende Gewalt des Pulvers überwogen werden sollte. Hiervon läßt sich nun, ehe genugsame Experimente über die vortheilhafteste Länge der Canonen mit allem Fleiß angestellet worden, nichts bestimmen. Allem Ansehen nach wird aber die Länge der Canonen vielmehr durch die Menage, als aus diesem Grunde, bestimmt. Und wenn man fragt, warum die Stücke nicht länger gemacht werden, als der Gebrauch mit sich bringt, so scheinet wohl hiervon nicht dieses die Ursache zu seyn, damit die Kugel eine desto geschwindere Bewegung erhalte: sondern vielmehr, weil der Vortheil, den man dadurch an der Geschwindigkeit würklich erhält, die grössern Unkosten, und die grösseren Unbequemlichkeiten, welche die längern Canonen erfordern, bey weitem nicht ersetzte. Denn lasst uns setzen, daß im oben ausgeführten Exempel die Länge des Laufs, welche 45 Zoll gewesen, auf 50 Zoll vermehret werde, so würde $\frac{a}{b} = \frac{50}{2{,}625}$ an statt $\frac{45}{2{,}625}$ und folglich $l\frac{a}{b} = 1{,}2798407$ anstatt $1{,}2340832$. Also würde, ohne auf einen Wiederstand zu sehen, das Quadrat der Geschwindigkeit um $\frac{37}{1000}$ und die Geschwindigkeit selbst um $\frac{18}{1000}$ das ist um ihren $\frac{1}{55}$ Theil vermehret werden. In vielen Fällen würde es also der Mühe nicht lohnen um dieser geringen Vermehrung willen, den obigen Lauf um 5 Zoll länger zu machen. Um dieser Ursache

willen werden wir uns also von der Wahrheit nicht merklich entfernen, wenn wir absonderlich bey Canonen die Friction gar nicht in Betrachtung ziehen.

Die andere Ursache, von welcher hier Meldung gethan werden soll, hat einen weit grösseren Einfluß auf die Bewegung der Kugel. Weil, indem die Kugel durch den Lauf der Canone fortgetrieben wird, nicht nur durch das Zündloch, sondern auch zwischen der Kugel und der inneren Wand der Canone, die elastische Luft beständig herausbläset: so wird die Elasticität derselben in der Canone immer kleiner, als dieselbe hier in der Auflösung angesetzt worden. Denn, da dieselbe wegen der grossen Elasticität mit einer weit grösseren Geschwindigkeit, als die Kugel selbst immer haben kan, durch die gedachten Oeffnungen herausfährt, so ist dieser Verlust der forttreibenden Kraft ziemlich beträchtlich, und muß nothwendig verursachen, daß die Kugel eine kleinere Geschwindigkeit erhält, als die obige Rechnung ausweiset. Um die Würkung dieser Verminderung zu bestimmen, muß man die Geschwindigkeit wissen, mit welcher die in der Canone zusammen gedruckte Luft so wohl durch das Zündloch, als neben der Kugel, herausfährt, welche Untersuchung wir im folgenden vorzunehmen Gelegenheit haben werden. Wir können inzwischen aus einem Exempel, so der Herr Prof. Daniel Bernoulli in seiner *Hydrodynamic* p. 241 berechnet, so viel anführen, daß, da derselbe, um die würkliche Geschwindigkeit der Kugel herauszubringen, ohne auf diesen Abgang der forttreibenden Kraft zu sehen, genöthiget worden, die erste Elasticität der im Pulver eingeschlossenen Luft 6004 mahl grösser anzusetzen, als den Druck der Athmosphäre, er in eben dem Fall, nachdem er diesen erwehnten Abgang in Betrachtung gezogen, die anfängliche Elasticität 10000 mahl grösser hat annehmen müssen. Ungeachtet nun dieses aus solchen Principiis hergeleitet worden, welche der Herr Robins nicht zugibt, so kan man doch daraus so viel ersehen, daß dieser Umstand eine merkliche Veränderung in der obigen Bestimmung der Geschwindigkeit verursachen müsse. Dahero, wenn in den folgenden Experimentis die würkliche Geschwindigkeit mit der ausgerechneten übereinstimmt, so ist dieses ein unbetrügliches Zeichen, daß die forttreibende Kraft viel grösser gewesen, als in der Rechnung angenommen worden, und daß folglich die erste Elasticität der aus der Entzündung des Pulvers erzeugten Luft weit mehr, als tausend mal grösser sey, als die Elasticität der natürlichen Luft.

VIERTE ANMERKUNG

Dieses sind aber doch noch nicht alle Ursachen, weswegen die durch die Rechnung gefundene Geschwindigkeit der Kugel verringert werden muß; wir können zu den schon allbereit erzehlten vieren noch drey neue hinzufügen. Erstlich, wenn sich die elastische Materie schon würklich ausdehnet, so müssen sich alle Theile derselben vorwärts bewegen, und das um so viel geschwinder, je weiter dieselben von dem Boden A entfernet sind. Denn die vordersten Theile, welche die Kugel berühren, haben mit derselben einerley Geschwindigkeit, diejenigen aber, so dem Boden näher sind, eine kleinere. Da nun die Bewegung der vordersten immer schneller wird, so muß auch die Bewegung der übrigen nach Proportion immer geschwinder werden. Ein jeglicher Theil aber dieser elastischen Materie wird von der hintern Luft vorwärts, von der vordern aber rückwärts gestossen, dahero nothwendig der Druck der hintern stärker seyn muß, als der vordern, sonsten würde die Geschwindigkeit dieses Theils nicht zunehmen. Hieraus folget also, daß die Elasticität der hinter der Kugel befindlichen Luft, nicht allenthalben gleich groß sey, sondern daß dieselbe bey dem Boden in A grösser seyn müsse, als an der Kugel, und dahero wird die Kugel mit einer kleineren Kraft fortgestossen, als in der Rechnung angenommen worden: da man gesetzt, daß die Luft hinter der Kugel allenthalben eine gleiche Ausdehnungs-Kraft habe. Dieser Unterscheid muß um so viel grösser seyn, je dichter die Luft hinter der Kugel ist. Weil aber doch die Dichte derselben sehr geringe ist, so wollen wir gerne zugeben, daß daher keine merkliche Verringerung in der Geschwindigkeit der Kugel entstehen könne.

Aus eben diesem Grunde wird auch die zweyte Ursache, welche wir anzuführen haben, eben so wenig merklich seyn. Man hat in der Rechnung angenommen, daß die ganze Kraft des Pulvers allein auf die Forttreibung der Kugel angewandt werde: weil aber auch die Theilchen des Pulvers, und der daraus erzeugten Luft, selbst in Bewegung gesetzt werden müssen, so wird dazu ein geringer Theil der Kraft erfordert, welcher folglich von derjenigen, so auf die Kugel würket, abgezogen werden muß, aus welchem Grunde also die Bewegung der Kugel wiederum vermindert wird. Diese Ursache entspringet zwar mit der vorher gemeldten aus einer Quelle, nehmlich aus der Inertia oder Materialität der Luft, und wenn man die vorige in die Rechnung bringen kan, so wird auch diese darein eingeschlossen. Inzwischen kan man

sich doch von ihrer Würkung einen deutlichern Begrif machen, wenn man sich dieselbe auf diese zweyfache Art, wie hier geschehen, vorstellt. Es ist aber ein Glück, daß die aus diesem Grunde entspringende Würkung nicht merklich ist; denn es würde schwehr und vielleicht unmöglich seyn, dieselbe aus den bekannten Grundsätzen der Mechanic genau zu bestimmen. Man geräth dabey in solche verwirrte Differential-Äquationen, daß man nicht Mittel sieht, dieselben aufzulösen, oder daraus etwas zuverläßiges zu schliessen.

Die dritte Ursache ist eben der zweyte Grundsatz, welchen der Autor als richtig annimmt, und völlig erwiesen zu haben glaubet: daß sich nehmlich alles Pulver im ersten Augenblick zugleich entzünde. Man findet aber sehr viel Ursachen, das Gegentheil zu behaupten, und die Beweisthümer des Autoris selbst sind so beschaffen, daß man daraus an der Richtigkeit zu zweifeln Anlaß nehmen kan. Der Autor führet den ersten Grund her aus der grossen Hitze, und der Geschwindigkeit der Flamme, womit dieselbe zwischen den Pulverkörnern durchfährt. Aber dieses ist eben die Frage, ob gleich im ersten Augenblick so viel Pulver entzündet werde, daß die Flamme zwischen allen Körnern durchstreichen könne. Hernach, da diese Communication durch die Bewegung geschieht, so muß nothwendig dazu eine Zeit erfordert werden, und kömt also hier nur die Frage vor, in wie langer Zeit sich vom ersten Anfang der Entzündung an alles Pulver entzünde. Niemand wird läugnen, daß dieses nicht in sehr kurzer Zeit geschehe: allein die Kugel fährt auch so geschwind zur Canone heraus, daß die geringste Zeit hier schon sehr beträchtlich ist. Gemeiniglich wird die Kugel in einem hundertsten Theil einer Secunde aus dem Lauf hinausgetrieben. Wenn also nur $\frac{1}{100}$ Secunde zur völligen Entzündung des Pulvers erfordert würde, welches doch gewiß eine sehr kurze Zeit ist, so würde die Kugel schon die Mündung der Canone erreicht haben, indem sich das letzte Pulver entzündete; folglich würde dadurch die forttreibende Gewalt des Pulvers gar merklich verringert werden. Solte nach des Hrn. Robins Sinn die gänzliche Entzündung in noch kürzerer Zeit, als in $\frac{1}{200}$ Secunde, oder gar in $\frac{1}{1000}$ Secunde vor sich gehen, welches doch kaum, insonderheit bey grossen Ladungen, glaublich scheint, so müste doch noch der Effect davon merklich seyn. So leicht auch das Pulver Feuer fängt, so wird doch dazu einige Zeit erfordert, und das bey einer Art des Pulvers mehr, als bey der andern. Deswegen ist auch nach des Autoris eigenem Bericht das gekörnte Pulver dem Meel-Pulver vorgezogen worden, weil jenes sich geschwinder entzündet, als dieses. Da nun das Meel-Pulver einige Zeit erfordert, ehe

die an einem Orte geschehene Entzündung sich allenthalben mittheilet, so kann der Vortheil des gekörnten in nichts anders bestehen, als daß zur gänzlichen Entzündung eine viel kürzere Zeit hinlänglich sey. So kurz aber auch diese Zeit angesetzet wird, so ist dieselbe doch immer vermögend, eine merkliche Aenderung in der forttreibenden Kraft zu verursachen. Wir haben hier oben nur $\frac{1}{100}$ Secunde angenommen für die Zeit, in welcher die Kugel aus dem Stück getrieben wird. Allein diese Zeit ist noch zu lang nach den Experimenten, wodurch Herr ROBINS selbst die würkliche Geschwindigkeit, womit eine Kugel aus einem Schieß-Gewehr getrieben wird, bestimmet hat. Er findet, daß diese Geschwindigkeit in einer Secunde einen Weg von 1500 biß 2000 Schuh durchlauffen könne. Weil nun diese Geschwindigkeit der Kugel im Lauf des Gewehrs eingedruckt worden, welcher ungefehr $3\frac{1}{2}$ Schuh lang gewesen, so müste die Kugel, wenn sie im ersten Augenblick diese ganze Geschwindigkeit erhalten hätte, nur $\frac{3\frac{1}{2}}{1500}$ oder $\frac{3\frac{1}{2}}{2000}$ Secunde, das ist nach einem Mittel $\frac{1}{500}$ Secunde im Lauf zugebracht haben. Solte aber der Kugel diese Geschwindigkeit nach einer gleichförmig vermehrten Bewegung, dergleichen in den fallenden Cörpern wahrgenommen wird, mitgetheilet worden seyn, so würde dieselbe zweymahl so lang, das ist $\frac{1}{250}$ Secunden im Lauf verweilet haben. Da nun die forttreibende Kraft anfänglich viel stärker ist, und nach und nach abnimmt, so muß die wahre Zeit kürzer seyn, als $\frac{1}{250}''$, länger aber als $\frac{1}{500}''$, und also ungefehr $\frac{1}{375}$ Secunde austragen, welche Zeit so kurz ist, daß, so geschwind man sich auch die gänzliche Entzündung des Pulvers vorstellt, dieselbe doch nicht viel geschwinder, als in einer $\frac{1}{375}$ Secunde geschehen kann, weswegen dieser Umstand um so viel weniger aus der Acht gelassen werden kann.

Was der Autor ferner sagt, daß die Pulver-Körner, welche öfters aus den Canonen noch unentzündet herausgetrieben werden, dem Setz-Kolben ausgewichen, und nicht hinter die Kugel zu liegen gekommen, ungeachtet solches seine völlige Richtigkeit haben mag, beweiset doch noch keineswegs, daß die gänzliche Entzündung in einem Augenblicke vor sich gehe, und ganz und gar keine Zeit erfordere. Dann gesetzt auch, daß sich alles Pulver entzündete, ehe die Kugel zur Mündung heraus fährt, und also die ganzen Körner, so öfters vor der Canone gefunden werden, nicht hinter der Kugel gewesen wären: so folget doch noch keinesweges, daß die Zeit der gänzlichen Entzündung in Ansehung derjenigen, so die Kugel durch die Canone getrieben wird, vor nichts zu achten sey. Ueber dieses kann es auch seyn, daß eine gute Partie Pulver

noch ausser der Mündung Feuer fängt, und also nichts zur Forttreibung der Kugel beyträgt, ungeachtet diese Körner nicht unentzündet herunter fallen. Denn da das Feuer noch ausser der Mündung heftig genug ist, so kann auch alsdenn noch ein Theil des Pulvers, welches wegen der allzukurzen Zeit in dem Lauf unentzündet geblieben, von der Flamme verzehrt werden. Ferner gesteht der Autor selbst, daß er öfters im Pulver einige Körner wahrgenommen, welche einige Zeit die Gewalt der Flamme ausgehalten, ehe sie sich entzündet haben. Da er nun diese Zeit hat wahrnehmen können, so muß dieselbe merklich, und also gewiß länger, als $\frac{1}{100}$ Secunde gewesen seyn. Wenn es also solche Körner giebt, welche die Gewalt der Flamme länger, als $\frac{1}{100}$ Secunde aushalten können, so muß es noch vielmehr dergleichen geben, welche zu ihrer Entzündung nur $\frac{1}{300}$ Secunde erfordern. Dahero auch dieser Beweisthum, welchen der Autor zu Behauptung seines Satzes anführet, vielmehr das Gegentheil bestätiget.

Die stärkste Probe des Autoris aber besteht darinn, daß die Ausrechnungen, welche aus diesem Satz hergeleitet werden, mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmen. Wir haben aber schon dargethan, wie viel Umstände in dieser Ausrechnung nicht sind in Betrachtung gezogen worden, davon doch einige keine geringe Aenderung verursachen; und daß dahero die Übereinstimmung der Rechnung mit der Erfahrung zu diesem Ende nicht ohne grosse Behutsamkeit angeführet werden kann. Weil der Autor auf den Abgang der forttreibenden Kraft, welche durch das Zündloch und neben der Kugel geschieht, nicht gesehen, und sich folglich aus diesem Grunde schon ein Unterscheid zwischen der Theorie und der Experientz äussern müßte, so könnte es vielleicht wohl seyn, daß die allmählige Entzündung des Pulvers diesen Unterscheid wieder zernichtete. Denn da die Kraft des Pulvers nicht allein wegen der erfolgten Ausdehnung abnimmt, worauf doch in der Rechnung allein gesehen worden, sondern auch wegen des Verlusts, welchen die eingeschlossene elastische Luft durch das Zündloch und den Spiel-Raum leidet, so müste die Verminderung der Kraft grösser seyn, als in der Theorie angenommen worden. Wenn sich nun das Pulver allmählig entzündet, so erhält dadurch die forttreibende Kraft einen beständigen Zuwachs, wodurch der vorige Abgang ersetzet wird; dergestalt, daß auf diese Art wiederum eben dieselbe Proportion im Abnehmen der Kraft stattfinden kann, welche in der Theorie angenommen worden. Auf diese Art könnte also diese Theorie, aller angeführten Umstände ungeachtet, mit der Experientz wiederum vereiniget werden, wenn man nur die

Kraft des im ersten Augenblick entzündeten Pulvers um so viel grösser ansetzt. Denn, wenn nur ein Theil des Pulvers, so im ersten Anfang Feuer fängt, stark genug ist, eben die Würkung hervor zu bringen, welche nach der Theorie von der ganzen Ladung herkommen solte, so muß auch die elastische Kraft desselben Theils eben so groß seyn, als die, welche dem ganzen zugeschrieben worden. Wenn also die elastische Kraft der natürlichen Luft durch 1 angedeutet wird, so muß die elastische Kraft der aus der Entzündung des Pulvers erzeugten Luft so vielmahl grösser sein als 1000, so vielmahl der im ersten Anfang entzündete Theil des Pulvers kleiner ist als die ganze Ladung. Unter dieser Bedingung kann also die Theorie des Autoris mit der Experientz bestehen, wann der Zuwachs der forttreibenden Gewalt, so dieselbe durch die allmählige Entzündung des Pulvers erhält, dem Abgang, welcher wegen des Zündlochs und Spielraums entstehet, immer beynahe gleich kommt, welche Ersetzung vielleicht bey der Art des Pulvers, so der Autor gebraucht, ungefehr mag eingetroffen haben. Hiedurch aber leidet der erste Punkt des Verfassers, wodurch er die elastische Kraft des Pulvers bestimmt, und 1000 mahl grösser als den Druck der Atmosphär angesetzet hat, einen grossen Stoß, indem dieselbe Kraft in diesem Fall, wann die Rechnungen mit der Experientz übereintreffen, viel grösser seyn muß. Wenn sich also der Autor um seinen Satz, daß sich alles Pulver in einem Augenblick zugleich entzünde, auf die Übereinstimmung der hierauf gegründeten Rechnung mit der Experientz berufft, so ist so ferne, daß dadurch seine Meynung bekräftiget werde, daß dadurch vielmehr dieselbe umgestossen wird.

Damit wir aber dieser angeführten Experientz nicht allein blosse Gründe und Vernunft-Schlüsse entgegen setzen, so wollen wir auch Erfahrungen beyfügen, wodurch augenscheinlich erhellet, daß die gänzliche Entzündung des Pulvers nicht in einem Augenblick vor sich gehe. Ich beruffe mich hierbey auf viele Experimente, welche der sel. General Günther zu St. Petersburg A. 1727[1]) in Beyseyn verschiedener Mitglieder der dasigen Academie, unter welchen ich mich auch befunden, hat anstellen lassen. Unter andern wurde dazu ein Stück, dessen Seele $7\frac{7}{10}$ Englische Schuh lang war, gebraucht, und aus demselben mit verschiedenen Ladungen Vertical-Schüsse gethan. Man bemerkte jedes mahl die Zeit nach einem Pendulo, innerhalb welcher die Kugel nach dem Schuß wieder herunter fiel: und aus derselben hat der Herr Bernoulli die

1) Im Original 1728. Berichtigt von F. R. S.

Geschwindigkeit berechnet, mit welcher die Kugel aus dem Stück getrieben worden.[1]) Ungeachtet nun derselbe hierzu die NEWTONIANISCHE Theorie von der Resistentz der Luft gebrauchet, so hindert doch solches zum gegenwärtigen Vorhaben nichts. Er hat also gefunden, daß die Kugel in einem Luftleeren Raum, nachdem man 1, 4 und 8 Loth Pulver geladen, hätte 541, 13694, 58750 Schuh hoch steigen müssen. Hierauf wurde von dieser Canone ein Stück abgesägt, dessen Länge $1\frac{7}{10}$ Schuh, und folglich die Seele der Canone noch accurat 6 Schuh lang war. Nach dieser Verkürzung wurden wiederum mit den vorigen Ladungen von 1, 4 und 8 Loth Pulver Vertical-Schüsse gethan, und da fand sich, daß die Kugel in einem Luftleeren Raum nur auf 274, 2404 und 6604 Schuh hoch gestiegen seyn würde. Bey der Ladung von 8 Lothen würde also die Kugel aus der ganzen Canone beynahe 9 mahl höher gestiegen seyn, als aus der abgekürzten: dahero die Geschwindigkeit, womit die Kugel im ersten Fall ausgetrieben worden, ungefehr dreymahl grösser gewesen als im letztern. Nach des Hrn. ROBINS Theorie aber hätte dieser Unterscheid kaum zu merken seyn müssen. Hieraus ist also klar, daß vor der Abkürzung der Canone sich noch eine gute und so gar die gröste Portion Pulver erst alsdann müsse entzündet haben, als die Kugel den letzten Schuh in der Seele der Canone durchlauffen. Eben dieser Schluß folget auch aus den kleinern Ladungen, jedoch ist der Unterscheid so groß nicht, und eben hieraus erhellet, daß, je grösser die Ladung ist, je mehr Zeit erfordert werde, ehe sich alles Pulver entzünde: welcher Umstand an sich selbst begreiflich genug ist.

Die gezogenen Röhre, welche wie bekannt viel weiter schiessen, als ungezogene, reichen uns auch eine sehr wichtige Probe dar, daß sich das Pulver nicht auf einmahl entzünde. Denn, sollte alles Pulver auf einmahl in Brand gerathen, so müßte nothwendig ein gezogenes Rohr bey weitem nicht so weit schiessen als ein ungezogenes. Man betrachte nur den grossen Wiederstand, welchen eine Kugel in einem gezogenen Rohr zu überwinden hat, ohne darauf zu sehen, daß zugleich der Kugel eine Bewegung um die Axe mitgetheilet wird, wozu auch eine Kraft erfordert wird, so wird man hieran nicht den geringsten Zweifel hegen können. Dennoch aber wird die Kugel aus einem gezogenen Rohr ungeachtet dieses grossen Wiederstandes mit einer grössern Geschwindigkeit heraus geschossen, als aus einem gemeinen, wenn die übrigen

1) Die Resultate dieser Versuche findet man in der im Oktober 1727 der Petersburger Akademie übergebenen Abhandlung D. BERNOULLIS, auf die in der Anmerkung 1 p. 41 verwiesen worden ist, sowie in dessen *Hydrodynamica* p. 236 u. 237. F. R. S.

Umstände einerley sind. Es muß also in einem gezogenen Rohr nothwendig eine weit grössere Kraft vorhanden seyn, als in einem gemeinen, welche nicht nur den grossen Wiederstand zu überwinden, sondern auch noch dazu der Kugel eine schnellere Bewegung mitzutheilen hinlänglich ist. Die Gewalt aber rührt einig und allein vom Pulver her, und in beyden Fällen ist die Ladung einerley: dahero keine andere Ursache übrig bleibt, als daß sich in dem gezogenen Rohr die ganze Ladung oder zum wenigsten der gröste Theil derselben entzünde, da in dem gemeinen Rohr nur ein geringer Theil Feuer fängt, ehe die Kugel heraus getrieben wird. Dieses letzte Argument scheinet noch der Sache den grösten Nachdruck zu geben, und sogar nicht nur zu beweisen, daß sich das Pulver nicht auf einmahl entzünde, sondern auch, daß sich gemeiniglich nur eine sehr kleine Portion des Pulvers entzünde, ehe die Kugel aus der Canone heraus getrieben wird. Aus diesen Ursachen wird die oben erwehnte Meynung des Hrn. Prof. Dan. Bernoulli je länger je wahrscheinlicher, daß die aus dem Pulver erzeugte Elastische Materie im ersten Moment eine Ausdehnungs-Kraft habe, welche beynahe 10000 mahl grösser ist, als der Druck der Atmosphäre, ungeachtet unser Autor dieselbe nur 1000 mahl grösser angibt.

ACHTER SATZ

Die Geschwindigkeit, mit welcher sich eine Kugel in einer jeglichen Distanz von dem Stück beweget, durch die Erfahrung zu bestimmen.

Die leichteste Art, um dieses zu bewerkstelligen, geschieht vermittelst des Instruments, welches beygehende Figur (Fig. 2, p. 94) vorstellet, allwo $ABCD$ ein mit drey Füssen versehenes Gestell andeutet, damit solches allenthalben auf der Erde festgestellet werden könne; dergleichen Machinen zu Abwägung und Aufhebung schwehrer Lasten gebraucht zu werden pflegen. An zweyen von diesen Stützen B und C sind starke Aerme R und S befestiget, auf welchen das Pendulum $EFGHIK$ vermittelst des Querbalkens EF ruhet; welcher auf den Aermen R und S dergestalt aufflieget, daß sich der Körper $GHIK$ um denselben frey bewegen, und gleich einem Pendulo oscilliren kan. Der Körper dieses Penduli ist von Eisen gemacht, und hat unten eine ziemliche Breite, welche in der 2ten Figur nicht zum Vorschein kommt,

insbesondere aber in der 3ten Figur vorgestellet wird, als *A*. Auf diese breite eiserne Platte *A* wird ein starkes und dickes hölzernes Brett *GHIK* (Fig. 2) durch Hülfe einiger Schrauben befestiget. Gleich unter diesem Pendulo befindet sich wiederum ein Querbalken *OP*, so an den beyden Stützen *B* und *C*, welche das Pendulum tragen, fest gemacht ist. An diesem Balken ist ein Instrument *MNV* befestiget, so mit zwey stählernen Ränden, welche nach der Linie *VN* aufeinander passen, wie die Reißfedern gemacht zu werden pflegen, versehen ist. Diese zwey Rände können nach Belieben durch Hülfe der Schraube *Z* mehr oder weniger

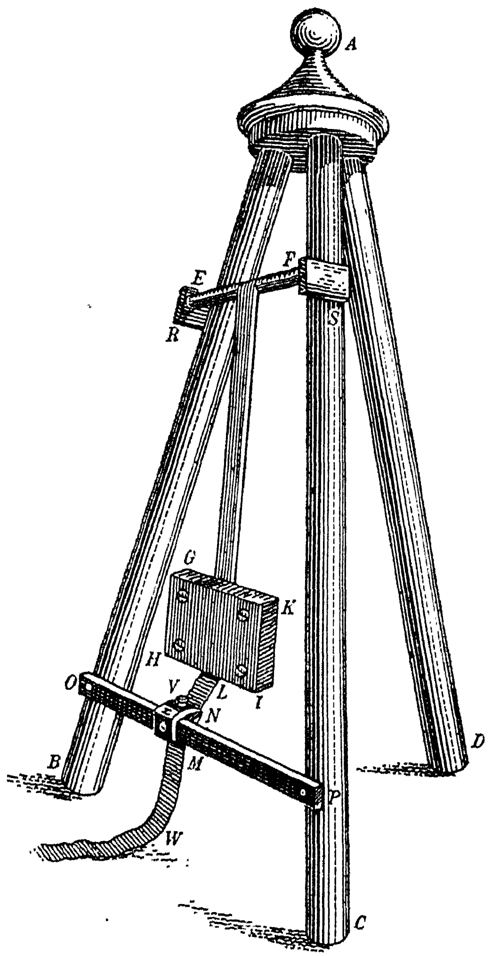


Fig. 2.

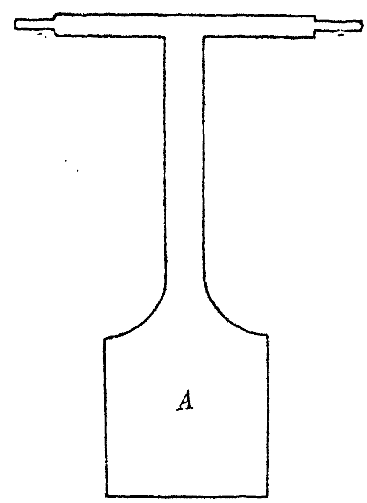


Fig. 3.

zusammen gedruckt werden. Ferner ist am Ende des Penduli unten ein schmales Band *LN* angeheftet, welches zwischen denselben stählernen Ränden durchgezogen wird, und durch eine Oeffnung am untern Theil des beschriebenen Instruments frey herabhängt.

Nachdem nun diese Maschine beschriebener massen zugerüstet worden, so untersuche man sowohl das Gewicht des ganzen Penduli, als sein Centrum gravitatis, nebst dem Centro oscillationis desselben, damit die Entfernung dieser zweyen Punkte von der Axe *EF*, um welche das Pendulum beweglich

ist, bekannt werde. Hieraus wird man ferner bestimmen können, wie eine grosse Bewegung diesem Pendulo mitgetheilet werden muß, wenn auf dasselbe eine Kugel, deren Gewicht bekannt ist, mit einer gegebenen Geschwindigkeit in einem gegebenen Punkt aufstößt. Dahero, wenn das Pendulum vor dem Stoß still gestanden, so wird man anzeigen können, was vor einen grossen Schwung das Pendulum von einem solchen Stoß bekommen, und wie weit dasselbe von seinem Ruhestand gebracht werden müsse. Wenn also hinwiederum diese Entfernung des Penduli von seinem Ruhestand bekannt ist, welche von dem Anstoß einer Kugel, deren Schwehre bekannt, in einem gegebenen Punkt verursachet worden, so läßt sich daraus die Geschwindigkeit, womit die Kugel darauf gestossen, bestimmen.

Derowegen, wenn eine Kugel von einer bekannten Schwehre gegen das Pendulum anstößt, und die Grösse des Schwungs, welchen das Pendulum durch diesen Stoß empfängt, genau beobachtet wird, so kan man daraus die Geschwindigkeit, welche die Kugel bey dem Stoß gehabt, anzeigen.

Die Grösse des Schwungs aber, welcher in dem Pendulo von dem Stoß verursachet wird, kan sehr genau durch Hülfe des Bandes *LN* gemessen werden. Man darf zu diesem Ende nur die beyden stählernen Schärfen *VN*, zwischen welchen das Band durchgeht, vermittelst der Schraube *Z* dergestalt spannen, daß das Band zwar frey und leicht, jedoch nicht ohne einen geringen Wiederstand durchgezogen werden könne. Ehe nun das Pendulum in Bewegung gebracht wird, so ziehe man das Band so stark an, daß dasselbe zwischen dem Pendulo und *VN* gespannt, dennoch aber das Pendulum selbst dadurch nicht aus seinem Ruhestand gebracht werde; und stecke bey *VN* eine Stecknadel darein. Alsdenn lasse man eine Kugel an das Pendulum stossen, welches dadurch zurückgetrieben und einen Theil des Bandes bey *VN* durchziehen wird, aus welchem durchgezogenen Theil, dessen Länge von der Stecknadel an gemessen wird, man sofort den Bogen, welchen das Pendulum im ersten Schwung beschrieben, ausmessen kan.

Die Rechnung aber, wodurch die Geschwindigkeit der Kugel aus der beobachteten Ausweichung des Penduli nach dem Stoß bestimmet wird, erfordert eine weitere Erklärung. Zu diesem Ende wollen wir nach demjenigen Pendulo, dessen wir uns bey unsern Experimenten bedienet haben, die Rechnung anstellen, welche dienen wird, um alle andere Fälle berechnen zu können.

Das Gewicht dieses ganzen Penduli, Eisen und Holz alles zusammen genommen, war 56 Pf. 3 Unzen. Sein Centrum gravitatis war von der Axe *EF* entfernet 52 Zoll, und dieses Pendulum machte 200 kleine Schwingungen in

einer Zeit von 253 Secunden, woraus folgt, daß das Centrum oscillationis von der Axe *EF* entfernet gewesen $62\frac{2}{3}$ Zoll. Ferner war das Centrum des hölzernen Brets *GHIK* von eben derselben Axe 66 Zoll entfernet.

Nun sage man: wie sich verhält 66×66 zu $62\frac{2}{3} \times 52$, so verhält sich das Gewicht des Penduli 56 Pf. 3 Unzen zu 42 Pf. $\frac{1}{2}$ Unzen. Aus der Mechanic ist aber bekannt, daß wenn das Pendulum im Centro des hölzernen Brets *GHIK* gestossen wird, der Stoß eben den Wiederstand finde, als wenn das jetzt gefundene Gewicht von 42 Pf. $\frac{1}{2}$ Unzen in diesem Punkt concentrirt, der übrige Theil des Penduli aber gänzlich zernichtet wäre. Wenn wir nun setzen, daß das Gewicht der Kugel, welche auf dieses Pendulum stossen soll, $\frac{1}{12}$ Pf. oder $\frac{1}{505}$ des gefundenen Gewicht von 42 Pf. $\frac{1}{2}$ Unzen sey, so wird nach den Gesetzen der Bewegung, welche bey dem Stoß zweyer Cörper, so nicht von einander zurückprellen, beobachtet werden, die Geschwindigkeit nach dem Stoß $\frac{1}{505}$ der Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel angestossen, austragen. Wenn man also die Geschwindigkeit des Punkts am Pendulo, wo die Kugel angestossen, weiß, so darf man dieselbe nur mit 505 multipliciren, um die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Stoß zu bekommen.

Die Geschwindigkeit aber des Anstoß-Punkts nach dem Stoß läßt sich leicht aus der Sehne des Bogens, wodurch derselbe getrieben worden, bestimmen. Denn es ist ein bekannter Satz, daß alle hangende Cörper durch ihre schwingende Bewegung, zu eben derjenigen Höhe gelangen, zu welcher sie kommen würden, wenn sie aus ihrem untersten Punkt mit eben der Geschwindigkeit, so dieser Punkt hatte, gerade aufwärts geworfen würden. Derowegen, wenn man den Sinum versum[1]) dieses aufsteigenden Bogens weiß, welcher aus der Sehne und dem Radio leicht gefunden wird, so ist dieser Sinus versus selbst die perpendicular Höhe, auf welche ein Cörper, so mit der Geschwindigkeit des gestossenen Punkts aufwärts geworfen wird, gelangt: wie groß folglich die Geschwindigkeit sey, ist aus der Lehre von den fallenden Cörpern leicht auszurechnen.

Es war zum Exempel die Sehne des Bogens, durch welchen das Pendulum nach dem Stoß gestiegen, und welche auf dem Band gemessen worden, öfters $17\frac{1}{4}$ Zoll lang. Die Distanz des untersten Endes *L*, wo das Band befestiget ist, von der Axe *EF* war $71\frac{1}{8}$ Zoll. Daher nach der Regul Detri zu den Zahlen $71\frac{1}{8} : 66 = 17\frac{1}{4}$ die vierte Proportional gesucht werden muß, welche

1) Sinus versus α ist $1 - \cos. \alpha$. F. R. S.

16 ist, und die Länge der Sehne des Bogens, welchen das Centrum des Brets *GHIK* beschrieben, anzeigt. Hierauf findet man den Sinum versum des Bogens, dessen Sehne ist 16 Zoll, und der Radius 66 Zoll, gleich 1,939 39. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein Cörper zu dieser Höhe zu steigen vermögend ist, oder welches einerley, welche ein Cörper, so aus der Höhe von 1,939 39 Zoll herunterfällt, erlangt, beträgt $3\frac{1}{4}$ Schuh in einer Secunde.

Um nun hieraus die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher die Kugel auf das Centrum des Holzes gestossen, als das Pendulum in seinem daher verursachten Schwung das Band um $17\frac{1}{4}$ Zoll durch das obbeschriebene Instrument *NV* weiter durchgezogen, so hat man nichts mehr nöthig, als die gefundene Zahl von $3\frac{1}{4}$ Schuh mit 505 zu multipliciren. Denn das Product 1641 deutet an, wie viel Schuh die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit, welche sie bey dem Stoß gehabt, in einer Secunde nach einer gleichförmigen Bewegung durchlaufen würde. Denn wir haben gefunden, daß das Punct des Bretts, wo die Kugel angestossen, eine Geschwindigkeit habe von $3\frac{1}{4}$ Schuh in einer Secunde; wir haben aber auch vorher erwiesen, daß die Geschwindigkeit der Kugel 505 mahl grösser sein müsse. Wenn also eine Kugel, so $\frac{1}{12}$ Pfund wiegt, auf das Mittelpunct des hölzernen Brets *GHIK* geschossen wird, und dadurch das Band um $17\frac{1}{4}$ Zoll fortgezogen wird, so beträgt die Geschwindigkeit der Kugel 1641 Schuh in einer Secunde. Da nun die Länge des Bands, welches durch das Instrument bey *NV* durchgezogen wird, ohne Fehler die Sehne des Bogens, welchen das unterste Ende des Penduli beschreibt, giebt, indem das Band dergestalt angemacht ist, daß der Unterscheid nicht merklich seyn kann; diese Sehnen aber, wie bekannt, mit den Geschwindigkeiten, welche dem Pendulo durch den Stoß mitgetheilet werden, einerley Verhältniß haben, so ist klar, daß die Theile des Bandes, so bey verschiedenen Stössen in *NV* durchgezogen werden, den Geschwindigkeiten der aufstossenden Kugel proportional sind. Dahero verhält sich auch die Länge von $17\frac{1}{4}$ Zoll zur Länge des in einem gegebenen Fall durchgezogenen Bandes, wie 1641 Schuh zur Anzahl der Schuhen, welche die Kugel im gegebenen Fall mit ihrer Geschwindigkeit in einer Secunde durchzulaufen vermögend ist.

Hieraus ersieht man also überhaupt, wie durch Hülfe dieses Instruments die Geschwindigkeit einer jeglichen Kugel erkannt werden kann. Damit aber diejenigen, welche Lust haben, dergleichen Experimente selbst anzustellen, um so viel weniger Schwierigkeiten antreffen mögen, so will ich hier noch einige

Handgriffe beyfügen, welche man dabey so wohl zu besserem Fortgang der Experimenten, als zur eigenen Sicherheit in Acht zu nehmen hat.

Ich muß also für das erste, damit man das hölzerne Bret *GHIK* nicht als ein unnöthiges Stück der Maschine ansehe, anzeigen, daß wenn eine mit voller Ladung geschossene Kugel unmittelbar gerade gegen das Eisen anstossen sollte, so würde die Kugel durch den Schlag zersplittern, und diese Splitter mit solcher Heftigkeit zurück springen, daß sie in das umstehende Holzwerk hinein fahren würden. Der damit verknüpften Gefahr nicht zu gedenken, so würde auch das Pendulum die Geschwindigkeit der Kugel, wegen des Rückprellens, worauf die Rechnung nicht gerichtet ist, nicht richtig zu erkennen geben.

Das Gewicht des ganzen Penduli, und die Dicke des Brets, muß auch einiger massen nach der Grösse der Kugeln, welche gebraucht werden, eingerichtet seyn. Das Pendulum, so hier beschrieben worden, kann zu allen Kugeln, welche unter drey biß vier Unzen wägen, sicher beybehalten werden, wenn nur für die schwersten die Dicke des Brets 7 bis 8 Zoll angenommen wird. Das Büchene Holz ist zu diesem Ende das tüchtigste.

Es ist auch gefährlich, auf der Seite des Penduli zu stehen, wenn das Bret nicht so dicke ist, daß die Kugel, ehe sie auf das Eisen kommt, den grösten Theil ihrer Kraft verliehrt. Denn, wenn dieselbe mit einer noch grossen Gewalt auf das Eisen stößt, so dringen die Splitter von dem Bley, welche durch das Holz nicht zurück springen können, zwischen dem Holz und Eisen durch, und fliegen noch ziemlich weit herum.

Weil man kein ander Mittel hat, das Holz auf dem Eisen zu befestigen, als durch Schrauben, davon die Köpfe auf dem Bret hervorstehen, so kann es geschehen, daß bißweilen eine Kugel auf eine solche Schraube zu treffen kommt, in welchem Fall die Splitter davon allenthalben herum geschmissen werden.

Wenn ferner in diesen Experimenten so wenig Pulver gebraucht wird, daß die davon der Kugel mitgetheilte Geschwindigkeit nicht über 400 bis 500 Schuh in einer Secunde austrägt, so bleibt die Kugel im Holz nicht stecken, sondern springt zurück, und das, wenn das Holz sehr hart ist, mit einer sehr grossen Geschwindigkeit. Ich habe diese rückprellende Geschwindigkeit niemahls mit Fleiß untersucht; ich habe aber öfters gesehen, daß die Kugel von den umliegenden Körpern, worauf sie gefahren, ist versehret worden.

Um nun diese Gefahr zu vermeiden, wobey in Philosophischen Untersuchen keine Ehre erlangt werden kann, so ist am sichersten, den Lauf, womit man schiessen will, auf ein starkes und schwehres Gestell zu befestigen, und denselben mit einer nicht allzugeschwind brennenden Zünd-Röhre abzufeuern. Der Lauf muß nach der ganzen Länge wohl befestiget werden; es kann auch kein Mußketen-Lauf, so nach den gewöhnlichen Dimensionen geschmiedet worden, diese hier erzehlten Experimente, ohne zu bersten, lange aushalten, wie ich zu meinem Schaden mehrmahlen erfahren. Der Lauf, worauf ich mich am meisten habe verlassen können, und welchen ich zu diesem Ende ausdrücklich habe verfertigen lassen, ist bey nahe oben so stark als unten, und seine Dicke ist fast allenthalben dem Diameter seiner Höhlung gleich.

Man muß auch das Pulver zu diesen Experimenten auf das genauste abwägen, und wohl acht haben, daß nichts davon im Laden vor der Kugel zurück bleibe; dahero ein solcher Lauf eben, wie eine Canone, geladet werden muß. Der Vorschlag wird am füglichsten von Hanf genommen und muß allemahl gleich schwer seyn; immer aber so geringe, als nur möglich ist, um das Pulver in seinen gehörigen Platz einzuschränken. Wenn auch ein Raum zwischen der Kugel und dem Pulver ledig gelassen werden soll, so muß die Länge desselben sorgfältig abgemessen werden; indem darauf die Geschwindigkeit der Kugel, und die Stärke des Schusses, sehr viel beruhet; ungeachtet sonsten weder die Kugel noch die Ladung verändert wird. Man muß auch den Lauf zum wenigsten so weit von dem Pendulo entfernen, daß die Gewalt der Flamme darauf nicht würken kann, welches bey einem gemeinen Lauf, so mit $\frac{1}{2}$ Untze Pulver geladen wird, geschieht, wenn diese Entfernung nur über 16 biß 18 Schuh ist. Bey stärkeren Ladungen aber reichet die Gewalt der Flamme weiter, und habe ich gefunden, daß sich dieselbe über 25 Schuh weit erstrecket hat. Deswegen habe ich immer diese Distanz von 18 bis 25 Fuß erwehlet. Was ausser diesem noch mehr hierbey zu beobachten ist, solches wird sich füglicher in der Erzehlung und Beschreibung der Experimente, welche ich angestellt, anbringen lassen, wozu ich mich also wende.

ERSTE ANMERKUNG

Die Art, welche unser Autor beschreibet, um die Geschwindigkeit einer Kugel durch Versuche zu bestimmen, ist ohne Zweifel eine von den sinnreichsten und nützlichsten Erfindungen in der Artillerie; indem alles dasjenige, was man bißher darüber zu bestimmen im Stande gewesen, sehr ungewiß und unrichtig ist. Die Beschreibung der Maschine ist so deutlich, daß man solche leicht für einen jeglichen Fall darnach verfertigen lassen kann; wie aber aus den damit angestellten Experimenten die wahre Geschwindigkeit der Kugel ausgefunden werden soll, verdienet eine weitere Erläuterung. Für das erste hat man das Gewicht des ganzen Penduli zu wissen nöthig, welches durch die gewöhnliche Abwägung leicht gefunden wird. Nur ist hiebey zu merken, daß zu dem Cörper des Penduli nicht nur der untere Theil, sondern alles, so mit demselben zugleich in Bewegung gesetzt wird, gerechnet werden müsse, und folglich dazu auch das Gewicht des Horizontal-Balkens EF gehöre. Ferner muß dieser Balken EF, oder vielmehr die Linie, nach welcher derselbe auf den Armen R und S auflieget, vollkommen horizontal seyn. Denn diese Linie stellt die Axe vor, um welche das Pendulum sich beweget, und von welcher die Entfernungen so wohl des Centri gravitatis, als des Centri oscillationis gesucht werden müssen. Man suche zu diesem Ende vor allen Dingen die Distanz des untersten Bords HI, wo das Band LMW befestigt ist, von der gedachten Axe, als welche zu Berechnung der Geschwindigkeit der geschossenen Kugel gleichfalls nöthig ist. Um hernach die Distanz des Centri gravitatis des ganzen Penduli von eben derselben Axe zu finden; so hebe man vermittelst des Bands LMW oder eines stärkern, wenn solches nöthig erachtet wird, das Pendulum so weit in die Höhe, biß dasselbe horizontal zu liegen komme. (Fig. 4.)

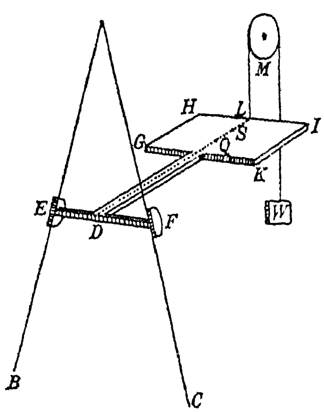


Fig. 4.

Zu diesem Ende ziehe man das Band über eine Rolle M, welche an einem solchen Orte befestiget ist, daß das Stück des Bandes LM perpendicular stehe. Wenn das Pendulum $GHIK$ in die Horizontal-Lage gebracht worden, alsdenn hänge man an das andere Ende des Bandes in W ein so grosses Gewicht, als zu Erhaltung des Penduli in der Horizontal-Lage erfordert wird.

Wenn dieses Gewicht gefunden, so wird sich dasselbe zum Gewicht des Penduli verhalten, wie die Distanz des Centri gravitatis von der Axe, zur Distanz des Puncts L von der Axe; wie aus der Static bekannt ist. Wenn also das Gewicht des ganzen Penduli gesetzt wird $= P$, das Gewicht, so bey dieser Untersuchung in W angehängt werden muß, $= Q$, die Distanz des Puncts L von der Axe EF nehmlich $DL = a$, und das Centrum gravitatis des ganzen Penduli in Q angenommen, und die Distanz $DQ = g$ genennet wird, so muß nach den Regeln der Statik sein $Q : P = g : a$, oder $Pg = Qa$; woraus gefunden wird $g = \frac{Qa}{P}$. Es sey ferner S das Centrum oscillationis des Penduli, und $DS = f$, so wird f die Länge eines einfachen Penduli andeuten, welches mit dem vorgelegten seine Schwingungen in einerley Zeit verrichtet. Dahero um diese Distanz $DS = f$ zu finden, so muß man suchen, in wie langer Zeit das Pendulum eine Oscillation absolvire. Zu diesem Ende bringe man dieses Pendulum in einen kleinen Schwung, dergestalt, daß die Oscillationes nicht über 5 biß 6 Grad beyderseits ausweichen; weil dieselben sonsten nicht alle von einerley Dauer seyn würden, und zehle nach einer guten Uhr, wie viel Oscillationen dieses Pendulum in 1, 2 oder 3 Minuten mache. Der Autor hat hierzu eine Zeit von 200 Schwingungen genommen, dahero wollen wir hier zum Exempel 3 Minuten oder 180″ annehmen. Es sey nun n die Zahl der Oscillationen, welche das Pendulum in der Zeit von 3 Minuten verrichtet. Da nun ein einfaches Pendulum, so 3,16625 Rheinländische Schuh lang ist, durch seine Schwingungen accurat Secunden weiset, so würde dieses Pendulum in 3 Minuten 180 Schwingungen verrichten. Es sind aber die Zeiten, in welchen zwey einfache Pendula von verschiedener Länge ihre Oscillationen machen, wie die Quadrat-Wurzeln aus ihrer Länge. Derowegen, da ein Pendulum, so 3,16625 Schuh lang ist, eine Oscillation in 1″, das gesuchte Pendulum aber, dessen Länge wir $= f$ setzen, eine Oscillation in $\frac{180''}{n}$ absolvirt, so wird seyn

$$1 : \frac{180}{n} = \sqrt{3{,}16625} : \sqrt{f},$$

und also

$$f = \frac{32400 \cdot 3{,}16625}{nn}$$

Rheinl. Schuh. Das ist

$$f = \frac{102586\frac{1}{2}}{nn}.$$

Solchergestalt wird also die Länge f leicht in Rheinländischen Schuhen ge-

funden, welches Maaß in Mechanischen Rechnungen vor andern Maassen einen nicht geringen Vorzug hat, weil ein frei herabfallender Cörper in einer Secunde accurat 15625 tausendste Theile Rheinländischen Schuhes beschreibt, und diese Zahl 15625 eine Quadrat-Zahl ist, deren Radix 125 in den Rechnungen sehr vortheilhaft angebracht wird. Aus dem Rheinländischen Maaß kann aber entweder das Parisische, oder das Englische leicht heraus gebracht werden, indem 1,030[1]) Rheinländische Schuh einen Pariser Schuh und 0,970 Rheinländische Schuh einen Englischen Schuh betragen. In dem Exempel des Autoris machte das Pendulum in 253 Secunden 200 Oscillationen, folglich geschahe eine Oscillation in $\frac{253''}{200}$, woraus diese Proportion entsteht

$$1 : \frac{253}{200} = \sqrt{3{,}16625} : \sqrt{f},$$

dahero wird

$$f = \frac{253 \cdot 253 \cdot 3{,}16625}{40000} = 5{,}0667$$

Schuh: oder nach Englischem Maaß wird

$$f = 5 \text{ Schuh } 2\tfrac{2}{3} \text{ Zoll} = 62\tfrac{2}{3} \text{ Zoll},$$

wie der Autor gefunden.

ZWEYTE ANMERKUNG

Nachdem die Natur des Penduli auf diese Art untersuchet und erkannt worden, so ist man im Stande, damit die Experimente anzustellen, und dadurch die Geschwindigkeit einer jeglichen Kugel zu bestimmen. (Fig. 5, p. 103.)

Es sey also das Gewicht des ganzen Penduli $= P$, die Länge $DL = a$; das Centrum gravitatis des Penduli in Q und $DQ = g$; das Centrum oscillationis des Penduli in S und $DS = f$, welche Quantitäten auf die vorher beschriebene Weise gefunden werden. Lasst uns nun setzen, daß eine Kugel gegen dieses Pendulum auf den Punkt V geschossen, und von diesem Stoß das Pendulum biß in Dl fortgestossen worden, wovon die Sehne Ll durch das Band ange-

1) Im Original 1,035. Berichtigt von F. R. S.

zeiget wird. Man bemerke also zuvörderst die Distanz DV, welche sei $= h$; ferner sey das Gewicht der Kugel $= p$, und die Sehne $Ll = k$, woraus nach der Anweisung des Autoris die Geschwindigkeit der Kugel folgender Gestalt gefunden wird. Man stelle nehmlich diese Regul Detri an: wie sich verhält das Quadrat von DV oder h^2 zum Product $DQ \cdot DS$ oder fg, also das Gewicht des Penduli P zu einem andern Gewicht, welches seyn wird $= \frac{fg}{hh}P$. Der Stoß des Penduli wird also eben so beschaffen seyn, als wann an statt des ganzen Penduli in V ein Gewicht $= \frac{fg}{hh}P$ befindlich wäre, und den Stoß aushielte. Weil nun die Kugel nicht zurück prellet, so wird die Mittheilung der Bewegung nach den Gesetzen der weichen Cörper geschehen. Wann die Geschwindigkeit der Kugel, welche in V anstösst, derjenigen gleich gesetzt wird, welche ein schwerer Cörper durch den Fall aus der Höhe $= v$ erhält, und folglich der Quadrat-Wurzel daraus $\sqrt{v}$ proportional ist, so war die Grösse ihrer Bewegung vor dem Stoß $= p\sqrt{v}$, welche also auch nach dem Stoß unverändert bleibet. Dahero wird die Geschwindigkeit des Punkts V nach dem Stoß seyn

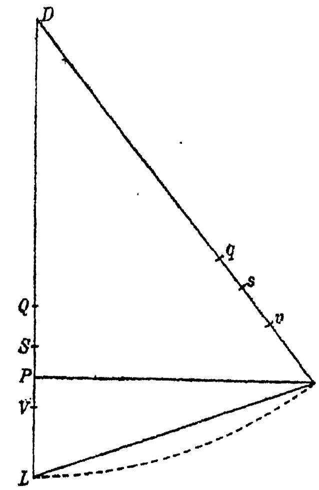


Fig. 5.

$$= \frac{p\sqrt{v}}{p + \frac{fg}{hh}P} = \frac{hhp\sqrt{v}}{fgP + hhp},$$

mit welcher dasselbe in dem darauf folgenden Schwung zu einer Höhe

$$= \frac{h^4p^2v}{(fgP + hhp)^2}$$

steigen wird. Da nun die Sehne $Ll = k$ durch die Erfahrung bekannt ist, so steiget das Punkt L in der That durch die Höhe

$$LP = \frac{Ll \cdot Ll}{2DL} = \frac{kk}{2a}:$$

folglich steiget das Punkt V durch eine Höhe, welche sich zu jener verhält, wie $DV = h$ zu $DL = a$, und ist also $= \frac{hkk}{2aa}$. Woraus diese Vergleichung entspringt

$$\frac{h^4p^2v}{(fgP + hhp)^2} = \frac{hkk}{2aa},$$

und wird also

$$v = \frac{kk(fgP + hhp)^2}{2aah^3pp}$$

und

$$\sqrt{v} = \frac{k(fgP + hhp)}{ahp\sqrt{2h}} = \frac{fgP + hhp}{ahp} \cdot \frac{k}{\sqrt{2h}}.$$

Hieraus wird nun die wahre Geschwindigkeit folgender Gestalt gefunden. Da ein frey herabfallender Cörper in einer Secunde durch eine Höhe von 15625 tausendsten Theilchen eines Rheinländischen Schues herab fällt, und mit der dadurch erhaltenen Geschwindigkeit in einer Secunde einen Weg von 31250 solcher Theilchen durchläuft, die Geschwindigkeiten aber, welche ein Cörper aus verschiedenen Höhen erlangt, den Quadrat-Wurzeln daraus proportional sind: so wird sich verhalten $\sqrt{15625} : \sqrt{v} = 31250$ zu dem Wege, welchen die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit, so aus der Höhe v entspringt, zurück legt. Dahero dieser Weg seyn wird

$$= \frac{31250\sqrt{v}}{\sqrt{15625}} = 250\sqrt{v}$$

tausendsten Theilchen eines Rheinl. Schues: wenn nehmlich v in eben dergleichen Theilchen ausgedruckt wird.

Weil nun $\frac{fgP+hhp}{ahp}$ eine blosse Zahl giebt, und es hierbey nicht darauf ankommt, was man sich bey den Buchstaben a, f, g, h, P und p für eines Maasses bedienet, so hat man nur nöthig k und h, oder den Bruch $\frac{k}{\sqrt{2h}}$ in solchen Theilchen auszudrücken; und alsdann wird die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde so viel tausendste Theilchen eines Rheinl. Schuhes, als diese Zahl

$$\frac{250(fgP + hhp)}{ahp} \cdot \frac{k}{\sqrt{2h}}$$

ausweiset, oder so viel Rheinl. Schuhe, als diese Zahl $\frac{fgP+hhp}{ahp} \cdot \frac{k}{4\sqrt{2h}}$ anzeiget, austragen. Zur Rechnung wird diese Form

$$\left(\frac{fg}{ah} \cdot \frac{P}{p} + \frac{h}{a}\right) \frac{k}{4\sqrt{2h}}$$

bequemer seyn, welche, wann der Bruch $\frac{k}{\sqrt{2h}}$ in tausendsten Theilchen eines Rheinl. Schues ausgedrückt wird, anzeigt, wie viel Rheinl. Schuh die Kugel

mit ihrer Geschwindigkeit in einer Secunde durchzulauffen im Stande ist. In dem von dem Autore angeführten Exempel ist nun

$$P = 56\tfrac{3}{16}\,\text{lb}, \quad p = \tfrac{1}{12}\,\text{lb}, \quad \text{folglich} \quad \frac{P}{p} = 674\tfrac{1}{4},$$

$$\left.\begin{array}{ll} a = 71\tfrac{1}{8} & \text{Zoll} \\ f = 62\tfrac{2}{3} & \text{Zoll} \\ g = 52 & \text{Zoll} \\ h = 66 & \text{Zoll} \\ k = 17\tfrac{1}{4} & \text{Zoll} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Engl.} \\ = 5335 \\ = 1395 \end{array} \!\!\begin{array}{l} \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{tausendstel Rheinl. Sch.} \end{array}$$

Also ist

$$\frac{fg}{ah} = \frac{62\frac{2}{3}\cdot 52}{71\frac{1}{8}\cdot 66} = \frac{3258\frac{2}{3}}{4694\frac{1}{4}}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{fg}{ah}\cdot\frac{P}{p} &= 468{,}053 \\ \frac{h}{a} &= \quad 0{,}928 \\ \hline \frac{fg}{ah}\cdot\frac{P}{p} + \frac{h}{a} &= 468{,}981. \end{aligned}$$

Ferner ist $2h = 10670$, und die Rechnung wird folgender Gestalt durch die Logarithmos vollendet werden:

$$\begin{aligned} l\,2h &= 4{,}0281644 \\ l\sqrt{2h} &= 2{,}0140822 \\ l\,4 &= 0{,}6020600 \\ \hline l\,4\sqrt{2h} &= 2{,}6161422 \\ \text{von } l\,k &= 3{,}1445742 \\ \hline & \ 0{,}5284320 \\ \text{Addir } l\left(\frac{fg}{ah}\cdot\frac{P}{p} + \frac{h}{a}\right) &= 2{,}6711552^{1)} \\ \hline & \ 3{,}1995872^{2)} \end{aligned}$$

Die gehörige Zahl ist also

$$= 1583{,}388^{3)}$$

1) Im Original 2,6711544. 2) Im Original 3,1995864. 3) Im Original 1583,385. Berichtigt von F. R. S.

und weiset, daß die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit in einer Secunde 1583 Rheinl. Schuh durchzulauffen vermögend ist. Da nun 970 Rheinl. Schuh 1000 Engl. Schuh betragen, so macht diese Geschwindigkeit 1632 Engl. Schuh in einer Secunde, welches von der Rechnung des Autoris nur um 9 Schuh differiret[1]), dergleichen Unterscheid in diesem Werk nicht zu achten ist. In der That muß auch die wahre Geschwindigkeit der Kugel etwas grösser seyn, als diese Rechnung anzeigt, weil die Resistentz der Luft verursachet, daß das Pendulum nicht so hoch aufgehoben wird, als solches kraft der eingedrückten Geschwindigkeit geschehen müsste. Wie viel aber diese Hinderniße austragen könne, wollen wir hernach untersuchen, wann wir den Grund dieser von dem Autore angegebenen Regel, um die Geschwindigkeit der Kugel zu berechnen, werden angezeigt haben.

DRITTE ANMERKUNG

Der Beweis der Regel, welche der Autor giebt, um die Geschwindigkeit der Kugel aus der Würkung des Stosses zu berechnen, findet sich an so wenig Orten ausgeführt, daß derselbe den meisten Lesern völlig unbekannt seyn wird. Derowegen wird nicht undienlich seyn, diese sonst ziemlich dunkle Materie, so viel unser gegenwärtiges Vorhaben verstattet, zu erläutern. Dieselbe gehöret nun zu der Lehre von der Veränderung der Bewegung, welche durch den Stoß zweyer an einander stossenden Cörper verursachet wird; wovon die Regeln, wann beyde Cörper dergestalt gerade auf einander stossen, daß die Linie, welche auf den Ort, wo sich dieselben berühren, perpendicular gezogen wird, durch eines jeden Centrum gravitatis durchgehet, genugsam bekannt, und in den meisten mechanischen Büchern anzutreffen sind: die Cörper mögen mit einer elastischen Kraft begabt seyn oder nicht. Wo aber dieser Umstand nicht statt findet, da lässt sich auch durch diese bekannten Regeln die Veränderung, so bey dem Stoß vorgehet, nicht bestimmen.

In dem gegenwärtigen Fall aber kommt noch dieses hinzu, daß der eine Cörper, nehmlich das Pendulum, worauf der Stoß geschieht, nicht frey, sondern um eine Axe beweglich ist, welcher Umstand bey dieser Unter-

1) Siehe p. 97. F. R. S.

suchung insonderheit in Erwegung gezogen werden muß. Um aber eine jede Veränderung, welche in einem um eine Axe beweglichen Cörper vorgeht, zu bestimmen, so hat man auf das Momentum inertiae desselben zu sehen, welches erhalten wird, wann man ein jegliches Theilchen des Cörpers durch das Quadrat seiner Distantz von der Axe multiplicirt, und alle diese Producte zusammen addirt: da man, wenn der Cörper frey beweglich ist, seine Inertiam oder das Gewicht selbst zu nehmen pflegt. Ferner muß auch bey dieser Bewegung um eine Axe nicht die darauf würkende Kraft selbst, sondern derselben Momentum in Betrachtung gezogen werden, welches entsteht, wenn man die Kraft durch die Perpendicular-Distantz ihrer Direction von der Axe multiplicirt. Dieses Momentum der Kraft durch das obige Momentum inertiae dividirt, giebt die absolute Vim acceleratricem der Bewegung um die Axe: und wenn dieser Bruch durch die Distantz eines beliebigen Punkts von der Axe multiplicirt wird, so kommt die Vis acceleratrix dieses Punkts heraus. Dahingegen bey einem frey beweglichen Cörper die Kraft durch die Inertiam oder das Gewicht desselben dividirt, die Vim acceleratricem zugeben pflegt. Weil nun die Distantz des Centri oscillationis S von der Axe nehmlich $DS=f$ heraus kommt, wenn man alle Theilchen des Penduli durch die Quadrate ihrer Distantzen von der Axe multiplicirt, und die Summe aller dieser Producten, das ist das Momentum inertiae, durch das Product des Gewichts des ganzen Penduli P in die Distanz des Centri gravitatis von der Axe $DQ=g$, nehmlich durch Pg dividiret, so ist das Momentum inertiae $=Pfg$, und wird folglich auf diese Art leicht gefunden. Man pflegt gemeiniglich in Bestimmung der Veränderung, welche durch den Stoß zweyer Körper verursachet wird, nicht auf die Zeit zu sehen, in welcher dieselbe hervor gebracht wird, und viele scheinen in den Gedanken zu stehen, als wenn diese Veränderung plötzlich geschähe, und keine Zeit erfordere. Daß aber diese Meynung der Wahrheit entgegen sey, könnte durch viele Gründe dargethan werden, wann uns nicht der gegenwärtige Fall einen augenscheinlichen Beweis davon an die Hand gäbe: denn, da die Kugel ziemlich tief in das Holtz des Penduli hinein dringet, so wird niemand läugnen können, daß dazu nicht einige Zeit erfordert werde. Inzwischen ist doch diese Zeit sehr kurz, und man kann sicher annehmen, daß das Pendulum seine Stelle nicht merklich verändere, indem der Stoß seine Würkung hervor bringt. (Fig. 6, p. 108.)

Es sey also DL die natürliche Stelle des Penduli, in welcher sich dasselbe befindet, ehe die Kugel dagegen geschossen wird; in derselben sey Q das Centrum gravitatis, S das Centrum oscillationis, und folglich $DQSL$

eine Vertical-Linie. Man nenne wie vorher das Gewicht des ganzen Penduli $= P$, die Linien $DL = a$, $DQ = g$, $DS = f$. In dieser Lage werde eine Kugel, deren Gewicht $= p$, nach der Horizontal-Direction TV gegen dem Pendulo geschossen, dergestalt, daß der erste Stoß im Punkt V geschehe. Es sey $DV = h$, und b die Höhe, aus welcher ein Cörper durch den Fall eine der Kugel gleiche Geschwindigkeit bekommt; dahero wir diese Geschwindigkeit durch $\sqrt{b}$ andeuten, weil $\frac{1}{4}\sqrt{b}$ anzeigt, wie viel Rheinländische Schuhe die Kugel in einer Secunde durchlauffen würde, wann die Höhe b in tausendsten Theilchen eines Rheinl. Schues ausgedruckt wird. Lasst uns nun setzen, daß nach Verfluß einer geringen Zeit $= t$ das Pendulum in die Stelle Dl gebracht worden, und daß die Kugel schon in dem höltzernen Brett biß in u hinein gedrungen. Man nenne den kleinen Bogen $Vv = x$, und die Tiefe $vu = y$; ferner sey die Geschwindigkeit, welche des Penduli Punct v schon erlanget, $= \sqrt{v}$, und die Geschwindigkeit der Kugel in u sey $= \sqrt{u}$. Da nun in der unendlich kleinen Zeit dt, das Punkt des Penduli v durch dx, die Kugel aber durch $dx + dy$ fortrücket, so ist aus den Regeln der Bewegung

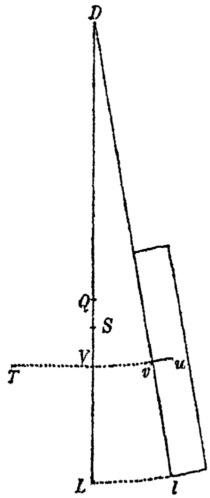


Fig. 6.

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx + dy}{\sqrt{u}}.$$

In diesem Moment wird die Kugel noch etwas tiefer in das Holtz hinein dringen, und weil das Holtz wiedersteht, so wird dadurch die Geschwindigkeit des Penduli vermehrt, die Geschwindigkeit der Kugel aber vermindert. Es sey nun V die wiederstehende Kraft des Holtzes, so wird $\frac{V}{p}$ die Vis retardatrix der Kugel seyn, dahero entspringt

$$du = -\frac{V}{p}(dx + dy).$$

Hernach in so fern diese Kraft V auf das Pendulum würket, so wird das Momentum derselben seyn $= Vh$. Da nun das Momentum inertiae des Penduli ist $= Pfg$, so wird die Vis acceleratrix des Penduli im Punct v seyn $= \frac{Vhh}{Pfg}$, folglich

$$dv = \frac{Vhhdx}{Pfg}.$$

Jene Aequation durch diese dividirt gibt

$$\frac{du}{dv} = \frac{-Pfg(dx+dy)}{phh\,dx};$$

und weil

$$\frac{dx+dy}{dx} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}},$$

so wird

$$\frac{du}{dv} = \frac{-Pfg\sqrt{u}}{phh\sqrt{v}}$$

oder

$$\frac{phh\,du}{\sqrt{u}} + \frac{Pfg\,dv}{\sqrt{v}} = 0,$$

welche Aequation integrirt giebt

$$phh\sqrt{u} + Pfg\sqrt{v} = phh\sqrt{b},$$

weil im Anfange des Stosses ist $v = 0$ und $u = b$. Da nun die Würkung des Stosses völlig aufhöret, wenn die Geschwindigkeit des Penduli im Punkt v der Geschwindigkeit der Kugel gleich worden, so wird, wenn $\sqrt{s}$ die Geschwindigkeit des Penduli in v nach vollendetem Stoß andeutet, seyn

$$phh\sqrt{s} + Pfg\sqrt{s} = phh\sqrt{b}$$

oder

$$\sqrt{s} = \frac{phh\sqrt{b}}{Pfg + phh};$$

welche Expression mit derjenigen, welche der Autor gegeben, vollkommen übereinkommt, und also biß hieher die Richtigkeit seiner Regel beweiset. Weil nun $\sqrt{s}$ die Geschwindigkeit andeutet, welche dem Pendulo im Punkt V durch den Stoß mitgetheilet wird, so wird

$$\frac{\sqrt{s}}{h} = \frac{ph\sqrt{b}}{Pfg + phh}$$

die Geschwindigkeit des Schwungs absolute anzeigen; woraus erhellet, daß der Schwung sehr klein seyn werde, wenn die Distantz DV sehr klein angenommen wird: hinwiederum aber wird der Schwung sehr klein, wenn h allzugroß angenommen wird. Hieraus lässt sich also die Frage auflösen, in welchem

Punkt die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ auf das Pendulum stossen müsse, damit dasselbe davon den stärksten Schwung bekomme. Man wird aber finden, daß dieses geschehe, wenn

$$Pfg = phh, \quad \text{oder} \quad h = DV = \sqrt{\frac{Pfg}{p}}.$$

Dieses Punkt V ist also das sogenannte Centrum percussionis, und hieraus erhellet, daß dasselbe weder das Centrum gravitatis, noch das Centrum oscillationis sey; sondern ausser diesen Punkten noch die Verhältniß zwischen dem Gewicht des Penduli, und dem Gewicht der Kugel erfordere. Wenn also das Gewicht der Kugel p in Ansehung des Penduli P sehr klein ist, so wird das Centrum percussionis sehr tief hinab fallen. Man hat aber in dem gegenwärtigen Fall nicht nöthig, auf das Centrum percussionis zu sehen, sondern es ist vielmehr rathsam, dahin zu trachten, daß der dem Pendulo eingedruckte Schwung nicht allzugroß werde. Da wir aber jetzt die Geschwindigkeit des Punkts V gefunden; so ist noch übrig zu suchen, wie weit dadurch das Pendulum erhoben werden müsse. Weil nun bekannt ist, daß ein jedes Pendulum eben die Bewegung bekommt, als wenn das ganze Gewicht desselben in dem Centro oscillationis vereiniget wäre, so müssen wir hier auf das Centrum oscillationis sehen, welches aber, da nunmehro die Kugel im Pendulo steckt, etwas verändert wird. Um dieses zu finden, so suche man das Momentum inertiae, welches wegen der Kugel seyn wird $= Pfg + phh$; solches dividire man durch $Pg + ph$, so kommt die Distantz des centri oscillationis von der Axe

$$= \frac{Pfg + phh}{Pg + ph};$$

wobey wir die Grösse der Kugel aus der Acht lassen. Wie sich also verhält h zu $\frac{Pfg + phh}{Pg + ph}$, also verhält sich die Geschwindigkeit des Puncts V nehmlich $\sqrt{s} = \frac{phh\sqrt{b}}{Pfg + phh}$ zur Geschwindigkeit des Centri oscillationis, welche seyn wird

$$= \frac{ph\sqrt{b}}{Pg + hp}.$$

Dieses muß also im folgenden Schwung durch einen Bogen steigen, dessen Sinus versus ist

$$= \frac{ppbhh}{(Pg + ph)^2}$$

und die Sehne

$$=\frac{ph}{Pg+ph}\sqrt{\frac{2b(Pfg+phh)}{Pg+ph}}.$$

Dahero die Sehne des Bogens, welchen das Punkt L beschreiben wird, seyn muß

$$=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}.$$

Da nun diese Sehne durch das Experiment gefunden und $=k$ gesetzt worden ist, so wird

$$k=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}$$

und folglich

$$\sqrt{b}=\frac{k\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}{pah\sqrt{2}}.$$

Hier bedeutet b, was wir oben v genennet haben, nehmlich die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel durch den Fall erzeuget wird. Weil also nach des Autoris Regel heraus gebracht worden

$$\sqrt{b}=\frac{k(Pfg+phh)}{pah\sqrt{2h}},$$

so sieht man, daß dieselbe nicht richtig ist. Der Autor hat sich darinne versehen, daß er geglaubt, die Bewegung des Penduli geschehe eben, als wenn das gantze Gewicht, welches er gefunden, im Punkt V vereinigt wäre, da doch dieses nur vom Centro oscillationis gilt. Um also die vom Autore gefundene Geschwindigkeit der Wahrheit gemäß einzurichten, so muß man dieselbe noch durch $\sqrt{\frac{Pgh+phh}{Pfg+phh}}$ multipliciren. Dahero wenn h grösser ist als f, so findet der Autor die Geschwindigkeit der Kugel zu klein; zu groß aber, wenn h kleiner als f. Der Unterscheid wird aber gemeiniglich so klein seyn, daß man denselben leicht aus der Acht lassen kann. Denn da p in Ansehung des P und der Unterscheid zwischen f und h sehr klein ist, so muß die vom Autore gefundene Geschwindigkeit noch mit $1+\frac{h-f}{2f}$ multipliciret werden, welches in seinem Exempel

$$1+\frac{3\frac{1}{3}}{2\cdot 62\frac{2}{3}}=1+\frac{5}{188}$$

beträgt: folglich müssen zu der oben gefundenen Geschwindigkeit von 1632 Engl. Schuen in einer Secunde noch 43 Schuh addirt werden, dahero heraus kommt 1675 Engl. Schuh in einer Secunde; welcher Unterscheid gleichwohl noch ziemlich merklich ist.

Weil p in Ansehung des P über die maassen klein ist, so wird beynahe seyn

$$\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)} = Pg\sqrt{f} + \tfrac{1}{2}ph\sqrt{f} + \tfrac{1}{2}phh:\sqrt{f} = \frac{Pfg+\frac{1}{2}ph(f+h)}{\sqrt{f}},$$

folglich

$$\sqrt{b} = \frac{Pgk\sqrt{f}}{pah\sqrt{2}} + \frac{k(f+h)}{2a\sqrt{2f}} = \frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph} + \frac{f+h}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}}.$$

Man setze also die blosse Zahl

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph} + \frac{f+h}{2f}\right) = n,$$

und exprimire f in tausendsten Theilchen eines Rheinl. Schuhes, so wird die Kugel mit der Geschwindigkeit, womit sie auf das Pendulum gestossen, in einer Secunde $\frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}}$ Rheinl. Schuhe durchlauffen können. Da nun in dem von dem Autore angeführten Exempel ist:

$$k = 17\tfrac{1}{4},\quad a = 71\tfrac{1}{8},\quad P = 56\tfrac{3}{16}\text{ ℔},\quad p = \tfrac{1}{12}\text{ ℔},\quad g = 52,\quad h = 66,\quad f = 62\tfrac{2}{3},$$

so ist

$$\frac{k}{a} = 0{,}24253,\quad \frac{P}{p} = 674{,}25,\quad \frac{g}{h} = 0{,}788,\quad \frac{Pg}{ph} = 531{,}309,\quad \frac{f+h}{2f} = 1{,}032,$$

$$\frac{Pg}{ph} + \frac{f+h}{2f} = 532{,}341,$$

folglich

$$n = 129{,}109 \quad\text{und}\quad \frac{n}{4} = 32{,}277;$$

ferner ist

$$f = 62\tfrac{2}{3}\text{ Zoll} \quad\text{und}\quad \frac{f}{2} = 2532{,}78\text{ [1]}$$

dahero

$$\sqrt{\frac{f}{2}} = 50{,}326 \quad\text{und}\quad \frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}} = 1624{,}37.$$

---

1) f ist in englischem Maß und $\frac{f}{2}$ in Tausendsteln des rheinländischen Schuhes angegeben. Im Original 2532,75. F. R. S.

Also würde die Kugel in einer Secunde 1624 Rheinl. Schuh, oder fast 1675 Engl. Schuh haben zurück legen können.

Hierbey wird auch nicht undienlich seyn zu untersuchen, wie weit die Kugel in das Brett hinein dringt. Denn da die wiederstehende Gewalt des Holtzes V beynahe allenthalben einerley ist, so entsteht aus der Aequation

$$du = \frac{-V}{p}(dx + dy)$$

durch die Integration

$$u = b - \frac{V}{p}(x + y)$$

und also

$$x + y = \frac{p(b-u)}{V};$$

die andere Aequation aber

$$dv = \frac{Vhhdx}{Pfg}$$

gibt

$$v = \frac{Vhhx}{Pfg},$$

also

$$x = \frac{Pfgv}{Vhh}.$$

Nach geendigtem Stoß aber wird

$$v = u = \frac{p^2h^4b}{(Pfg+phh)^2} = s$$

und also die Tieffe vu

$$= y = \frac{pb}{V} - \frac{s}{Vh^2}(Pfg + phh) = \frac{pb}{V} - \frac{p^2hhb}{V(Pfg+phh)} = \frac{Ppbfg}{V(Pfg+phh)}.\text{[1]}$$

Hieraus erhellet, daß je grösser die Distantz DV angenommen wird, je weniger die Kugel hinein dringe. Eben diese Tiefe vu wird auch verringert, je kleiner das Momentum inertiae des Penduli Pfg ist. Da nun das Pendulum seine gehörige Stärke haben muß, so ist diese Verringerung nicht anders in in unserer Gewalt, als daß man das Pendulum so lang, und unten so leicht mache, als immer möglich ist, und dann die Kugel gegen das unterste Ende

1) Im Original $\cdots \frac{pb}{V} - s(Pfg+phh) = \cdots$ Berichtigt von F. R. S.

desselben loßschiesse. Wenn man dieses beobachtet, so wird man vielleicht ein solches Pendulum zu Stande bringen können, wodurch man nicht nur von Pistolen- und Mußketen-Kugeln, wie der Autor gethan, sondern auch von Canonen-Kugeln die Geschwindigkeit zu bestimmen im Stande seyn wird.

VIERTE ANMERKUNG

Die Regel, welche der Autor giebt, um die Geschwindigkeit einer Kugel aus der Stärke des Stosses zu finden, hat also nur alsdenn ihre Richtigkeit, wenn die Kugel gegen das Centrum oscillationis des Penduli geschossen wird: geschieht aber der Schuß entweder tiefer oder höher, so wird im erstern Fall nach des Autoris Regel die Geschwindigkeit der Kugel zu klein, im letztern aber zu groß heraus gebracht. Es scheinet aber, daß in den meisten von dem Autore angestellten Experimenten der Schuß unter dem Centro oscillationis geschehen, und dahero müssen die von ihm bestimmten Geschwindigkeiten zu klein seyn.

Es kommt aber hier noch ein anderer Umstand zu betrachten vor, welcher von dem Autore übergangen worden, und gleichfalls verursachet, daß die Geschwindigkeit grösser wird, als die bißherige Rechnung ausweiset. Dieser Umstand ist die Resistentz der Luft, davon die Würkung darinne bestehet, daß das Pendulum von dem Stoß nicht so weit von seiner natürlichen Lage weggetrieben wird, als geschehen würde, wenn kein Wiederstand vorhanden wäre. Da nun in der Rechnung angenommen worden, daß das Pendulum nach dem Stoß so hoch steige, als wenn keine Hinderniß wäre, so ist klar, daß die wahre Länge der Sehne Ll (Fig. 5), aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel bestimmt werden muß, größer ist, als das Experiment anzeigt; weswegen folglich auch die Geschwindigkeit der Kugel um eben so viel vermehret werden muß. Ungeachtet aber dieser Unterscheid sehr geringe ist, indem bey dem ersten Schwung die von der Luft verursachte Verminderung der Bewegung gemeiniglich nicht sehr merklich ist, so wollen wir doch diese Würkung der Luft einigermassen untersuchen, damit wir völlig versichert seyn können, ob man dieselbe ohne Fehler aus der Acht lassen könne oder nicht? Wir wollen zu diesem Ende die hintere Fläche des Penduli, auf welche die Resistentz der Luft geschieht, in irgend einer Stelle während dem Auf-

steigen betrachten. Es sey also die Geschwindigkeit, womit das unterste Punkt L sich um die Axe EF (Fig. 7) bewegt, $= \sqrt{v}$ oder gleich derjenigen Geschwindigkeit, welche ein Cörper, so durch die Höhe v herunter fällt, erlangt; und die Entfernung dieses untersten Punktes L von der Axe EF sey, wie wir schon vorher gesetzt, $DL = a$. Man ziehe ferner auf der Fläche dieses Penduli nach Belieben eine Horizontal-Linie MPM, und nenne $DP = x$; so wird die Geschwindigkeit eines jeglichen Punkts in dieser Linie seyn $\frac{x}{a}\sqrt{v}$; und folglich die Höhe, aus welcher diese Geschwindigkeit erzeuget wird, $= \frac{xxv}{aa}$. Der Wiederstand der Luft gegen diese Linie MPM ist also eben so groß, als wenn eine Luft-Säule, deren Höhe $= \frac{xxv}{aa}$, darauf druckte. Wenn wir nun die Breite $MM = b$ setzen, und die Linie mm unendlich nahe mit MM parallel ziehen, so wird der Raum $MmmM = bdx$, und der Druck, den derselbe von der Luft aussteht,

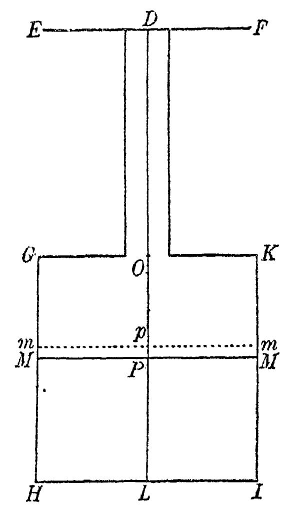


Fig. 7.

$$= \frac{bv}{aa}\, xxdx.$$

Weil aber hier nicht sowohl der Druck selbst, als dessen Moment in Betrachtung kommt, so wird das Moment

$$= \frac{bv}{aa} \cdot x^3 dx,$$

wovon das Integrale ist

$$= \frac{bv}{aa}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}DO^4\right).$$

Man setze also $DO = c$, und mache $x = a$, so kommt das Momentum der Resistentz, welche die Fläche $GHIK$ empfindet,

$$= \frac{bv}{4aa}(a^4 - c^4).$$

Die Resistentz des schmalen Theils DO kann, in Ansehung der gefundenen, theils wegen der kleinen Fläche DO, theils wegen des noch mehr verringerten Moments, aus den Augen gesetzt werden. Das Moment der Resistentz ist also gleich $\frac{b(a^4 - c^4)}{4aa}v$; um dieses gehörig auszudrucken, so rechne man das

Gewicht der Luft, welche den Raum $\frac{b(a^4-c^4)}{4aa}$, oder das Gewicht des Wassers, welches den Raum $\frac{b(a^4-c^4)}{3456aa}$ ausfüllet, aus, und setze dieses Gewicht $= R$, so wird das Moment der Resistentz der Luft seyn $= Rv$.

Lasst uns nun setzen, das Pendulum sey in seinem Hinaufsteigen in die Stelle Dl (Fig. 5) gekommen und der Winkel LDl sey $= \varphi$. Die Geschwindigkeit des Punkts l sey, wie oben gesetzt worden, $= \sqrt{v}$, die Geschwindigkeit aber des Punkts L im Anfange des Schwungs sey $= \sqrt{i}$. Wenn sich nun das Pendulum Dl aus dieser Stelle noch weiter von DL entfernet, so stehet ihm sowohl seine Schwehre, als die Resistentz der Luft im Wege: von dieser ist das Momentum, wie wir gefunden $= Rv$, wenn nehmlich das Gewicht R auf gemeldte Art bestimmet worden. Die Schwehre aber des Penduli, welche $= P$, würkt, als wenn sie ganz im Centro gravitatis q concentrirt wäre, und da die Distantz $Dq = DQ = g$, so wird das Momentum seyn $= Pg \sin.\varphi$. Das Momentum der Materie aber des ganzen Penduli ist, wie wir oben gesehen, $= Pfg$. Dahero die vermindernde Kraft der Bewegung absolute ist

$$= \frac{Pg \sin.\varphi + Rv}{Pfg};$$

im Punkt l aber wird diese Kraft

$$= \frac{Pag \sin.\varphi + Rva}{Pfg}.$$

Indem also das Punkt l durch das Elementum des Bogens Ll, welches ist $ad\varphi$, fortgeht, so wird seyn

$$dv = \frac{-Pa^2gd\varphi \sin.\varphi - Ra^2vd\varphi}{Pfg} = \frac{-a^2d\varphi \sin.\varphi}{f} - \frac{Ra^2vd\varphi}{Pfg}$$

oder

$$dv + \frac{Ra^2vd\varphi}{Pfg} = \frac{-a^2d\varphi \sin.\varphi}{f}.$$

Um diese Aequation integrabel zu machen, so multiplicire man dieselbe durch $e^{Raa\varphi : Pfg}$, wo e die Zahl bedeutet, deren Logarithmus hyperbolicus $= 1$, oder man nenne um der Kürze willen $\frac{Ra^2}{Pfg} = m$, und multiplicire mit $e^{m\varphi}$, so hat man

$$e^{m\varphi}(dv + mvd\varphi) = \frac{-a^2}{f} e^{m\varphi} d\varphi \sin.\varphi,$$

wovon das Integrale ist

$$e^{m\varphi}v = \frac{-a^2}{f}\int e^{m\varphi}d\varphi \sin.\varphi.$$

Da nun $-\int d\varphi \sin.\varphi = \cos.\varphi$, so ist

$$-\int e^{m\varphi}d\varphi \sin.\varphi = e^{m\varphi}\cos.\varphi - m\int e^{m\varphi}d\varphi \cos.\varphi.$$

Und weil $\int d\varphi \cos.\varphi = \sin.\varphi$, so wird seyn

$$\int e^{m\varphi}d\varphi \cos.\varphi = e^{m\varphi}\sin.\varphi - m\int e^{m\varphi}d\varphi \sin.\varphi,$$

und also

$$-\int e^{m\varphi}d\varphi \sin.\varphi = e^{m\varphi}(\cos.\varphi - m\sin.\varphi) + mm\int e^{m\varphi}d\varphi \sin.\varphi.$$

Woraus entspringt

$$-\int e^{m\varphi}d\varphi \sin.\varphi = \frac{e^{m\varphi}(\cos.\varphi - m\sin.\varphi)}{1+mm}.$$

Dahero erhalten wir diese Aequation:

$$e^{m\varphi}v = \frac{e^{m\varphi}aa(\cos.\varphi - m\sin.\varphi)}{(1+mm)f} + \text{Const.}$$

Diese Constans muß aus dem Anfange der Bewegung, welcher bekannt angenommen worden, bestimmt werden. Denn, wenn man setzt $\varphi = 0$, so wird $v = i$, und also bekommt man

$$i = \frac{aa}{(1+mm)f} + \text{Const.},$$

folglich

$$\text{Const.} = i - \frac{aa}{(1+mm)f}.$$

Derowegen ist

$$e^{m\varphi}v = i - \frac{aa - e^{m\varphi}aa(\cos.\varphi - m\sin.\varphi)}{(1+mm)f}.$$

Wenn wir nun setzen, daß Dl die höchste Stelle anzeige, zu welcher das Pendulum im ersten Schwung gelangen kann, und wo dasselbe wiederum herunter zu fallen beginnt, so wird daselbst $v = 0$, und also

$$(1+mm)fi = aa - e^{m\varphi}aa(\cos.\varphi - m\sin.\varphi).$$

Alsdenn aber wird die Sehne des Bogens $Ll = k$, als welche durch das Experiment erkannt wird. Dahero ist

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{k}{2a}, \quad \cos.\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}$$

und weiter

$$\cos.\varphi = 1 - \frac{kk}{2aa} \quad \text{und} \quad \sin.\varphi = \frac{k}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)};$$

folglich

$$(1 + mm)fi = aa - e^{m\varphi}aa\left(1 - \frac{kk}{2aa} - \frac{mk}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}\right)$$

oder

$$(1 + mm)fi = aa - e^{m\varphi}\left(aa - \tfrac{1}{2}kk - \tfrac{1}{2}mk\sqrt{(4aa - kk)}\right).$$

Wenn aber die Resistentz völlig verschwände, so würde $m = 0$, und die Sehne Ll etwas grösser, als k. Lasst uns also setzen, die Sehne werde in diesem Fall $= s$, so kömmt heraus $fi = \frac{ss}{2}$. Solchergestalt kan man den unbekannten Buchstaben i aus der Rechnung bringen, da dann kommt:

$$(1 + mm)ss = 2aa - e^{m\varphi}\left(2aa - kk - mk\sqrt{(4aa - kk)}\right),$$

aus welcher man die wahre Länge der Sehne s, welche statt finden würde, wenn keine Resistentz da wäre, und welche man in der Rechnung statt der observirten Sehne k gebrauchen muß, finden kann. Denn a, k und der Bruch $m = \frac{Raa}{Pfg}$ sind bekannt, und φ ist der Winkel, dessen Helfte zum Sinu hat $\frac{k}{2a}$: wenn der Sinus totus[1]) $= 1$ angenommen wird. Diese Rechnung kan aber auf zweyerley Art erleichtert werden. Erstlich weil die Resistentz sehr geringe ist, so wird m ein so kleiner Bruch, daß man für $e^{m\varphi}$ setzen kann $1 + m\varphi$, indem die höheren Dignitäten[2]) des m ohne Fehler ausgelassen werden können. Dahero wird

$$(1 + mm)ss = kk - 2maa\varphi + mkk\varphi + mk\sqrt{(4a^2 - k^2)}$$

oder

$$ss = kk - 2maa\varphi + mkk\varphi + mk\sqrt{(4aa - kk)}.$$

Zweytens ist auch gemeiniglich in dergleichen Experimenten der Winkel LDl

1) Sinus totus ist sin. 90^0. F. R. S.

2) Das Wort Dignität bedeutet Potenz. F. R. S.

von wenig Graden, und dahero der Sinus des halben Winkels φ dem Bogen selbst beynahe gleich. Dahero wird

$$\frac{1}{2}\varphi = \frac{k}{2a} + \frac{k^3}{48a^3} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{k}{a} + \frac{k^3}{24a^3}$$

und also

$$ss = kk - 2mak - \frac{mk^3}{12a} + \frac{mk^3}{a} + mk\sqrt{(4aa - kk)}.$$

Weil aber k in Ansehung des $2a$ so sehr klein, so ist

$$\sqrt{(4aa - kk)} = 2a - \frac{kk}{4a},$$

und folglich

$$ss = kk + \frac{2\,mk^3}{3a} \quad \text{oder} \quad s = k + \frac{mkk}{3a},$$

weilen wir die höheren Dignitäten von k sicher weg lassen können. In der obbeschriebenen Rechnung müssen wir also an statt der Sehne k diesen jetztgefundenen Werth $k + \frac{mkk}{3a}$ gebrauchen; und da die Geschwindigkeit der Kugel der Sehne k selbst proportional ist, so erhält man die wahre Geschwindigkeit der Kugel, wenn man die gefundene Geschwindigkeit noch mit $1 + \frac{mk}{3a}$ multipliciret, und auf diese Art kann man diese Correction, so oft dieselbe merklich ist, leicht anstellen.

Wir wollen die Probe an dem von dem Autore angeführten Exempel machen. Derselbe beschreibt zwar nicht, wie groß sein Brett, welches er auf das Pendulum geschraubt, gewesen, es scheinet aber, daß dasselbe zum wenigsten 2 Schuh lang, und eben so breit gewesen. Da nun die gantze Länge $DL = a = 71\frac{1}{8}$ Zoll, so wird in Schuhen seyn $a = 5{,}927$, also $c = 3{,}927$, und $b = 2$ Schuh. Dahero ist

$$\begin{aligned} a^4 &= 1234{,}07 \\ c^4 &= 237{,}82 \\ \hline a^4 - c^4 &= 996{,}25 \end{aligned}$$

und

$$b\,(a^4 - c^4) = 1992{,}50$$

folglich

$$\frac{b(a^4 - c^4)}{3456\,aa} = 0{,}01641.$$

Dieser Raum hält also $\frac{1641}{100000}$ Cubische Schuh. Da nun ein Cubischer Schuh Wasser ungefehr 70 ℔ wiegt, so wird das Gewicht $R = 1{,}1487$ ℔. Es ist aber $P = 56{,}187$ ℔ und gleichfalls in Schuen $f = 5{,}222$ und $g = 4{,}333$. Dahero wird

$$m = \frac{Raa}{Pfg} = 0{,}03174,$$

und da $k = 1{,}4375$ Schuh, so bekommt man:

$$\frac{mk}{3a} = 0{,}002566^{1)},$$

das ist beynahe

$$\frac{mk}{3a} = \frac{1}{400}.$$

Derowegen ist die durch obige Methode gefundene Geschwindigkeit um $\frac{1}{400}$ zu klein. Da wir nun gefunden[2]), daß die Kugel in einer Secunde 1675 Englische Schuh fort gegangen, so trägt diese Correction nicht mehr als 4 Schuh aus, dergestalt, daß die Kugel in einer Secunde 1679 Schuh hätte lauffen können. Der Autor hat nun für diesen Fall nur 1641 Schuh gefunden, da doch nach seiner eigenen Regel nur 1632 hätten heraus kommen sollen. Weil aber seine Regel selbst unrichtig, so war aus diesem Grunde schon diese Geschwindigkeit um 43 Schuh zu klein. Welcher Fehler also noch durch die Resistentz der Luft um 4 Schuh vermehret wird, dergestalt, daß des Autoris Regel in diesem Exempel die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde um 47 Schuh zu klein angiebt, welcher Unterscheid nach seinen eigenen Gründen allzugroß ist, als daß man denselben aus der Acht lassen könnte. Wir haben aber allhier die Resistentz noch gewiß zu klein angenommen, und dabey auch nicht auf die Reibung der Axe gesehen, welche auch noch etwas austragen würde: dergestalt, daß man sicher behaupten kann, daß die Kugel, womit das Experiment angestellt worden, in einer Secunde zum wenigsten 1680 Englische Schuhe durchlauffen haben würde.

1) Im Original 0,002666. Berichtigt von F. R. S.

2) Siehe p. 112. F. R. S.

NEUNTER SATZ

Die würklichen Geschwindigkeiten, womit Kugeln von unterschiedener Art aus Schieß-Gewehren getrieben werden, mit der Theorie zu vergleichen.

Wie man die Geschwindigkeit, mit welcher eine Kugel würklich fortgetrieben wird, durch die Erfahrung bestimmen soll, ist in dem vorigen Satz weitläuftig erkläret worden; und wie man die Geschwindigkeit aus der Kraft des Pulvers, und der Beschaffenheit des Gewehres, nach unserer Theorie ausrechnen soll, solches ist in dem sechsten Satz gleichfalls vollständig gewiesen worden. Dahero wollen wir hier diese beyden Geschwindigkeiten, welche die Theorie und die Experienz anzeigt, gegen einander halten, und dadurch darthun, wie genau die Theorie mit den würcklichen Bewegungen der Kugeln übereinstimme, ungeachtet dieselbe auf solche Sätze gegründet worden, welche mit diesen Experimenten keineswegs verknüpft sind.

Die ersten Experimente, welche ich hier beschreiben werde, sind mit einem Lauf, so mit demjenigen, welcher in dem Exempel des 6ten Satzes gebraucht worden, einerley Ausmessungen hatte, angestellet worden. Die Kugel hielte $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, die Länge des gantzen Laufs war 45 Zoll, und die Pulver-Kammer $2\frac{5}{8}$ Zoll lang; welche, da der Lauf im Diameter ungefehr um $\frac{1}{40}$ weiter war, als der Diameter der Kugel, accurat 12 Drachmas Pulver einschliessen konnte.

Das Gewicht der Kugel, so gebraucht worden, war $\frac{1}{12}$ ℔ Avoir du poise, und folglich einerley mit dem Exempel des siebenten Satzes; das Brett am Pendulo aber war in gegenwärtigem Fall um 4 ℔ leichter, als in gemeldtem Exempel. Aus diesen Umständen läßt sich nun erstlich nach der Theorie die Geschwindigkeit der Kugel, und aus dieser ferner die Sehne Ll des Bogens, welchen das Pendulum nach dem Stoß beschreiben muß, ausrechnen: welche, wenn die Theorie richtig ist, mit der Länge, so das Band im Experiment anzeigt, völlig einerley seyn muß. Wie genau aber diese Uebereinstimmung in unsern Experimenten eintreffe, erhellet aus folgender Tabelle.

No.	Gewicht des Pulvers in Drachm.	Sehne des beschriebenen Bogens auf dem Band gemessen Zoll	Eben dieselbe nach der Theorie Zoll	Fehler der Theorie Zoll
1	12	18,7	19,0	+,3
2	12	19,6	19,0	−,6
3	6	13,6	13,4	−,2

Die nächstfolgenden Experimente sind mit eben diesem Lauf angestellt worden; allein das Bret am Pendulo war jetzt etwas schwehrer, als in dem Exempel des 7ten Satzes. Hier ist auch nicht immer der gantze Raum hinter der Kugel mit Pulver angefüllet worden. Dahero in der folgenden Tabelle die Länge des Raums hinter der Kugel AF (Fig. 1) besonders bemercket wird:

No.	Raum hinter der Kugel AF(Fig. 1) in Zoll	Gewicht des Pulvers in Drachm.	Sehne des Bogens auf dem Band gemessen Zoll	Eben dieselbe sollte nach der Theorie seyn Zoll	Fehler der Theorie Zoll
4	$2\frac{5}{8}$	6	11,9	12,1	+,2
5	$2\frac{5}{8}$	6	12,2	12,1	−,1
6	$1\frac{1}{4}$	6	13,2	13,6	+,4
7	$1\frac{1}{4}$	6	13,9	13,6	−,3
8	$2\frac{5}{8}$	12	16,7	17,2	+,5
9	$2\frac{5}{8}$	12	17,5	17,2	−,3
10	$2\frac{5}{8}$	12	16,9	16,8	−,1
11	$2\frac{5}{8}$	12	17,0	16,8	−,2
12	$2\frac{5}{8}$	6	11,7	11,5	−,2
13	$2\frac{5}{8}$	6	11,1	11,5	+,4
14	$2\frac{5}{8}$	12	16,7	16,3	−,4

Die letzten fünf aus der Theorie entsprungenen Zahlen sind wegen der vielen Kugeln, welche schon im Bret steckten, corrigiret worden; deren Ge-

wicht, weil inzwischen viele andere Experimente angestellt worden, schon über 2 ℔ angewachsen war. Um dieser Ursache willen, da das Gewicht des Penduli vermehret worden, so muß die Weite des durch den Stoß verursachten Schwungs nach Proportion vermindert werden.

Die folgenden Experimente sind mit einem andern Lauf, der mit dem vorigen einerley Caliber hatte, aber nur 12,375 Zoll lang war, angestellt worden. Um nun diesen von dem vorigen zu unterscheiden, so wollen wir die Experimente, so mit dem ersten Lauf angestellt worden, mit dem Buchstaben A, diejenigen aber, wo wir diesen kürtzern gebraucht, mit dem Buchstaben C bezeichnen. Das Bret, so auf das Pendulum geschraubt worden, war anfänglich etwas leichter, als dasjenige, welches bey dem Exempel des siebenten Satzes gebraucht und beschrieben worden.

No.		Raum AF (Fig. 1) Zoll	Gewicht des Pulvers Drachm.	Sehne des Bogens auf dem Band gemessen Zoll	Eben dieselbe nach der Theorie Zoll	Fehler der Theorie Zoll
15	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,7	12,8	+ ,1
16	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,6	12,8	+ ,2
17	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,4	12,8	+ ,4
18	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,0	17,3	+ ,3
19	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,2	17,2	0
20	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,1	17,2	+ ,1
21	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,2	17,2	0
22	A	$2\frac{5}{8}$	6	12,4	12,2	— ,2

In einigen von den folgenden Versuchen ist ein dritter Lauf gebraucht worden, dessen Caliber mit den beyden vorigen einerley, die Länge aber nur 24,312 Zoll war. Diesen Lauf wollen wir mit dem Buchstaben B von den andern unterscheiden. Das Brett, so auf das Pendulum befestigt worden, war anfänglich nur um etwas wenigs schwerer, als das in dem siebenten Satz. Weil nun dasselbe durch die vielen Versuche merklich am Gewicht zugenommen, so habe ich auch die aus der Theorie entsprungenen Zahlen gehöriger massen vermindert.

No.		Raum hinter der Kugel AF (Fig. 1) Zoll	Gewicht des Pulvers Drachm.	Sehne des Bogens auf dem Band gemessen Zoll	Eben dieselbe nach der Theorie Zoll	Fehler der Theorie Zoll
23	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,1	17,2	+ ,1
24	A	$2\frac{5}{8}$	9	15,2	15,0	— ,2
25	A	$2\frac{5}{8}$	9	15,4	15,0	— ,4
26	C	$2\frac{5}{8}$	12	11,5	12,8	+ 1,3
27	C	$2\frac{5}{8}$	12	11,5	12,8	+ 1,3
28	C	$2\frac{5}{8}$	6	8,7	9	+ ,3
29	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,3	12,5	+ ,2
30	B	$2\frac{5}{8}$	12	14,4	14,4	0
31	B	$2\frac{5}{8}$	12	14,4	14,4	0
32	B	$2\frac{5}{8}$	6	10,3	10,5	+ ,2
33	A	$1\frac{3}{4}$	8	14,7	14,5	— ,2
34	A	4	12	15,7	15,3	— ,4

Der Fehler in dem 26 und 27sten Experiment, als welcher viel grösser ist, als bey irgend einem andern Experiment, so ich angestellt, kommt, wie ich muthmaße, von einem Versehen in der Abwägung des Pulvers her, oder weil der Lauf, (welcher in der That vorher an einem feuchten Ort gelegen) etwas dampfig angelaufen war; welcher Umstand, wie ich durch die Erfahrung befunden, der Gewalt des Pulvers sehr merklich Abbruch thut.

Die folgenden Experimente sind mit einem weit schwehrern Pendulo gemacht worden. Das Gewicht desselben war 97 ℔, sein Centrum gravitatis war 55,625 Zoll von der Axe entfernet, und 200 kleine Schwingungen desselben geschahen in einer Zeit von $255\frac{1}{4}$[1]) Secunden: dahero das Centrum oscillationis von der Axe 63,9 Zoll entfernet gewesen seyn muß. Ueber dieses ist auch bißweilen ein anderer Lauf, so nur 7,06 Zoll lang war, und im Caliber 0,83 hielt, gebraucht worden, in welchen die Kugel so gedräng hinein gieng, daß kein Spielraum übrig blieb; das Gewicht der Kugel war $33\frac{1}{2}$ Drachm. Dieser Lauf soll mit dem Buchstaben D angedeutet werden.

---

1) In Eulers Übersetzung $265\frac{1}{4}$, dagegen im englischen Original $255\frac{1}{4}$. F. R. S.

No.		Raum hinter der Kugel AF (Fig. 1) Zoll	Gewicht des Pulvers Drachm.	Sehne des Bogens auf dem Band gemessen Zoll	Eben dieselbe nach der Theorie Zoll	Fehler der Theorie Zoll
35	A	$2\frac{5}{8}$	12	9,2	9,2	0
36	A	$2\frac{5}{8}$	12	9,5	9,2	—,3
37	A	$5\frac{1}{4}$	24	11,7	11,3	—,4
38	A	$7\frac{7}{8}$	36	13,2	12,6	—,6
39	A	$2\frac{5}{8}$	12	9,3	9,1	—,2
40	A	$1\frac{3}{4}$	8	7,6	8,1	+,5
41	C	$2\frac{5}{8}$	12	6,1	6,6	+,5
42	C	$2\frac{5}{8}$	12	6,5	6,6	+,1
43	B	$2\frac{5}{8}$	12	8,0	8,2	+,2
44	B	$2\frac{5}{8}$	12	8,3	8,2	—,1
45	A	$2\frac{5}{8}$	12	9,5	9,1	—,4
46	A	$2\frac{5}{8}$	12	9,1	9,1	0
47	A	$2\frac{5}{8}$	6	7,2	6,5	—,7
48	A	$2\frac{5}{8}$	6	6,7	6,5	—,2
49	C	$2\frac{5}{8}$	12	6,8	6,7	—,1
50	C	$2\frac{5}{8}$	12	7,5	6,7	—,8
51	C	$2\frac{5}{8}$	6	4,7	4,8	+,1
52	C	$2\frac{5}{8}$	6	5,0	4,8	—,2
53	D	$2\frac{1}{4}$	12	7,0	7,2	+,2
54	D	$2\frac{5}{8}$	12	7,1	6,8	—,3
55	D	$2\frac{5}{8}$	6	4,7	4,8	+,1
56	D	$2\frac{5}{8}$	6	4,8	4,8	0
57	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,4	6,5	+,1
58	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,4	6,5	+,1
59	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,6	6,5	—,1
60	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,7	6,5	—,2
61	A	$2\frac{1}{16}$	12	9,0	9,1	+,1

Der Fehler in dem 50sten Experiment, so in dieser Reihe der gröste ist, wurde ohne Zweifel von dem Wind verursachet: denn das 49ste, welches unmittelbar vorher auf eben die Art und mit einer gleichen Menge Pulver angestellt worden, weichet nur sehr wenig von der Theorie ab. Der Ueberschuß bey dem 38ten Experiment über die Theorie kam zum Theil von dem Stoß der Flammen gegen das Pendulum her, welcher Umstand bey dieser starken Ladung deutlich bemerkt werden konnte.

Diese Theorie wird auch ferner durch solche Experimente, wo sehr wenig Pulver zur Ladung genommen worden, bekräftiget. Wir haben bißher angenommen, daß das Pulver, wenn es sich entzündet, mit einem biß zur weissen Hitze geglüeten Eisen einerley Grad der Hitze bekomme. Wir haben aber auch bemerket, daß bey einer kleinen Quantität Pulver die Hitze geringer seyn müße: folglich wird in diesen Fällen die Kraft des Pulvers kleiner, als die vorige Regel anzeigt.

Diesen Abgang der Gewalt bei kleinen Ladungen haben wir auch würklich in vielen Experimenten wahrgenommen. Laßt uns zu diesem Ende hier das Exempel des 7ten Satzes erwegen, wo nach der Theorie die Geschwindigkeit der Kugel beyläufig 1670 Schuh in einer Secunde seyn sollte, und eben diese Geschwindigkeit wird auch durch die Experimente, wenn man zwischen den gefundenen Zahlen ein Mittel nimmt, heraus gebracht. Wenn man nun eben diesen Lauf, und eben denselben Platz der Kugel darinn beybehält, anstatt aber 12 Drachm. Pulver, so viel nehmlich an gemeldetem Orte genommen worden, nur eine Drachmam ladet, so folget aus den daselbst angenommenen Grund-Sätzen, daß, wenn die Elasticität in der kleinern Ladung nach Proportion eben so groß wäre, als in der grössern, alsdenn die Geschwindigkeit der Kugel, welche mit der kleinern Ladung geschossen wird, sich zu der Geschwindigkeit, welche durch die grössere Ladung hervor gebracht wird, verhalten müßte, wie die Quadrat-Wurzeln aus der Quantität des Pulvers in den beyden Ladungen, das ist, wie 1 zu $\sqrt{12}$. Da nun die Geschwindigkeit, welche 12 Drachm. geben, ist 1670 Schuh in 1″, so müßte die Geschwindigkeit, welche nur durch 1 Drachm. hervorgebracht wird, ungefehr 482 Schuh in 1″ betragen. Ich habe aber durch öffters wiederholte Versuche, welche alle sehr wenig von einander unterschieden waren, befunden, daß die würckliche Geschwindigkeit, welche die Kugel in diesem Fall mit der Ladung von 1 Dr. bekommt, sich kaum auf 400 Schuh in 1″ belaufe. Woraus klar ist, daß die Ausdehnungs-Kraft von einer Dr. Pulver, wenn dieselbe Feuer fängt, kleiner ist, als in unserer Theorie angenommen worden.

Gleichergestalt, wenn in eben diesem Exempel 3 Dr. Pulver geladen werden, so habe ich durch viele Experimente die würkliche Geschwindigkeit der Kugel nicht grösser, als 720 bis 740 Schuh in 1″ befunden; da dieselbe doch nach der Theorie, wenn aus 3 Dr. Pulver eine eben so starke Elasticität erzeuget würde, als aus 12 Dr., in einer Secunde 835 Schuh seyn müßte. Hieraus folget also, daß bey der Entzündung von 3 Dr. Pulver die Elasticität, und folglich auch die Hitze geringer seyn müße, als wenn 12 Dr. angezündet werden, wie die Theorie erfordert.

Diese geringeren Grade der Elasticität des Pulvers, wenn wenig zugleich entzündet wird, verhalten sich zu demjenigen Grad, welchen wir für grössere Quantitäten oben fest gesetzet, wie die Quadrata der Geschwindigkeiten, welche der Kugel in eben demselben Lauf eingedrückt werden. Hieraus folget, daß die Elasticität bey der Entzündung einer Drachm. sich zur Elasticität bey der Entzündung 12 Drachm. unter einerley Umständen verhalte, wie 2 zu 3, und daß die Elasticität bey der Entzündung 3 Drach. sich zur Elasticität bey der Entzündung 12 Drach. verhalte, beynahe wie 3 zu 4; wenn man nehmlich annimmt, daß diese geringern Elasticitäten auch gleichförmig in allen Theilen der Ausdehnung abnehmen. Allein, dieser Umstand findet hier nach aller Wahrscheinlichkeit nicht statt. Denn da das Abnehmen der Elasticität von der Verminderung der Hitze herkommt, so scheinet der Wahrheit vielmehr gemäß zu seyn, daß in der Entzündung geringerer Quantitäten, die Hitze nicht nur anfänglich kleiner ist, sondern auch gleichfalls hernach immer mehr abnimmt, indem die Kugel durch den Lauf fort getrieben wird, und daß folglich dieser von der Hitze verursachte Zuwachs der Elasticität um so vielmehr abnehme, je länger die Würckung des Pulvers auf die Kugel dauret; welcher Umstand nicht Platz findet, wenn die Quantität Pulver nach dem Lauf, durch welchen dasselbe seine Gewalt ausübet, wohl proportionirt wird.

ZUSATZ

Solcher Gestalt haben wir also unsere Theorie durch die deutlichsten Proben bestätiget, welche in der Uebereinstimmung mit einer zahlreichen Menge von Experimenten, so unter allen verschiedenen Umständen, welche die Natur der Sache darreicht, angestellt worden, bestehen. Hierbey ist nun noch nöthig zu erinnern, daß diese Experimente meistentheils gemacht und aufgezeichnet worden sind, ehe wir einige von den Rechnungen, wodurch dieselben mit der Theorie verglichen worden, angestellt haben: ob ich gleich

schon vorher von der Wahrheit dieser Theorie, so wie dieselbe hier vorgetragen, überzeuget gewesen, ehe ich diese Versuche unternommen.

Die Verschiedenheit dieser Experimente, und die so genaue Uebereinstimmung derselben mit der Theorie, lassen uns also an der Gewißheit derselben im geringsten nicht mehr zweifeln. Denn wir haben die Würckung des entzündeten Pulvers so wohl auf Kugeln von verschiedenem Gewicht, als in Läufen von verschiedener Länge, nehmlich von 7 Zoll biß 45 Zoll untersuchet. Wir haben auch die Ladung des Pulvers am Gewicht von 6 Drachm. biß auf 36 Drachm. verändert, und haben auch dieselben auf verschiedene Art angebracht, dergestalt, daß dieselbe bißweilen den gantzen Raum hinter der Kugel angefüllet, bißweilen aber nur einen Theil dieses Raums eingenommen. Und wir haben bey allen diesen verschiedenen Umständen befunden, daß unsere Theorie immer die wahre Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel heraus getrieben worden, angezeiget hat. Wenn auch, wie bey sehr kleinen Ladungen geschieht, einige Ausnahme von der allgemeinen Regel, welche wir fest gesetzet, gemacht werden muß, so war dieselbe immer so beschaffen, wie solches die Theorie erforderte. Diese Theorie, welche so genau mit der Erfahrung in so verschiedenen Versuchen übereinstimmt, muß also nothwendig auf die wahre und eigentliche Bestimmung der Gewalt und Würkung des Pulvers gegründet seyn, weil sonsten keine solche genaue Uebereinstimmung Platz haben könnte.

In dieser Theorie, wie dieselbe hier fest gesetzet worden, wird nun behauptet, daß ungefehr $\frac{3}{10}$ von der Materie des Pulvers durch die plötzliche Entzündung in eine fortdaurende subtile und flüßige Materie verwandelt werde, deren Elasticität in Ansehung ihrer Hitze und Dichte mit der Elasticität der Luft unter gleichen Umständen einerley sey. Es wird ferner angenommen, daß die ganze Gewalt, welche das Pulver in seinen heftigsten Würkungen ausübet, in nichts anders, als in der Ausdehnungs-Kraft dieser subtilen erzeugten Materie bestehe: und diese Grundsätze setzen uns, wie wir gesehen haben, in Stand, die Geschwindigkeit der Kugeln, welche aus aller Gattung Feuer-Röhren geschossen werden, zu bestimmen, und sind in allen Begebenheiten, wo es auf die Bestimmung der Gewalt des Pulvers ankömmt, völlig hinreichend. Ob aber diese subtile flüßige Materie, welche aus der Entzündung des Pulvers entsteht, eine wahre und würkliche Luft, oder ein sonderbares Wesen sey, wollen wir hier nicht ausmachen,* weil diese Frage mit unserem gegenwärtigen Vorhaben auf keinerley Art in einiger Verknüpfung steht.

Aus dieser Theorie können nun viel Schlüsse von der grösten Wichtigkeit in dem Practischen Theil der Artillerie hergeleitet werden. Hieraus läßt sich nehmlich die Dicke eines Stückes, damit dasselbe um die Gewalt des Pulvers auszuhalten die gehörige Stärcke besitze, leicht bestimmen, indem die Kraft des Pulvers leicht bekannt ist. Ferner erhellet hieraus auch, wie wenig die Vorschläge einiger neuern Scribenten gegründet seyn, welche vermeynet durch besondere Formen der Pulver-Kammer in Stücken und Mörsern einen grösseren Vortheil zu ziehen; denn alle ihre Anschläge beruhen in diesem Stück auf gantz unrichtigen Begriffen, welche sie von der Würckung des entzündeten Pulvers hegeten. Wir lernen auch aus dieser Theorie, daß es nöthig sey, hinter der Kugel einen gleich grossen Raum in der Canone zu lassen, wenn durch einerley Ladung die Kugel mit einerley Geschwindigkeit heraus getrieben werden solle; indem aus unseren Gründen erhellet, daß eben dieselbe Quantität Pulver einen grössern oder kleinern Grad der Krafft bekomme, nachdem der Raum, worein dasselbe eingeschlossen wird, kleiner oder grösser ist. Der Hand-Griff, dessen ich mich, um hierinne zu einer Gewißheit zu gelangen, bedienet, war, daß ich an den Setzkolben einige Zeichen gemacht; und dieses ist ein Vortheil, welcher nicht aus der Acht zu lassen, wenn die Canone unter einer Elevation abgefeuert wird, welches insonderheit bei denjenigen Schüssen zu mercken ist, welche von den Franzosen Batteries à Ricochet genennt werden.

Aus der fortdaurenden Würkung des Pulvers, und der Art der Ausdehnung, wie dieselbe in der Theorie beschrieben ist, nebst der Länge des Stückes, kann einer von den fürnehmsten Umständen, welche zu einer guten Anlage der Artillerie erfordert werden, in sein völliges Licht gesetzet werden. Alle Practici kommen darinn überein, daß man keinen gewissen Schuß thun könne, wann das Stück nicht auf einem festen Grund und Boden steht. Denn wenn sich der Boden durch die erste Gewalt des Pulvers erschüttern läßt, so muß das Stück nothwendig in seiner Richtung verrücket, und folglich der Schuß ungewiß werden. Diesem Uebel vorzubeugen, so pflegt man gemeiniglich den Grund, worauf die Canone ruhet, rückwärts auf eine ziemliche Tiefe sehr fest zu machen, so, daß das Stück nicht nur im ersten Anfang der Bewegung, sondern auch in währendem Zurückstossen, meistentheils immer unverrückt bleibe. Es ist aber genugsam klar, daß wenn die Kugel einmal aus dem Stücke heraus gefahren, ihre Bewegung nicht weiter durch die Erschütterung desselben oder des Grundes verrücket werden könne. Durch eine leichte

Rechnung aber findet man, daß die Kugel aus einem Stück, welches 10 Schuh lang, und mit einer Ladung von 16 ℔ Pulver eine 24 Pfündige Kugel schiesset, völlig heraus getrieben wird, ehe das Stück um einen halben Zoll zurück tritt. Dahero, wenn der Grund nur bey dem Anfang des Zurückstossens des Stückes eine genugsame Festigkeit hat, so ist es gleich viel, ob der übrige Theil des Grunds die gehörige Festigkeit habe oder nicht: indem die Erschütterung, so dasselbige, nachdem es durch den ersten $\frac{1}{2}$ Zoll zurück gegangen, bekommen möchte, keinen weitern Einfluß auf die Bewegung der Kugel haben kann. Hieraus wird man also leicht eine weit bequemere und vortheilhaftere Art, den Grund der Batterien zu befestigen, ausfündig machen, und alle überflüßige Arbeit vermeiden können.

Aus dieser Theorie erhellet auch, wie gröblich diejenigen Autores gefehlet haben, welche die Gewalt des Pulvers, oder doch zum wenigsten einen merklichen Theil derselben, bloß allein der Würkung der Luft, welche theils in den Pulver-Körnern, teils in den Zwischen-Räumchen befindlich ist, haben zuschreiben wollen. Dieselben vermeynten, ob sie sich gleich ziemlich undeutlich hierüber erkläret hatten, daß sich diese Luft in ihrem natürlichen Zustande der Elasticität befände, und den Zuwachs der Kraft bloß allein von der Hitze bey der Entzündung erhalte. Allein, aus demjenigen, was wir oben in dem fünften Satz über die Vermehrung der Elasticität der Luft, welche durch die Hitze verursachet wird, durch die Erfahrung dargethan haben, können wir sicher schliessen, daß die Hitze der Entzündung die Elasticität der Luft nicht über fünfmal vermehren könne: folglich kann die aus diesem Grund entstehende Kraft nicht mehr, als den 200sten Theil der würklichen Kraft, so das Pulver ausübet, betragen.

Nachdem wir also den Beweis unserer Theorie überhaupt zu Ende gebracht haben, so wollen wir zur Untersuchung einiger anderen, besonderen Umstände hierüber fortschreiten, welche, ob sie gleich aus den hier ausgeführten Grund-Sätzen gantz natürlich folgen, und leicht erkläret werden können, dennoch wegen ihrer Neuigkeit, und sonderbaren Beschaffenheit eine umständlichere Erläuterung verdienen.

ERSTE ANMERKUNG

In diesem Satz hält der Autor die nach seiner Theorie berechnete Geschwindigkeit der Kugel, und diejenige, welche die im vorigen Satz beschriebene Maschine zu erkennen giebt, gegen einander, und findet durchgehends eine so genaue Uebereinstimmung, dergleichen man von einer falschen Theorie kaum erwarten könnte. Um nun hierüber eine fleißigere Untersuchung anzustellen, so wollen wir erstlich die zu diesem Ende gemachten Versuche, und die daraus hergeleiteten Schlüsse nach demjenigen, was wir bey dem vorigen Satz angemerket haben, in Erwegung ziehen. Wir haben aber daselbst gewiesen, daß die von dem Autore gebrauchte Regel, um aus der vermittelst des Bandes gemessenen Länge der Sehne Ll (Fig. 5) die Geschwindigkeit der Kugel zu bestimmen, unrichtig, und nur in diesem Fall der Wahrheit gemäß sey, wenn die Kugel gegen das Centrum oscillationis des Penduli selbst geschossen wird. Denn wenn man das Gewicht des Penduli durch P, das Gewicht der Kugel durch p, ausdruckt, und setzet die Länge des gantzen Penduli von der Axe biß zum Band, $DL = a$, die Entfernung des Centri gravitatis von der Axe $DQ = g$, die Entfernung des Centri oscillationis von der Axe $DS = f$, die Entfernung des Puncts V, wo die Kugel anstößt, von der Axe $DV = h$, und endlich die Länge der Sehne, welche nach dem Stoß das Band anzeiget, $Ll = k$, so wird nach des Autoris Regel die Geschwindigkeit der Kugel durch diese Formul

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph} + \frac{h}{f}\right)\frac{f}{\sqrt{2h}}$$

ausgedruckt; in der That aber sollte an statt derselben diese gesetzt werden

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph} + \frac{f+h}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}},$$

als welche wir oben für den Fall, da p gegen P sehr klein ist, heraus gebracht haben. In beyden ist zwar nicht auf den Widerstand der Luft gesehen worden; wir können aber denselben, indem er nur etliche wenige Schuh austrägt, sicher aus den Augen setzen. Allein, die Unrichtigkeit der vom Autore gebrauchten Regel kann öffters einen merklichen Unterscheid in der Grösse der Geschwindigkeit der Kugel verursachen; wie bey dem vorher berechneten Exempel geschehen, da die vom Autore gefundene Geschwindigkeit

aus diesem Grunde um 43 Schuh zu klein heraus gekommen, welches ungefehr den 40sten Theil der ganzen Geschwindigkeit austrägt. Dieser Unterscheid kommt daher, daß in diesem Versuche die Kugel unter dem Centro oscillationis S gegen das Pendulum geschossen worden, und je grösser die Distanz zwischen dem Centro oscillationis und dem Punct V, wo die Kugel anstößt, ist, um so viel mehr wird auch die nach des Autoris Regel angestellte Rechnung von der Wahrheit abweichen. Weilen in beyden Formuln die Quantitäten $\frac{h}{f}$ und $\frac{f+h}{2f}$ in Ansehung der erstern Quantität $\frac{Pg}{ph}$ sehr klein sind, so wird sich fast immer die nach des Autoris Regel gefundene Geschwindigkeit zu der wahren verhalten, wie $\sqrt{f}$ zu $\sqrt{h}$. Je mehr also h von f unterschieden ist, je grösser wird auch der Fehler seyn. Da nun der Autor, wie aus seinen Experimenten erhellet, ziemlich viel Kugeln gegen ein Bret geschossen, und doch nimmer zwey an einerley Stelle haben anstossen können, so ist klar, daß der Unterscheid zwischen f und h bald grösser bald kleiner gewesen.

In dem gegenwärtigen Fall war $f = 62\frac{2}{3}$ Zoll, und die gantze Länge des Penduli $71\frac{1}{8}$ Zoll. Wenn also bey einem Experiment, wie leicht zu vermuthen, die Distanz $DV = h$ gewesen wäre 69 Zoll, so würde sich die vom Autore gefundene Geschwindigkeit zur wahren verhalten haben, wie $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ zu $\sqrt{69}$, das ist bey nahe 20 zu 21, und würde also der Fehler den zwanzigsten Theil austragen, um welchen die gefundene Geschwindigkeit zu klein seyn würde. Wenn das Centrum gravitatis ungefehr mitten ins Brett gefallen wäre, da dasselbe von der Axe 52 Zoll weit entfernet gewesen, so wäre zu vermuthen, daß auch bißweilen Kugeln gegen dasselbe und auch noch höher, als etwa nur 45 Zoll weit von der Axe geschossen worden. In diesen Fällen würde die vom Autore gefundene Geschwindigkeit der Kugel zu groß seyn, und wenn die Distanz DV nur $= 45$ Zoll wäre, so müßte sich die gerechnete Geschwindigkeit zur wahren verhalten, wie $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ zu $\sqrt{45}$, das ist, wie 13 zu 11. Dahero würde dieselbe mehr als um den sechsten Theil zu groß seyn. Weil nun in allen diesen Experimenten der Autor nicht bemerket, wie weit das Punctum V, wo die Kugel aufgestossen, von der Axe des Penduli entfernet gewesen, so ist auch nicht möglich zu sagen, wie groß bey einem jeden der Fehler sey. Wenn die gefundene Geschwindigkeit ungefehr 1700 Schuh in einer Secunde austrägt, so könnte es seyn, daß diese Zahl in einigen Fällen um 85 Schuh zu klein, in andern aber um 262[1]) Schuh zu groß wäre. Oder

1) Im Original 283. Berichtigt von F. R. S.

da der Autor nicht die würckliche Geschwindigkeit selbst, sondern nur die Länge der Sehne $Ll = k$, als welcher die Geschwindigkeit proportional ist, aufgezeichnet: wenn dieselbe 16 Zoll groß ist, so konnte der Fehler in diesem Maaß 0,8 Zoll, wenn die Kugel zu unterst an das Bret geschossen wird, und gar 2,5[1]) Zoll, wenn dieselbe zuoberst geschossen worden, austragen. In dieser Ungewißheit wäre also aus der Uebereinstimmung der Experimenten mit der Theorie nicht viel zum Vortheil dieser letztern zu schliessen.

Es erhellet auch nicht aus der Beschreibung dieser Experimente, daß der Autor sehr sorgfältig in Ausmessung der Distanz $DV = h$ gewesen; denn er bringt für gleiche Fälle, da mit gleicher Ladung aus eben demselben Lauf mehrmalen geschossen worden, immer einerley Länge für die Sehne $Ll = k$ heraus; da doch kaum zu glauben ist, daß die Kugel bey allen diesen verschiedenen Schüssen in einerley Höhe auf das Bret angestossen. Denn wenn er auch ja beständig auf eben denselben Punct hätte schiessen können, so hätte er doch solches nicht thun dörfen, damit nicht eine Kugel auf die andere stiesse: folglich mußte er mit Fleiß immer auf verschiedene Punkte des Brets schiessen, und da die Kugel $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter hatte, so mußte immer eine von der andern zum wenigsten 1 Zoll entfernet seyn. Er sagt auch nicht, und es ist auch nicht zu vermuthen, daß alle Kugeln in eine Horizontal-Linie des Brets gegangen, und also alle von der Axe gleich weit entfernet gewesen; wenn aber eine nur um einen Zoll höher oder niedriger das Bret getroffen, so müßte die Sehne Ll schon um 0,1 Zoll grösser oder kleiner angesetzt werden, wenn nehmlich die Länge der gantzen Sehne über 10 Zoll ist; ein Unterscheid von zwey Zollen würde in der Sehne 0,2 Zoll, von 3 Zollen 0,3 Zoll und so fort austragen. Dieser Fehler würde nun von der Unrichtigkeit der Regel des Autoris entspringen, in so fern dieselbe von der Wahrheit abweicht. Wenn aber auch gleich dieselbe richtig wäre, so müßte man doch in Ausmessung der Distanz $DV = h$ um so viel mehr Fleiß anwenden. Denn da nach dem Autore die Geschwindigkeit der Kugel bey nahe ist wie $\frac{k}{a} \cdot \frac{Pfg}{ph\sqrt{2h}}$, das ist unter einerley Umständen, wie $\frac{1}{h\sqrt{h}}$, so sieht man wohl, daß ein geringer Unterscheid in dieser Distanz h nicht aus der Acht gelassen werden könne. Laßt uns setzen, daß wenn $h = 66.$ Zoll gewesen, die Sehne $k = 16$ Zoll betragen; so folgt, daß wenn unter eben diesen Umständen die Distanz h nur um 1 Zoll grösser oder kleiner wäre, die Sehne k schon

1) Im Original 2,6. Berichtigt von F. R. S.

um $\frac{1}{3}$ Zoll grösser oder kleiner würde. Da wir nun dergleichen merklichen Unterscheid in der berechneten Länge der Sehne für gleich starke Schüsse nicht antreffen, so müssen entweder dieselben alle auf eine Horizontal-Linie am Bret gegangen seyn, oder der Autor hat auf die verschiedenen Entfernungen des Puncts V von der Axe in seiner Rechnung nicht gesehen; weil nun das erstere nicht wahrscheinlich ist, so müßte man das letztere zugeben. Wir wollen aber um die Ehre dieser Experimenten zu retten, lieber glauben, daß wenn auch nicht alle Schüsse auf eine Horizontal-Linie am Bret gegangen, der Unterscheid in der Höhe doch nimmer über einen Zoll ausgetragen; in welchem Fall gleichwohl dieser Fehler von $\frac{1}{3}$ Zoll von dem Autore nach seiner grossen Accuratesse nicht hätte übergangen werden sollen; als welcher Umstand viel mehr austrägt, als die Vermehrung des Gewichts des Penduli durch die schon darein geschossenen Kugeln, worauf doch der Autor so sorgfältig Acht giebt, und nach denselben die berechnete Länge der Sehne vermindert.

Es findet sich aber in der Beschreibung der Maschine ein Umstand, welcher uns hierüber eine hinlängliche Erläuterung geben kann. Denn, wo der Autor seine Regel vorträgt, nach welcher er die Geschwindigkeit der Kugel bestimmt, da nennet er das Punct, gegen welches die Kugel geschossen wird, das Mittel-Punct des Brets, und richtet auf dasselbe seine Rechnung dergestalt, daß er nachgehends aus demselben alle Fälle durch die Regel Detri berechnet. Weil er nehmlich befunden, daß, wenn die Länge der Sehne nach dem Band gemessen $17\frac{1}{4}$ Zoll ist, die Geschwindigkeit der Kugel 1641 Schuh in einer Secunde betrage, so giebt er für einen jeglichen andern Fall, da eine gleich schwehre Kugel in eben dieses Brett geschossen wird, diese Regel: Wie sich verhalten $17\frac{1}{4}$ Zoll zu der im vorgelegten Fall gefundenen Länge der Sehne, also verhalten sich 1641 Schuh zu dem Wege, welchen die Kugel in einer Secunde durch zu lauffen vermögend ist. Dieser Regel scheinet sich nun der Autor beständig bedienet zu haben, nachdem er einmal für einen Fall die Geschwindigkeit nach seinen Grundsätzen ausgerechnet hatte. Wenn sich die Sache so verhält, so muß in den meisten Rechnungen ein doppelter Fehler stecken. Denn erstlich ist die angenommene Zahl 1641, wie wir gewiesen haben, zu klein, und solte für dieselbe 1675 gesetzt werden. Hernach aber kann die Bedingung, daß alle Schüsse auf das Mittel-Punct des Bretts, oder 66 Zoll weit von der Axe geschehen, unmöglich statt finden. Denn in der letzten angeführten Liste von Experimenten finden sich 27 Schüsse, so in ein Brett gegangen. Weil nun von denselben je zween Schüsse zum wenigsten um einen Zoll von einander entfernet seyn müssen, die Breite

aber des Bretts nicht viel über einen Schuh betragen, so können nicht alle auf eine Horizontal-Linie in das Brett gegangen seyn; folglich müssen einige davon das Brett zum wenigsten um einen Zoll höher oder tiefer getroffen haben, und nach allen Umständen ist zu vermuthen, daß dieser Unterscheid öfters 2, 3 und mehr Zoll ausgetragen, welcher also in der berechneten Länge der Sehne zuweilen einen Unterscheid von einem gantzen Zoll hätte verursachen müssen. Dieser Umstand von dem Mittel-Punct des Bretts, welches von der Axe 66 Zoll entfernet gewesen, weiset uns auch die Grösse des Bretts, welche von dem Autore nicht ausdrücklich angezeiget worden. Dann da der unterste Rand des Penduli $71\frac{1}{8}$ Zoll von der Axe entfernt gewesen, so war die Distantz von der Mitte des Bretts biß zum untersten Ende ungefehr 5 Zoll, und folglich die ganze Länge desselben 10 Zoll. Wenn nun die Breite, wie es scheinet, der Länge gleich gewesen, so war die Oberfläche desselben nur 1 Quadrat-Schuh, und nicht 4, wie wir oben bey Ausrechnung des Wiederstands der Luft angenommen haben. Derowegen ist die daselbst berechnete Resistentz viermahl zu groß, und da dieselbe in der Geschwindigkeit der Kugel 4 Schuh ausgetragen, so würde die wahre Resistentz mehr nicht als 1 Schuh gegeben haben: dahero man um so vielmehr bey diesen Experimenten den Wiederstand der Luft weglassen kann. Da auch um dieser Ursache willen kein Schuß mehr als um 5 Zoll höher oder tiefer, als das Mittel-Punct in das Brett gehen kann, so kann auch der Fehler, so sich in des Autoris Regel befindet, sich nicht über den zwanzigsten Theil der ganzen Geschwindigkeit belauffen.

Der Autor hat auch in dem Verfolg seiner Experimenten auf die Kugeln, welche schon allbereit in dem Brett stecken, gesehen, welcher Umstand, ob er gleich nicht aus der Acht zu lassen, dennoch so viel nicht austrägt, als der vorgemeldete. Dadurch wird erstlich das Gewicht des Penduli P grösser, hernach, da die Kugeln ziemlich weit unter dem Centro gravitatis in das Brett gedrungen, so wird auch dadurch das Centrum gravitatis selbst, oder die Länge g verrücket, und endlich leidet dadurch auch das Centrum oscillationis eine geringe Veränderung. Wenn wir setzen, daß die Geschwindigkeit der Kugel durch den Fall aus einer Höhe b erhalten werde, so haben wir, wenn noch keine Kugel im Brett stecket, diese Aequation

$$k = \frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}.$$

Lasst uns nun setzen, daß das Gewicht der Kugeln, welche schon allbereit in

der Distantz h von der Axe in das Brett geschossen worden, sey $= q$, so muß an statt Pg, wodurch das Momentum der Schwehre angedeutet wird, geschrieben werden $Pg + qh$, und an statt Pfg, wodurch das Momentum der Materie ausgedrückt wird, muß geschrieben werden $Pfg + qhh$: folglich wird in diesem Fall

$$k = \frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}}.$$

Unter gleichen Umständen verhält sich also jene Sehne zu dieser wie

$$\sqrt{\frac{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}\ ^{1)}$$

zu 1, das ist beynahe wie $1 + \frac{qh(f+h)}{2Pfg}$ zu 1, wann nur P in Ansehung des q noch sehr groß ist. Wenn nun in dem schon oben berechneten Fall genommen wird $P = 56$ ℔, $f = 62\frac{2}{3}$, $g = 52$ und $h = 66$, und wir setzen, daß das Gewicht der Kugeln, welche schon im Brett sind, ein Pfund ausmache, so wird $q = 1$; und dahero wird sich die Sehne, wenn das Brett noch neu aufgeschraubt ist, verhalten zu der Sehne, welche unter gleichen Umständen, nachdem schon 1 ℔ Kugeln im Brett stecken, entsteht, wie $1 + \frac{1}{43}$ zu 1, das ist, die Sehne muß wegen der schon im Brett steckenden Kugeln um ihren 44sten Theil vermindert werden, welche Verringerung auch der Autor wohl in Acht genommen.

ZWEYTE ANMERKUNG

Auf die in der vorigen Anmerkung beschriebene Art muß also die Länge der Sehne $Ll = k$ ausgerechnet werden, wenn die Geschwindigkeit der Kugel, welche gegen das Brett geschossen wird, schon als bekannt angenommen werden kann. Denn, wenn b die Höhe ist, aus welcher ein fallender Körper mit der Kugel einerley Geschwindigkeit erhält, so wird, wie wir oben gefunden,

$$k = \frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

1) Im Original $\sqrt{\frac{(Pg+ph)(Pfg+phh)}{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}}$. Berichtigt von F. R. S.

welche Länge, wie wir schon bemercket, öfters ziemlich von derjenigen, welche der Autor nach seiner Art gefunden, unterschieden seyn kann. Der Autor bestimmet aber ferner die Geschwindigkeit der Kugel, oder die Höhe b, nach der von ihm anfänglich gegebenen Methode aus der Quantität der Ladung, der Länge des Laufs, und dem Raum hinter der Kugel, worüber schon vorher verschiedene Anmerkungen gemacht worden. Lasst uns nun, um die Buchstaben nicht unter einander zu verwirren, die Länge des Laufs, woraus die Kugel geschossen wird, setzen $=\alpha$, die Länge des Raums hinter der Kugel $=\beta$, die Länge der Höhlung so mit Pulver angefüllt worden $=\gamma$, den Diameter der Kugel $=c$, und die Zahl n soll anzeigen, wie vielmahl die Materie, woraus die Kugel besteht, schwehrer ist, als das Wasser; so findet man hieraus die Höhe b, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel durch den Fall erlangt wird, also in Rheinländischen Schuhen ausgedrückt

$$b=\frac{110524{,}08\gamma}{nc}\,l\frac{\alpha}{\beta},$$ [1]

wo man für $l\frac{\alpha}{\beta}$ den gewöhnlichen Logarithmum des Bruchs $\frac{\alpha}{\beta}$ zu nehmen hat. Will man aber diese Länge b in Englischen Zollen mit dem Autore ausdrücken, weil 0,97 Rheinl. Schuh 12 Englische Zoll geben, so hat man

$$b=\frac{1367308\gamma}{nc}\,l\frac{\alpha}{\beta}$$

Engl. Zolle, folglich

$$2b=\frac{2734616\gamma}{nc}\,l\frac{\alpha}{\beta},$$

und also

$$\sqrt{2b}=1654\sqrt{\frac{\gamma}{nc}\,l\frac{\alpha}{\beta}};$$

dahero bekömmt man die Länge der Sehne k also:

$$k=1654pah\sqrt{\frac{\gamma l(\alpha:\beta)}{nc(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

wenn man nehmlich weder den Gegendruck, noch die Resistentz der Luft, so lange sich die Kugel im Lauf befindet, in Betrachtung ziehet. Wir haben aber in dieser Rechnungs-Formul mit dem Autore angenommen, daß sich alles Pulver plötzlich entzünde, und dadurch eine solche subtile Materie er-

1) Diese Gleichung folgt aus der zweiten Gleichung p. 79 für $m=1000$. F. R. S.

zeuget werde, deren Elasticität, so lange dieselbe noch in eben demselben Raum, den das Pulver eingenommen hatte, eingeschränckt ist, 1000 mahl grösser sey, als die Elasticität der ordentlichen Luft, oder, welches gleich viel, als der Druck der Atmosphäre. Es ist aber schon oben sehr deutlich dargethan worden, daß sich das Pulver unmöglich so plötzlich entzünden könne, und daß folglich die Elasticität der obgemeldeten subtilen Materie weit mehr, als 1000 mahl grösser seyn müsse, als der Druck der Luft, wenn dieselbe eben die Würkung hervor bringen soll. Was demnach die so genaue Uebereinstimmung der Versuche mit des Autoris Theorie betrift, ungeachtet an der Berechnung der Länge der Sehne Ll, welche der Verfasser mit den observirten vergleichet, ziemlich viel auszusetzen ist, so erhellet doch daraus so viel, daß die aus der Theorie gefundenen Geschwindigkeiten von der Wahrheit nicht allzusehr abweichen, obgleich die Uebereinstimmung bey weitem nicht so groß ist, als der Autor glaubet, weil die berechnete Länge der Sehne bißweilen auch um einen gantzen Zoll unrichtig seyn kann. Wenn aber auch ja die gerechnete Geschwindigkeit der Kugel der Wahrheit gänzlich gemäß wäre, so würde doch dadurch noch nicht die Meynung des Verfassers von der Gewalt des Pulvers befestiget; indem eben dieselbe Geschwindigkeit der Kugel eingedrückt werden könnte, wann die Kraft des Pulvers weit grösser, dabey aber nicht auf einmahl ihre Würkung auszuüben gesetzt würde. Der Autor führet zwar zu Behauptung seiner Meynung diejenigen Experimente an, welche mit ungleich langen Läufen gemacht worden, und dennoch mit der Theorie gut übereinstimmen, welches, seiner Meynung nach, nicht geschehen könnte, wenn sich das Pulver nur nach und nach entzündete, indem sich in dem kürzeren Lauf ein weit geringerer Theil entzünden würde, ehe die Kugel heraus getrieben wird, als in dem längern. Wir haben aber oben[1]) schon auf diesen Umstand geantwortet, und auch andere Erfahrungen, aus welchen das Gegentheil erhellet, dagegen angeführt. Wir wollen also allhier nur so viel beyfügen, daß vielleicht das Pulver, welches der Autor gebrauchet, so gut gewesen, daß sich der meiste Theil davon entzündet hat, ehe die Kugel aus dem kürzesten Lauf heraus gefahren. Es können auch hernach die unrichtig berechneten Sehnen eine so genaue Uebereinstimmung mit der Experientz anzeigen, dergleichen nicht erscheinen dürfte, wenn man dieselben nach den wahren Regeln berechnen wolte. Endlich kann auch das Herausdringen der elastischen Materie durch den Spielraum und das Zündloch wiederum einiger maassen die Uebereinstimmung mit der Experientz herstellen, wie in den vorigen Anmer-

1) Siehe die Vierte Anmerkung zum Siebenten Satz. F. R. S.

kungen mit mehrerem angezeiget worden. Man erkennet aber aus dieser Uebereinstimmung doch so viel, daß wenn gleich die erste Elasticität des Pulvers weit grösser ist, als der Autor angenommen, dennoch dieselbe in den meisten Fällen keine stärkere Würkung hervorbringe, als der Autor nach seiner Rechnung befunden, und daß folglich die allmählige Entzündung des Pulvers, und die übrigen Hindernisse, welche oben angeführet worden, die Geschwindigkeit der Kugel bey nahe um eben so viel vermindern, als dieselbe durch die grössere Gewalt vermehret werden solte. So oft sich also diese Gleichheit einfindet, so oft kann man auch die von dem Autore gegebene Regel, um aus der Ladung die Geschwindigkeit der Kugel zu bestimmen, sicher gebrauchen. Es können aber gleichwohl solche Umstände vorkommen, da entweder die grössere Gewalt des Pulvers, oder die obgemeldeten Hindernisse die Oberhand behalten, in welchen folglich die Geschwindigkeit der Kugel entweder grösser oder kleiner seyn wird, als die von dem Autore gegebene Regel anzeigt. Ein solcher Fall ereignet sich, wenn die Ladung des Pulvers allzu geringe ist, allwo, wie der Autor sehr wohl bemerket, die Hitze der Entzündung, und folglich die Elasticität der subtilen Materie nicht so groß seyn kann, als in der Rechnungs-Formul gesetzt wird. In dieser ist der Buchstabe $m = 1000$ genommen worden, welcher Werth sich für die grösseren Ladungen sehr wohl schickt; bey sehr kleinen Ladungen aber muß derselbe kleiner gesetzt werden. Wenn wir nun setzen, daß für eine geringere Ladung μ der gehörige Werth des Buchstabens m sey, so lässt sich diese Zahl μ für einen jeglichen Fall aus dem Unterscheid zwischen der Länge der Sehne, so nach der Rechnung gefunden, und durch das Experiment angezeigt wird, leicht bestimmen. Denn da, wenn $m = 1000$, die Sehne k gefunden worden

$$k = 1654 pah \sqrt{\frac{\gamma l(\alpha:\beta)}{nc(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

so muß, wenn m nicht 1000, sondern gleich ist μ, die Sehne seyn

$$= 1654 pah \sqrt{\frac{\mu\gamma l(\alpha:\beta)}{1000\, nc(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

wenn nehmlich die übrigen Umstände einerley sind. Dahero verhält sich bey sehr geringen Ladungen die gerechnete Sehne zu der observirten wie $\sqrt{1000}$ zu $\sqrt{\mu}$, und folglich ist 1000 zu μ wie das Quadrat der gerechneten Sehne, zu dem Quadrat der observirten, oder wie die Quadrate der Geschwindigkeiten selbst.

Da nun in dem von dem Autore angeführten Exempel, wo nur 1 Dr. Pulver geladen worden, die Geschwindigkeit nach der Rechnung seyn solte 482 Schuh in einer Secunde, dieselbe aber nur 400 Schuh wahrgenommen worden, so war in diesem Fall 1000 zu μ, wie 482^2 zu 400^2, und also

$$\mu = \frac{160000000}{482 \cdot 482} = 688.$$

Wenn also nur ein Drachma Pulver angezündet wird, so ist die dabey entstehende Hitze um so viel kleiner, als wenn eine grosse Quantität Pulver genommen wird, daß die erste Elasticität nur 688 mahl grösser ist, als der Druck der Atmosphäre.

Im folgenden Experiment, da drey Drachm. Pulver geladen worden, wird $1000 : \mu = 835^2 : 730^2$ und also

$$\mu = \frac{532900000}{835 \cdot 835} = 764,$$

daß also in diesem Fall auch wegen der geringern Hitze die erste Elasticität des Pulvers nur 764 mahl grösser ist, als der Druck der Atmosphäre.

Der Autor findet im erstern Fall aus eben diesem Grunde die Verhältniß der Elasticitäten, wenn 1 Drach. oder 12 Drach. angezündet werden, wie 2 zu 3, welche Verhältniß mit unserer 688 zu 1000, sehr genau zutrifft; im andern Fall aber hat er wie 3 zu 4 an statt 764 zu 1000, zwischen welchen der Unterscheid auch sehr geringe ist. Weil nun der Unterscheid zwischen diesen Zahlen 688, 764 und 1000, welche die Elasticität bey Entzündung 1, 3 und 12 Drach. Pulver vorstellen, ziemlich merklich ist, so hat man sich zu verwundern, daß sich bey den Ladungen von 6 biß 36 Drach. kein solcher Unterscheid geäussert, und daß diese so verschiedene Fälle mit der Rechnung so genau haben übereinstimmen können. Vielleicht mag die oben bemerkte Unrichtigkeit in Berechnung der Sehne des aufsteigenden Bogens hieran Schuld seyn; und da die Hitze der Flamme, wie der Autor behauptet, um so viel grösser ist, je mehr Pulver sich auf einmahl entzündet, so stehet vielmehr zu vermuthen, daß auch die Elasticität bey der Ladung von 36 Drachm. merklich grösser, als bey 6 Drachm. gewesen, und dass dieselbe bey Canonen, wo eine weit grössere Quantität Pulver geladen wird, noch grösser seyn müsse. Dahero die von dem Autore gegebene Regel, die Geschwindigkeit der Kugel aus der Kraft des Pulvers zu berechnen, allem Ansehen nach bey Canonen nicht mehr so genau zutreffen würde, ohne auf die übrigen Umstände zu

sehen, wodurch die Würkung des Pulvers, wie oben erwiesen worden, keinen geringen Abbruch leidet. Es läst sich aber anjetzo noch nichts vollständiges hierinne bestimmen, weil die von dem Autore berechneten Sehnen von der Wahrheit ziemlich stark abweichen können, diejenigen Umstände aber nicht bemerket worden, welche zur Verbesserung nöthig sind. Dahero zu wünschen wäre, daß sich jemand finden möchte, welcher mit eben dem Fleiß, und auf eben die Weise, wie der Autor gethan, alle dergleichen Experimente wiederhohlte, bey einem jeglichen aber auch die Entfernung des Puncts am Brett, wo die Kugel hinein gefahren, von der Axe sorgfältig mässe, und daraus nach den hier angezeigten wahren Regeln die Länge der Sehne berechnete.

DRITTE ANMERKUNG

Der Nutzen, welchen man aus der Erkänntniß der Gewalt des Pulvers, und der Geschwindigkeit der Kugel in der Artillerie ziehen kann, muß nothwendig von grosser Wichtigkeit seyn. Denn, wenn man diese Punkte genau bestimmen kann, so weiß man auch, wie stark und fest sowohl die Canonen und Mörser, als die übrige dazu gehörige Geräthschaft seyn muß, und hat also nicht zu befürchten, daß man die Stücke entweder zu stark, oder zu schwach mache: wodurch im ersteren Fall alle unnöthige Unkosten vermieden, im andern aber allem Schaden und Gefahr vorgebeuget wird. Eben diejenige Gewalt, womit die Kugel fortgetrieben wird, würket auch eben so stark auf die innern Wände der Canone, und wenn dieselben die gehörige Stärke nicht haben, um dieser Gewalt zu wiederstehen, so muß die Canone nothwendig bersten. Die gröste Gewalt, welche die Canone auszustehen hat, äussert sich also im ersten Augenblick, wenn sich das Pulver entzündet, ehe noch die Kugel merklich von ihrer Stelle getrieben wird, welches folglich in dem Raum $CDEG$ (Fig. 1) geschieht, allwo die Wände der Canone so stark gedruckt werden, als der Boden einer aufrecht stehenden und mit Wasser angefüllten Röhre, deren Höhe 32000 Schuh ist, wenn wir nehmlich mit dem Autore setzen, daß die Elasticität der durch die Entzündung des Pulvers erzeugten subtilen Materie im ersten Augenblick 1000 mahl grösser sei, als der Druck der Atmosphäre, welche einer Wasser-Säule von 32 Schuhen gleichet. Diese so sehr grosse Kraft erstreckt sich aber nicht auf die ganze Canone, sondern nur auf den hintersten Theil derselben $CDEG$, welcher mit Pulver angefüllt worden; weswegen auch

dieser Theil eine solche Stärke, als zu Aushaltung dieser Kraft erfordert wird, haben muß. Die vordern Theile der Canone leiden nicht eher einige Gewalt, als biß die Kugel dahin fortgestossen worden, und alsdenn ist auch diese Gewalt kleiner, als vom Anfang. Wenn die Kugel schon biß M fortgestossen worden, so verhält sich die ausdehnende Kraft im Raum AM zur ersten, wie AF zu AM, und gleicht also einer Wasser-Säule, so $32000 \cdot \frac{AF}{AM}$ Schuh hoch ist, woraus erhellet, daß die Gewalt, welche die vordern Theile der Canone auszustehen haben, immer kleiner werde. Dahero auch die Canone an dem vordern Theil nicht nöthig hat, so stark zu seyn, als hinten bey AF, und würde also überflüßig seyn, wenn man die Canonen vornen so stark und dick machen wolte, als hinten. Um aber deutlicher zu sehen, wie sich an einem jeglichen Orte die Dicke der Canone verhalten müsse, damit dieselbe weder zu stark, noch zu schwach sey, so müssen wir die Art, nach welcher eine Canone dieser Gewalt wiederstehet, in Betrachtung ziehen. Wenn das Metall, woraus eine Canone bestehet, keine Festigkeit hätte, kraft welcher die Theile desselben unter einander zusammen verbunden sind, so würden dieselben von der ersten Gewalt von einander zertrennet und zerstreuet werden, woraus wir erkennen, daß die Befestigung der Theile des Metalls der Gewalt des Pulvers wiederstehen müsse. Diese Festigkeit läßt sich aber, wegen der grossen Ungleichheit, so sich in der Verknüpfung der Theile befindet, so genau nicht berechnen, indem dieselben durch den Guß an einem Ort öfters viel fester zusammen getrieben werden, als an den andern; dahero die Stärke immer grösser seyn muß, als irgend eine Theorie, welche auf eine solche Gleichheit in allen Theilen gegründet ist, anzeigt.

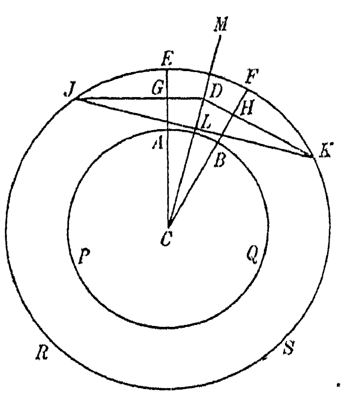


Fig. 8.

Dem ungeachtet wird es nicht undienlich seyn, allhier einen Begriff von dem Zusammenhang der Theilchen des Metalls, und dem daher entstehenden Wiederstand gegen die Gewalt des Pulvers zu ertheilen, ob sich gleich hierinne nichts so genau bestimmen läßt. Wir wollen uns zu dem Ende (Fig. 8) einen Durchschnitt einer Canone, so auf die Axe desselben perpendicular gemacht worden, vorstellen, allwo der innere Zirkul $ABQP$ die Seele der Canone, da die ausdehnende Gewalt des Pulvers befindlich, und der Zwischen-Raum zwischen den beyden Circuln das Metall andeuten soll. Die ausdehnende Kraft des Pulvers würket nun allenthalben gleich stark

auf den innern Umfang des Cirkuls $ABQP$, und suchet denselben entweder zu erweitern, oder gar zu zersprengen. Wir wollen aber nur ein Stück des Metalls $AEFB$, welches durch zwey aus dem Centro C gezogene Radios CE und CF abgeschnitten wird, in Betrachtung ziehen. Es sey der innere Radius $AC = BC = a$, und der Winkel $ACB = 2\varphi$, so wird der Bogen AB, auf welchen die Kraft des Pulvers würket, gleich seyn $2a\varphi$, und folglich die Kraft selbst diesem Bogen proportional, welche wir also $= 2ma\varphi$ setzen wollen. Die mittlere Direction dieser Kraft wird nun durch das Centrum C gehen, und den Winkel ACB in zwey gleiche Theile zerschneiden. Es sey demnach CDM diese Direction, nach welcher das Stück $AEFB$ von der Kraft $2ma\varphi$[1]) gestossen wird. Wenn also dieses Stück nicht mit dem übrigen Metall befestiget wäre, so würde dasselbe würklich nach der Direction DM weggestossen werden. Die Befestigung dieses Stücks aber geschieht nach den Linien AE und BF, als in welchen dasselbe mit dem übrigen Metall zusammen hängt, und da diese Befestigung in allen Punkten gleich statt findet, so kann dieselbe als eine Kraft angesehen werden, welche das Stück $AEFB$ beyderseits an den übrigen Theilen in AE und BF andrückt, und deren Direction beyderseits auf die Mitte in den Punkten G und H perpendicular ist. Wenn wir also die Dicke des Metalls $AE = FB = b$ setzen, so wird beyderseits die zusammenhängende Kraft dieser Dicke b proportional seyn, welche wir also $= nb$ nennen wollen. Man verlängere diese beyden Kräfte-Directionen GJ und HK, biß sie im Punkt D auf der Linie CM zusammen kommen; und da werden wir dieses Punkt D ansehen können, als wenn auf dasselbe drey Kräfte würkten, erstlich nach der Direction DM die Kraft $= 2ma\varphi$, hernach nach den Directionen DJ und DK beyderseits eine Kraft $= nb$; und diese beyden Kräfte müssen so groß oder grösser seyn, als zur Zernichtung der ersten erfordert wird. Wir wollen also diese beyden Kräfte zertheilen nach der Direction DC, und nach solchen, welche auf die Linie CD perpendicular sind, und sich untereinander aufheben. Weil nun die Dreyecke CDG und CDH in G und H rechte Winkel haben, so wird sich verhalten DJ oder DK zu DL wie CD zu DG, das ist wie der Sinus totus 1 zum Sinu des Winkels DCG, $\sin.\varphi$. Dahero wird aus

1) Weil der Druck der Pulvergase überall radial wirkt, so ist die Komponente in der Richtung CM des auf den Sektor $2a\varphi$ wirkenden Druckes nicht $2ma\varphi$, sondern $2ma\sin.\varphi$, worauf schon Hugh Brown in seiner im Vorwort angeführten englischen Übersetzung der Anmerkungen Eulers aufmerksam gemacht hat. Auf eine Berichtigung des Textes wird jedoch verzichtet, weil die vorliegende Betrachtung über die Festigkeit des Geschützrohres ohnehin auf einer irrtümlichen Anschauung von der Beanspruchung des Rohrmetalles durch den Gasdruck beruht. F. R. S.

beyden Kräften DJ und DK nach der Direction DC diese Kraft heraus kommen, $2nb$ sin. φ, welche, wenn sie kleiner wäre, als die Kraft $2ma\varphi$, so würde das Stück $AEFB$ der Gewalt nicht wiederstehen können, sondern nach der Direction DM aus der Canone weggerissen werden. Damit also dieses nicht geschehe, so muß die Kraft $2nb$ sin. φ so groß oder grösser seyn, als die Kraft $2ma\varphi$, folglich muß nb sin. $\varphi > ma\varphi$, und dieses muß statt finden, der Winkel ACB mag so groß angenommen werden, als man will; es wird aber die Verhältniß nb sin. φ zu $ma\varphi$ am kleinsten, wenn der Winkel ACB gleich wird 180^0, oder $\varphi = 90^0$, in welchem Fall ist sin. $\varphi = 1$ und $\varphi = 1{,}570\,796$: dahero muß auch nb grösser sein als $1{,}570\,796\,ma$. Hieraus erhellet, daß die zersprengende Gewalt am grösten werde, wenn das Stück $AEFB$ dem halben Umfang gleich genommen wird, und daß also die Canonen der Gefahr an zwey gegen einander überstehenden Orten zu zerbersten am meisten unterworfen seyn. Wenn nun dieses nicht geschehen soll, so muß nb grösser seyn, als $1{,}570\,796\,ma$, oder in kleinen Zahlen muß nb grösser sein als $\frac{11}{7}ma$. In diesen Expressionen wird der Buchstabe m durch die ausdehnende Kraft des Pulvers, und der Buchstabe n aus der Festigkeit des Metalls bestimmt. Wenn also zu verschiedenen Canonen einerley Metall genommen wird, so muß immer die Dicke des Metalls dem Caliber, oder dem Diameter der Kugel proportional seyn. Und da in einer Canone die ausdehnende Gewalt des Pulvers um so vielmehr abnimmt, je weiter die Kugel vorwärts getrieben wird, so muß sich die Dicke der Canone in dem Ort[1]) M verhalten zur Dicke des Boden-Stücks in AF, wie sich verhält die Länge AF zur Länge AM. Aus diesem Grund könnte also das Mund-Stück einer Canone ohne Gefahr viel schwächer gemacht werden, als zu geschehen pflegt, wenn nehmlich die Theorie des Autoris ihre Richtigkeit hätte, und sich alles Pulver auf einmahl entzündete. Denn in diesem Fall, wenn AM noch so groß als AF angenommen wird, würde es genug seyn, wenn die Canone in M nur halb so dick wäre, als im Boden-Stück AF. Hiebey aber hätte man dennoch auf die stärkste Ladung zu sehen, so jemahls gebraucht werden könnte. Allein, wenn man annimmt, daß sich nicht alles Pulver auf einmahl entzünde, so wird wegen des neu entzündeten Pulvers die Gewalt in AM zur Gewalt in AF eine grössere Verhältniß haben, als AF zu AM, und aus diesem Grund muß die Dicke der Canone im Vordertheil grösser seyn, als nach der vorigen Regel, welches auch durch die Erfahrung bestätiget wird. Und eben dadurch wird auch die Meynung nicht wenig befestiget, daß

1) Die nachfolgenden Bezeichnungen beziehen sich auf Figur 1 p. 70. F. R. S.

sich das Pulver nicht alles auf einmahl entzünde. Weil sich aber diese allmählige Entzündung nicht bestimmen läßt, und nach den verschiedenen Arten des Pulvers sehr unterschieden ist, so kann man auch durch die blosse Theorie die beste Proportion der Dicke einer Canone nicht heraus bringen, sondern die vielfältige Erfahrung scheinet zu diesem Ende das einige Mittel an die Hand zu geben. Wenn man aber des Autoris Theorie folgen wolte, so würde sich diese Sache sehr leicht ausmachen lassen: es würden aber dergleichen Canonen nicht lange der Gewalt des Pulvers wiederstehen können, indem das Mundstück gewiß zu schwach seyn würde, wenn auch das Bodenstück seine gehörige Stärke hätte.

Da nun aus diesem Grunde nicht wohl ein Mittel zu erfinden, das Gewicht der Canonen ohne Gefahr zu vermindern, so thut man am besten, wenn man sich zu Erhaltung dieses Endzwecks an die Verbesserung der Materie, woraus die Canonen gegossen werden, hält. Der gröste Vortheil würde also darinne bestehen, wenn man eine Materie ausfündig machen könnte, deren Theile weit stärker untereinander verbunden wären, als in der gewöhnlichen, in welcher Untersuchung man sich noch den besten Fortgang versprechen könnte. Es könnten vielleicht auch noch in dem Guß verschiedene Vortheile entdecket werden, wodurch die Materie eine um so viel grössere Festigkeit erhielte, wohin ohne Zweifel diejenige Erfindung mit zu rechnen, da einige angefangen haben, die Canonen maßiv und ohne Kern zu giessen, und erst nach dem Guß die Höhlung darein zu bohren. Denn auf diese Art wird das Metall nicht nur weit dichter, sondern man ist auch im Stande, die Seele accurat in der Mitte gerade durchzubohren, welchen Umstand man bey dem Giessen nicht sowohl in der Gewalt hat. Endlich würde auch eine geringe Zähigkeit in der Materie zu den Canonen keinen geringen Vortheil schaffen. Denn, es kommt hier nicht nur auf die Kraft, wodurch die Theilchen der Materie untereinander verbunden sind, an, als welche in einem spröden und zähen Körper einerley seyn kann, sondern ob, nachdem die Theilchen im geringsten von einander getrieben worden, der Körper sogleich zerbreche, oder sich wiederum in seinen vorigen Stand zu versetzen vermögend sey. Hierinne bestehet nehmlich der Unterscheid zwischen spröden und zähen Materien, daß jene, so bald die Theilchen untereinander zerrüttet werden, auch so gleich zerbrechen, diese aber, ungeachtet in ihren Theilchen eine gleiche Zerrüttung vorgegangen, dennoch dadurch das Band der Festigkeit noch nicht aufgelöset wird. Wenn also die Materie, welche zu den Canonen gebraucht wird, einen etwas grössern Grad der Zähigkeit hätte, so würde man dieselben ohne Gefahr leichter machen

können. Denn eben dieses war die Ursache, daß man vor Zeiten mit ledernen Canonen, welche am Gewicht mit den metallenen nicht zu vergleichen waren, fast eben so starke Schüsse hat thun können, ungeachtet dieselben nicht so dauerhaft waren. Inzwischen ist doch aus diesem Umstand so viel abzunehmen, daß in diesem Punct, was die Materie der Canonen betrifft, noch eine grosse Verbesserung gehoffet werden könne.

Von der ausdehnenden Kraft des Pulvers kommt auch das Zurückstossen der Schieß-Gewehre und der Canonen her. Denn diese Kraft treibt den Boden des Laufs eben so stark rückwärts, als die Kugel vorwärts; dergestalt, daß wenn das ganze Stück nicht schwehrer seyn solte, als die Kugel, alsdenn das Stück mit eben der Geschwindigkeit zurück, als die Kugel heraus fahren würde. Je schwehrer aber ein Körper ist, um so viel kleiner ist auch die Bewegung, welche demselben von eben derselben Kraft eingedrücket wird. Dahero so vielmahl eine Canone samt der L'affuite[1]) schwehrer ist, als die Kugel, welche daraus geschossen wird, eben so vielmahl langsamer wird auch die Bewegung der Canone seyn, als der Kugel; folglich wird sich der Raum, durch welchen die Canone zurückfährt, indem die Kugel zur Canone heraus getrieben wird, zur Länge der Canone weniger dem Raum hinter der Kugel verhalten, wie das Gewicht der Kugel zum Gewicht der gantzen Canone. Wenn also eine halbe Carthaune, so eine 24pfündige Kugel schießt, 10 Schuh lang gesetzt wird, weil das Gewicht derselben ungefehr 64 Centner, oder 6400 Pfund beträgt, so muß diese Canone, indem die Kugel daraus herausgetrieben wird, durch einen Raum von $\frac{24}{6400}\cdot 10$ Schuh, das ist nur $\frac{3}{80}$ Schuh, oder nicht gar um einen halben Zoll zurückfahren. Wenn demnach der Grund, worauf die Canone ruht, so fest ist, daß dieselbe darauf um $\frac{1}{2}$ Zoll, ohne erschüttert zu werden, zurück treten kann, so ist der Schuß gewiß, wenn gleich der Grund weiter zurück keine Festigkeit hätte. Daß aber gleichwohl die Canone, nachdem die Kugel schon heraus geschossen worden, und also die zurücktreibende Kraft gänzlich aufgehöret hat, noch weiter zurück geht, kommt von der derselben schon eingedrückten Bewegung her, womit dieselbe zurück zu weichen fortfährt, so lange, biß durch den Wiederstand diese Bewegung völlig gehemmet wird. Deswegen hat die Anmerkung des Verfassers, betreffend die Festigkeit der Batterien, worauf die Canonen gepflantzet werden, ihre völlige Richtigkeit, und kann dadurch viel unnöthige Arbeit erspahret werden.

1) L'affuite bedeutet Laffete. F. R. S.

VIERTE ANMERKUNG

Der Autor ziehet auch noch aus seiner Theorie diesen Schluß, daß alle Vorschläge, welche auf eine sonderbare Figur der Pulver-Kammer in den Canonen gerichtet sind, nicht den geringsten Vortheil bringen können. Dieser Schluß hat seine völlige Richtigkeit, wenn sich nach der Meynung des Autoris alles Pulver im ersten Augenblick zugleich entzündet. Denn in diesem Fall ist auch die erste Gewalt desselben einerley, der Raum, worinne das Pulver eingeschlossen ist, mag eine Figur haben, wie man immer will, wenn nur derselbe ganze Raum mit Pulver angefüllet ist. Und wenn auch nur ein Theil desselben mit Pulver angefüllet ist, so wird die Gewalt um so viel kleiner, als dieser Theil kleiner ist, als der ganze Raum hinter der Kugel: dahero auch in diesem Fall die Grösse der Gewalt nicht auf der Figur des Raums beruhet. Wenn aber die Kugel schon würklich fortgetrieben wird, so verhält sich die forttreibende Gewalt zur ersten Gewalt, wie der Raum, den das Pulver anfänglich eingenommen, zu eben diesem Raum nebst demjenigen, durch welchen die Kugel schon fortgetrieben worden: und also hat auch hier die Figur des Pulver-Raums auf die forttreibende Gewalt keinen Einfluß. Aus diesem Grunde ist es also gleichgültig, was man der hintersten Höhlung der Canonen für eine Figur geben will, und weil alle Figuren in Ansehung der forttreibenden Gewalt einerley Würkung haben, so erwehlet man billig diejenige, welche nach den übrigen Umständen die bequemste ist. Wenn man also aus andern Ursachen nichts an der gewöhnlichen Figur der Canonen zu verändern nöthig findet, so könnte man auch aus diesem Grunde dieselbe sicher beybehalten, und alle Vorschläge, welche auf eine Veränderung abzielen, ohne fernere Untersuchung, als verwerflich ansehen.

Dieses gründet sich aber, wie schon gemeldet, auf die Meynung des Verfassers, daß sich alles Pulver im ersten Augenblick zugleich entzünde. Da wir aber schon oben sehr wichtige Gründe gegen diese Meynung angeführet haben, so kan man auch die Vorschläge, welche auf eine vortheilhaftere Figur der Pulver-Kammer gerichtet sind, nicht mehr so platterdings verwerfen. Die Sache wird also auf diese Frage ankommen, ob die Figur des Raums, darinne das Pulver eingeschlossen ist, etwas zu einer schnellern oder langsamern Entzündung des Pulvers beytragen könne, oder nicht? Denn, wenn diese Frage mit Ja beantwortet werden kann, so ist kein Zweifel übrig, daß diejenige Figur, in welcher sich das Pulver am schnellsten entzündet, nicht die beste

und vortheilhafteste seyn sollte. Denn je plötzlicher sich alles Pulver entzündet, je grösser und je länger fortdaurend ist auch die Gewalt, welche auf die Kugel würket, dahero auch derselben eine um so viel schnellere Bewegung eingedrucket wird.

Daß aber die Figur des Raums nicht wenig zu einer plötzlichen Entzündung beytragen könne, ist leicht darzuthun. Man darf sich nur eine sehr lange und enge Röhre, in welcher das Pulver eingeschlossen und an einem Ende angezündet wird, vorstellen. Denn in diesem Fall wird sich die Entzündung nicht so geschwinde biß zum andern Ende der Röhre ausbreiten, als wenn die Röhre kürzer wäre. Jedermann wird auch leicht begreiffen, daß, wenn man das Boden-Stück einer Canone in eine solche lange und enge Röhre verwandeln sollte, die Kugel mit einem weit geringern Grad der Geschwindigkeit heraus getrieben werden würde, wenn man schon eine gleich starke Ladung gebrauchte. Hieraus ist nun leicht abzunehmen, daß sich das Pulver um so viel geschwinder entzünde, je weniger alle Körner desselben von einander entfernet sind. Da nun die Kugelrunde Figur unter allen andern, welche einen gleichen Raum einschliessen, diese Eigenschaft hat, daß der Umfang derselben am kleinsten, und alle Theile unter sich am nächsten beysammen sind, so ist auch kein Zweifel, daß sich das Pulver nicht in einem solchen Raum am geschwindesten entzünden sollte. Es wäre dahero dahin zu trachten, ob man nicht auf eine bequeme Art die Höhlung des Boden-Stücks in einer Canone hinter der Kugel entweder vollkommen oder doch beynahe rund machen könnte: denn auf diese Art würde man keinen geringen Zuwachs an der Geschwindigkeit, womit die Kugel fortgetrieben wird, erhalten. Die Würkung würde auch um so viel stärker seyn, wenn man das Pulver im Mittel-Punkt dieses Raums anzünden könnte: als von welchem Ort sich die Entzündung rings herum am schnellsten zu allen Extremitäten ausbreiten würde. Es werden sich zwar, allem Ansehen nach, viele Schwierigkeiten finden, welche die Ausführung dieses Vorschlags unmöglich zu machen scheinen werden; es dürfte aber doch vielleicht ein tüchtiger und erfahrner Practicus noch Mittel ausfinden können, alle diese Schwierigkeiten zu heben, und den gethanen Vorschlag mit Vortheil ins Werck zu richten. Inzwischen ist zu unserem gegenwärtigen Endzweck genug, die Umstände angezeigt zu haben, worauf es bey vortheilhafter Einrichtung der Pulver-Kammer insonderheit ankömmt, und woraus man alle dahin abzielende Vorschläge leicht wird beurtheilen können. Man hat aber hierbey zu bemerken, daß je mehr man die erste Gewalt des Pulvers auf diese Art zu vermehren im Stande seyn wird, das Metall an der Canone an diesem Ort auch um soviel stärker gemacht werden müßte.

ZEHNTER SATZ

Die Veränderungen, welchen die Gewalt des Pulvers nach dem verschiedenen Zustande der Atmosphäre unterworfen ist, zu bestimmen.

In allen Experimenten, welche ich bißher untersuchet, habe ich noch nicht bemerken können, daß die verschiedene Schwehre der Atmosphäre die geringste Veränderung in der Kraft des Pulvers verursache, ungeachtet ich viel hundert Schüsse bey ganz verschiedenen Witterungen angestellt habe. Insonderheit habe ich öfters die Versuche, welche in dem heissesten Sommer um Mittag gemacht worden, mit denjenigen, so ich des Morgens und Abends, als es noch ziemlich kühl war, angestellt, gegen einander gehalten, zwischen denselben aber nimmer den geringsten Unterscheid wahrgenommen. Eine gleiche Bewandniß hatte es auch mit den Versuchen, welche bey Nacht und im Winter angestellet worden, obgleich zu diesen verschiedenen Zeiten die Dichte der Luft sehr verschieden gewesen. Und in der That, nachdem wir gesehen, daß diejenige subtile Materie, darinne die Gewalt des Pulvers bestehet, sowohl in der Luft, als in einem Luft-leeren Raum, in gleicher Menge erzeuget werde, so ist hieraus genugsam klar, daß diese Gewalt von einer grösseren oder kleineren Dichte der Luft unmöglich einige Veränderung leiden könne.

Ob aber gleich die Dichte der Luft keinen Einfluß auf die Gewalt des Pulvers hat, so verursachet doch die Feuchtigkeit derselben um so viel grössere Veränderungen. Denn ich habe befunden, daß eben diejenige Ladung, welche bey druckenem Wetter die Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1700 Fuß in einer Secunde fortgetrieben, bey feuchtem Wetter eben derselben Kugel kaum eine Geschwindigkeit von 12 biß 1300 Schuh in einer Secunde mitzutheilen vermögend gewesen; ja noch weniger, wenn das Pulver von einer schlechten Art, oder nicht wohl verwahret gewesen.

Diese Verringerung der Gewalt in feuchtem Pulver ist auch, wie aus meinen Versuchen erhellet, sehr unbeständig und veränderlich: dergestalt, daß je zwey Schüsse, welche mit einerley Quantität Pulver, so aus eben demselben Faß genommen worden, gethan werden, immer wohl 10 mahl mehr von einander unterschieden sind, als wenn das Pulver drucken ist. Inzwischen habe ich doch, dieser grossen Ungewißheit ungeachtet, so viel deutlich wahrnehmen

können, daß diese von der Feuchtigkeit der Luft herrührende Verringerung der Gewalt des Pulvers in kleinen Ladungen weit stärker ist, als in grossen, wenn auch in beyden Fällen die Feuchtigkeit einerley ist. Ein anderer Umstand, welcher das feuchte Pulver begleitet, bestehet in einer sehr merklichen Unreinigkeit, welche in dem Stücke nach dem Schuß zurück bleibt, und welche weit grösser ist, als diejenige, so von einer gleichen Ladung druckenen Pulvers herrühret.

Alle diese Würkungen können nun sehr leicht erkläret werden, wenn man nur bedenket, daß das Pulver von der Luft die Feuchtigkeit an sich nehme. Denn da das Pulver, wenn dasselbe allzufeucht ist, die Entzündungs-Kraft gänzlich verlieret, so folget daraus, daß ein geringerer Grad der Feuchtigkeit, wenn derselbe auch die Entzündung nicht völlig hemmet, dennoch die daher entstehende Gewalt vermindern müsse. Derowegen wird in diesen Fällen eine kleinere Quantität von dieser subtilen elastischen Materie erzeuget, welche dahero auch einen geringeren Grad der Hitze und eine weit schwächere Ausdehnungs-Kraft hervorbringt. Folglich wird die Würkung des feuchten Pulvers um zweyerley Ursachen willen geschwächet, je nach dem Grad der Feuchtigkeit, welche das Pulver an sich gezogen.

Das schlechte Pulver hält gemeiniglich, weil der Salpeter nicht genugsam gereiniget worden, noch etwas von gemeinem Saltz in sich. Da nun das gemeine Saltz die Feuchtigkeit weit stärker an sich zieht, als der Salpeter, so ist leicht zu begreiffen, daß bey feuchtem Wetter das schlechte Pulver vielmehr Feuchtigkeit annehmen müsse, als das gute, dahero dasselbe auch um so vielmehr von seiner Kraft verlieret.

Die Unbeständigkeit, welche sich in den Würkungen des schlechten Pulvers äussert, rühret, wie ich vermuthe, von den verschiedenen Graden der Trockne her, zu welcher dasselbe in dem Stücke gebracht wird. Denn da nach dem ersten und zweyten Schuß der Lauf schon etwas erwärmet wird, so verlieret sich auch desto eher ein Theil der Feuchtigkeit, womit das Pulver behaftet gewesen, durch die Ausdünstung, wenn nehmlich dasselbe einige Zeit in dem Lauf gelassen wird. Weil nun sowohl die Erhitzung des Schieß-Gewehrs, als die Zeit, so lange das Pulver darinne verbleibt, sehr ungewisse Umstände sind, so hat man sich nicht zu verwundern, daß die Ausdünstung und die daher rührende Gewalt des Pulvers eben so wenig zu einiger Gewißheit gebracht werden könne. Hiebey ist noch zu erinnern, daß öfters in dem trockensten Wetter die Stärke des Pulvers bey dem ersten Schuß durch die Kälte des Stücks,

und vielleicht durch einige Feuchtigkeit, welche sich darinne zusammen gezogen, sehr merklich vermindert worden.

Daß ferner eine kleine Quantität Pulver bey einerley Grad der Feuchtigkeit mehr von seiner Kraft verlieret, als eine grössere, kommt ausser Zweifel von dem geringeren Grad der Hitze her, womit die Entzündung kleinerer Ladungen, wie schon oben bemerket worden, begleitet wird. Denn eben derselbe Grad der Feuchtigkeit thut einem schwächern Feuer einen grösseren Abbruch, als einem heftigern.

Die Unreinigkeit, welche, nachdem man mit feuchten Pulver geschossen, in dem Stück zurück bleibt, wie wir schon bemerket haben, muß gleichfals von der Verringerung der Gewalt der Flammen bey der Entzündung herkommen. Denn, wenn das Pulver von einer guten Art ist, daß sich dasselbe plötzlich und mit Heftigkeit entzündet, so muß der gröste Theil desselben zu Asche verbrennet werden, welche in Gestalt eines graulichten Staubes auf allen Cörpern, welche sich vor der Mündung einer Canone befinden, zu erkennen ist. Die in dem Stück zurückbleibende Unreinigkeit aber kommt von denjenigen Theilchen des Pulvers her, welche entweder wegen der unvollkommenen Vermischung, oder wegen der Kälte der Wände, an welchen sie anliegen, nicht gänzlich verbrannt werden können. Da nun das feuchte Pulver nach der Menge der damit vermischten Feuchtigkeit keine so heftige Flamme giebt, so muß in diesem Fall nur ein geringer Theil des Pulvers gänzlich verzehret und zu Asche verbrannt werden: folglich bleibt ein grosser Theil unverbrennt zurück, und verursachet die Unreinigkeit, welche in der Canone nach dem Schuß wahrgenommen wird.

ZUSATZ

Es ist in der Ausführung dieses Satzes als eine unstreitige Sache angenommen worden, daß das Pulver bey feuchtem Wetter die Feuchtigkeit aus der Luft an sich ziehe. Es ist also noch übrig, die Quantität der Feuchtigkeit, welche das Pulver zu sich zu nehmen vermögend ist, zu bestimmen, welche Frage wir uns bemühen wollen, aus unseren eigenen Versuchen zu erörtern.

Ich habe ein wenig sehr gutes Pulver auf ein weisses Papier, welches mit viel kleinen Löchern durchstochen worden, gestreuet, und das Papier über den Dampf von heissen Wasser gehalten: da ich denn befunden, daß in einer halben Minute das Pulver um den $\frac{1}{50}$ Theil am Gewichte zugenommen.

Auf eine gleiche Art habe ich ein anderes Experiment angestellt, das Pulver aber länger in den Dampf gehalten, und hernach befunden, daß das Gewicht desselben um den $\frac{1}{24}$ Theil vermehret worden. In diesem Fall aber waren schon einige Körner zusammen gebacken, ungeachtet ihre Figur noch nicht verändert worden.

Um nun hierüber zu einer Gewißheit zu gelangen, ob die Feuchtigkeit der Luft das Gewicht des Pulvers gleichfals zu vermehren vermögend wäre, so nahm ich ungefehr eine Unze Pulver, welches einige Zeit in einem Gemach, wo täglich eingeheitzet worden, gelegen, und fand, nachdem ich dasselbe bey dem Feuer gänzlich ausgetrocknet hatte, daß solches noch einen Abgang von $\frac{1}{100}$ am Gewichte erlitten hatte. Nachdem ich hierauf das Pulver in eben dem Gemach von dem Feuer weiter entfernet hatte, so hat dasselbe in weniger als 2 Stunden schon wiederum den dritten Theil des erlittenen Abgangs erlanget.

Da nun die Luft öfters viel feuchter ist, als bey dem letzten Experiment, und über dieses auch noch die offene Luft viel mehr Feuchtigkeit in sich enthält, als in einem geschlossenen Gemach, wo Feuer gemacht wird, so kann man nicht zweifeln, daß nicht öfters der zwanzigste oder dreißigste Theil am Gewicht des besten Pulvers pures Wasser seyn solte, welches also sehr leicht als die Ursache aller vorerwehnten unbeständigen Würkungen des Pulvers angesehen werden kann.

Inzwischen habe ich doch nimmer merken können, daß die Feuchtigkeit, welche das Pulver aus der Luft zu sich genommen hatte, die Gewalt desselben im geringsten vermindert hätte, nachdem nehmlich solches wiederum getrocknet worden. Der Leser wird bey den in dem vorhergehenden Satz angeführten Experimenten wahrgenommen haben, wie genau diejenigen, welche mit gleich starken Ladungen, und unter einerley Umständen gemacht worden, mit einander übereinstimmen. In diesen Experimenten, ungeachtet dieselben zu verschiedenen Zeiten innerhalb den drey Sommer-Monathen gemacht worden, hat also die Trockne des Wetters allen hier gemeldeten Ungleichheiten vorgebeuget. Wenn man aber mit eben demselben Pulver im Winter bey feuchtem Wetter die Proben anstellt, so habe ich befunden, daß wenn man dasselbe eben wie im Sommer, ohne es vorher zu trocknen, gebraucht, die Würkungen davon sehr unbeständig und weit schwächer heraus kommen. Wenn man aber eine jede Ladung unmittelbar vor dem Gebrauch wohl trocknet, so habe ich nimmer den geringsten Abgang an der Kraft desselben beobachten können; und die

Würkungen waren auch mit denjenigen, welche den Sommer vorher gefunden worden, vollkommen einerley. Wenn aber das Pulver unbehutsamer Weise dem grösten Dunst ausgesetzet wird, oder wenn dasselbe allzuviel gemeines Saltz in sich enthält, so kann vielleicht die eingezogene Feuchtigkeit vermögend seyn, einen Theil von dem Salpeter völlig aufzulösen, welches ein Schade seyn würde, der durch keine Trocknung wiederum ersetzet werden könnte. Wenn man aber nur eine mäßige Sorgfalt in Bewahrung des Pulvers beobachtet, und wenn der Salpeter, woraus dasselbe besteht, von dem gemeinen Saltz wohl gereiniget worden, so kan dasselbe seine Gewalt viel länger behalten, als man insgemein dafür hält. Also habe ich gehört, daß Pulver, welches wohl verwahret gewesen, nach Verfliessung von 50 Jahren keinen Abgang an seiner Gewalt erlitten.

Man hat aber bey Trocknung des feuchten Pulvers nöthig, behutsam damit umzugehen. Denn es ist ein solcher Grad der Hitze, welcher, ob er gleich nicht hinreichet, das Pulver zu entzünden, dennoch den Schwefel zerschmelzet, und dadurch die gehörige Zusammensetzung zerstöret. Ja es giebt über dieses noch einen solchen Grad der Hitze, wodurch der Schwefel Feuer fängt und nach und nach wegbrennt, ohne daß das Pulver selbst davon entzündet werde Dieses kann ein jeder durch eigene Erfahrung leicht probiren. Man darf zu diesem Ende nur ein Stück Eisen roth glüend werden lassen, und indem dasselbe wiederum erkaltet, nach und nach darauf einige Körner Pulver werfen; auf diese Art wird man finden, daß nach einer gewissen Zeit die einzelnen Körner, welche man darauf fallen läßt, sich nicht mehr entzünden, sondern nur mit einer blauen Flamme, ohne verzehret zu werden, brennen. Es geschieht auch zuweilen, daß, wenn die Körner auf diese Art zu brennen angefangen, dieselben doch endlich völlig entzündet werden, welches sich gemeiniglich ereignet, wenn einige Körner nahe beysammen zu liegen kommen. Denn obgleich die Flamme eines jeglichen Korns insbesondere nicht hinreichend ist, dasselbe zu entzünden, so entsteht doch aus der Vereinigung zweyer oder mehr dergleichen Flammen eine solche Hitze, wodurch dieselben Körner endlich völlig entzündet werden. Wenn man nun diesen Grad der Hitze an dem Eisen genau trift, und dasselbe mit Pulver-Körnern bestreuet, so wird dasselbe mit einer blauen Flamme überzogen, welche öfters eine ziemliche Zeit dauret, ehe die gänzliche Entzündung des Pulvers erfolget. Wenn ich aber diese Körner noch vor der Entzündung weggenommen und untersuchet habe, so habe ich weder in ihrer Farbe, noch in ihrem Zustande, einige Veränderung wahrnehmen können. Da aber auf diese Art die Körner, wenn der Schwefel daraus

wegschmeltzt, die Kraft des Pulvers verlieren, so ist klar, daß das Pulver bey dem trucknen durch eine allzugrosse Hitze seiner Kraft beraubet werden könne.

Aus dem grossen Unterscheid, welcher sich zwischen dem feuchten und truckenen Pulver in Ansehung der in diesem Satz gemeldten Wirkungen äussert, erhellet zur Gnüge, wie ungewiß und unbeständig alle diejenigen practischen Anwendungen der Artillerie seyn müssen, wo man auf diesen Umstand nicht Acht hat, und wie wenig man auf solche Experimenten bauen könne, welche dieser Ungleichheit unterworfen sind.

Ehe ich diesen Articul schliesse, muß ich eines Einfalls Erwehnung thun, welchen ich einmahl über diese Materie gehabt. Da das Wasser, wenn dasselbe in Dünste aufgelöset wird, eine zehn mal grössere Elasticität als die Luft, wie man dafür hält, haben soll, so fiel ich auf die Gedanken, ob nicht in gewissen Fällen die von dem Pulver angezogene Feuchtigkeit eine solche Verhältniß haben könnte, daß dieselbe bey der Entzündung in Dünste aufgelöset, und also die Gewalt des Pulvers durch den Zuwachs dieser neuen Kraft um so viel mehr vermehret werden könnte, als die Verringerung an der Stärcke der Flamme austrüge. In der Meynung, daß dieses bißweilen würklich geschehen könne, wurde ich durch einige Experimente eines neuen Autoris bekräftiget, welcher anführet, daß die Schüsse, welche aus einem Mörser mit gleichen Ladungen geschehen, des Morgens, als es noch kühl war, weiter gegangen, als bey der Tages-Hitze. Denn ich sahe wohl, daß der Unterscheid der Dichte der Luft, wodurch derselbe diese Begebenheit erklären will, die Ursache hiervon unmöglich seyn könnte. Nachdem ich aber diese Sache fleißiger untersuchet hatte, so habe ich nimmer finden können, daß irgend ein Grad der Feuchtigkeit die Gewalt des Pulvers zu vermehren vermögend gewesen wäre. Denn aus allen den häufigen Versuchen, welche ich zu diesem Ende angestellt, habe ich niemahls bemerken können, daß die Gewalt die mittlere Grösse merklich übertroffen hätte, ausgenommen in zwey Experimenten; eben diese Vermehrung aber kam, wie ich zu vermuthen grossen Grund habe, vielmehr von einer Verrückung der Maschine her. Unterdessen, wenn die Elasticität der wässerichten Dünste so groß ist, als man insgemein dafür hält (welches gleichwohl noch keine ausgemachte Sache ist), so könnte es leicht seyn, daß daher einige Verstärkung bey Entzündung einer sehr grossen Menge Pulvers verursachet würde.

ANMERKUNG

In diesem Satz wird von dem Verfasser ein sehr wichtiger Umstand berühret, weswegen das Pulver zu einer Zeit eine weit geringere Gewalt ausübet, als zu einer anderen. Derselbe beruhet auf der Menge der Feuchtigkeit, welche das Pulver aus der Luft an sich gezogen. Hierbey kommen nun zwey Umstände vor, erstlich wie viel Feuchtigkeit das Pulver in einem jeglichen Fall in sich enthalte, und zweytens um wie viel die Gewalt desselben von einem jeglichen Grad der damit vermischten Feuchtigkeit vermindert werde. Das erstere läßt sich durch das Gewicht erkennen. Denn wenn man erstlich eine gewisse Quantität Pulver vollkommen trocknet und genau abwiegt, hernach aber bey einer jeden Veränderung der Luft das Gewicht derselben Quantität wiederum sorgfältig bemerket, so muß der Zuwachs des Gewichts immer anzeigen, wie viel Feuchtigkeit in dem Pulver enthalten ist. Weil die Feuchtigkeit der Luft durch das Hygrometrum ziemlich genau bestimmet werden kann, so könnte man über diesen Umstand nützliche Versuche anstellen, wenn man bey einem jeglichen verschiedenen Grad, den das Hygrometrum weiset, eine gewisse Quantität Pulver abwiegen sollte. Auf diese Art würde man erkennen, wie viel Feuchtigkeit das Pulver in einem jeglichen Zustand der Luft, welcher durch das Hygrometrum angezeiget wird, in sich enthalte. Man müßte aber bey einer jeden Veränderung, so in der Luft vorgeht, das Pulver eine geraume Zeit der Luft ausgesetzt lassen, damit dasselbe immer eben den Grad der Feuchtigkeit an sich nehmen könnte, welche die Luft hat. Denn es ist leicht zu erachten, daß wenn die Feuchtigkeit der Luft abnimmt, diejenige, welche sich schon vorher in das Pulver gezogen, nicht so bald wiederum durch die Ausdünstung davon gehen könne. Es würden sich auch bey der würklichen Anstellung solcher Versuche, allem Ansehen nach, noch mehr Schwierigkeiten einfinden, dennoch aber würden dieselben nicht hindern, daß dergleichen Experimente keinen sehr grossen Nutzen haben sollten. Da auch, wie der Autor bemerket, das schlechte Pulver weit mehr als das gute von der Feuchtigkeit der Luft an sich ziehet, so könnte man auch auf diese Art die Güte des Pulvers untersuchen: indem dasjenige unstreitig das beste ist, welches am wenigsten Feuchtigkeit zu sich nimmt.

Wenn man nun auf diese Art gefunden hat, wie viel Feuchtigkeit das Pulver zu einer jeden Zeit in sich enthält, so kann man nach der von dem Autore erfundenen Methode leicht untersuchen, um wie viel dadurch die Ge-

walt verringert wird; und solchergestalt würde man im Stande seyn, die Würkung des Pulvers bloß allein aus der Theorie weit genauer zu bestimmen, als bißhero möglich gewesen. Der Verfasser führet hier, um die verminderte Kraft des feuchten Pulvers darzuthun, ein merkwürdiges Exempel an, daß der Kugel von feuchtem Pulver nur eine Geschwindigkeit von 1200 Schuh in einer Secunde mitgetheilet worden, da unter eben denselben Umständen von trockenem Pulver die Geschwindigkeit der Kugel 1700 Schuh in einer Secunde ausgetragen. Er bestimmt zwar nicht, wie viel Feuchtigkeit in diesem Fall mit dem Pulver vermischet gewesen; wenn wir aber annehmen, daß die Feuchtigkeit den dreißigsten Theil des ganzen Gewichts betragen, so könnte man sagen, daß wenn das Pulver mit dem dreyßigsten Theil Wasser vermischet wird, seine Gewalt um $\frac{5}{17}$ vermindert werde. Wenn nun ferner, welches zwar nicht zu vermuthen ist, der Abgang der Gewalt des Pulvers immer der damit vermischten Feuchtigkeit proportional wäre, so könnte man hieraus finden, um wie viel die Gewalt des Pulvers durch eine jegliche andere Menge Feuchtigkeit, so damit vermischet ist, vermindert werde.

Denn laßt uns setzen, daß die mit dem Pulver gemischte Feuchtigkeit den $\frac{1}{n}$ Theil des Gewichts austrage, so müßte sich $\frac{1}{30}$ zu $\frac{1}{n}$ verhalten wie $\frac{5}{17}$ zu dem gesuchten Verlust der Gewalt des Pulvers, welcher folglich $=\frac{150}{17n}$ oder beynahe $=\frac{9}{n}$ seyn würde. Wenn also nur der hundertste Theil Feuchtigkeit mit dem Pulver vermischet ist, so müste die Kraft desselben um den $\frac{1}{11}$ Theil abnehmen, welcher Verlust gleichwohl weit grösser seyn würde, als die von dem Autore angeführten Experimente anzeigen. Denn da, wie der Autor berichtet, solches Pulver, welches lange Zeit in einem warmen Zimmer gelegen, dennoch bey der Trocknung noch den $\frac{1}{100}$ Theil von seinem Gewichte verlohren, so muß sich vermuthlich öfters ein eben so grosser Unterscheid bey dem Pulver, womit die vorhergemeldeten Experimente gemacht worden, befunden haben, welche doch diesem ungeachtet mit des Autoris Theorie ziemlich genau überein zu kommen scheinen. Dahero zu schliessen ist, daß, wenn nur der hundertste Theil Feuchtigkeit mit dem Pulver vermischet ist, seine Gewalt dadurch nicht merklich vermindert werde.

Man siehet aus demjenigen, was bißher angeführet worden, auch leicht, daß die verschiedene Schwehre und Dichtigkeit der Luft in der Würkung des Pulvers keine merkliche Veränderung verursachen könne. Man könnte zwar denken, daß, da eine schwehre Luft stärker gegen die Kugel, indem dieselbe von dem Pulver durch den Lauf heraus getrieben wird, drücket, als eine

leichtere, die Geschwindigkeit im erstern Fall mehr vermindert werden müßte, als in dem letztern. Allein, da wir oben gewiesen haben, daß kein merklicher Unterscheid in der Geschwindigkeit der Kugel heraus kommt, wenn man auch den Gegendruck der Luft völlig aus der Acht läßt, so kann die verschiedene Schwehre desselben um so viel weniger einen merklichen Unterscheid verursachen.

ELFTER SATZ

Die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher die aus der Entzündung des Pulvers entstehende Flamme durch ihre eigene Ausdehnungs-Kraft fortgehet, wenn weder eine Kugel noch ein anderer Körper vor das Pulver in dem Stück geladen wird.

Wenn das ganze Wesen des Pulvers in eine subtile elastische Materie bey der Entzündung verwandelt würde, so könnte man aus der Ausdehnungs-Kraft desselben, welche oben bestimmet worden, und ihrer Dichtigkeit, welche gleichfals bekannt ist, den Grad der Geschwindigkeit, womit sich dieselbe auszudehnen anfängt, leicht bestimmen, und daraus ferner die darauf folgende Vermehrung derselben durch die Seele des Stücks heraus bringen. Nachdem wir aber dargethan haben, daß diese subtile elastische Materie, worinn die Gewalt des Pulvers bestehet, nur ungefehr $\frac{3}{10}$ von der ganzen Substantz des Pulvers beträgt, so bleiben die übrigen $\frac{7}{10}$ nach der Entzündung mit der subtilen elastischen Materie vermischet, und müssen dahero durch ihre Schwehre die Würkung desselben hemmen. Ueber dieses sind auch diese zwey verschiedenen Materien, worinne sich das Pulver auflöset, nicht so genau mit einander vereiniget, daß dieselben einerley Bewegung theilhaftig werden, sondern die gröbern Theile müssen weit langsamer fortgetrieben werden, als die subtilen: ja viele von denselben bleiben so gar in dem Lauf zurück, wie aus der Unreinigkeit, welche sich in den Schieß-Gewehren, nachdem dieselben öfters gebrauchet worden, befindet, leicht abzunehmen ist.

Diese Ungleichheit, welcher die ausdehnende Bewegung der Flamme unterworfen ist, nöthiget uns, um dieselbe genau zu bestimmen, unsere Zuflucht zu der Experientz zu nehmen, und darauf allein unsere Untersuchung zu gründen.

Die Experimente, welche zu diesem Ende angestellet worden, waren von zweyerley Art: die ersten wurden gemacht mit dem Lauf, welchen wir oben[1]) mit dem Buchstaben *A* bemerket haben. Derselbe wurde mit 12 Drachm. Pulver, nebst einem leichten Pfropf von Hanf, geladen; und nachdem seine Mündung 19 Zoll von dem Mittel-Punkt des in dem siebenten Satze beschriebenen Penduli entfernet worden, so wurde dasselbe in dieser Lage loßgeschossen, und bemerkt, daß das Pendulum von der Gewalt der blossen Flamme durch einen Bogen zurück getreten, dessen Sehne 13,7 Zoll betragen. Wenn wir nun annehmen, daß die ganze Substantz des Pulvers auf das Pendulum gestossen, und daß alle Theile mit einerley Geschwindigkeit gegangen, so folget, daß diese Geschwindigkeit ungefehr 2650 Schuh in einer Secunde hätte austragen müssen. Dieses ist also die kleinste Geschwindigkeit, welche man dem Pulver in seiner Ausdehnung zuschreiben kann. Wenn wir aber setzen, daß die subtilen elastischen Theile eine weit grössere Geschwindigkeit in dieser Ausdehnung erlangen, als die gröbern, welches ohne Zweifel der Wahrheit gemäß ist, so muß die vorher gefundene gemeine Geschwindigkeit, in Ansehung der subtilen Theile des Pulvers vermehret, in Ansehung der gröbern aber vermindert werden. Da auch, allem Ansehen nach, ein merklicher Theil der Geschwindigkeit, indem die Flamme durch den Raum von 19 Zollen durchgedrungen, verlohren gegangen, so habe ich hierüber die folgenden Experimente angestellt, welche dieser Schwierigkeit nicht unterworfen sind.

Ich befestigte den mit dem Buchstaben *A* bemerkten Lauf dergestalt auf das Pendulum, daß die Axe desselben horizontal und zugleich perpendicular auf die Fläche des Bretts war, oder, welches einerley, daß derselbe in die Fläche der Schwingungen des Penduli zu liegen kam. Das Punkt, wo die Axe des Laufs das Pendulum berührte, war 6 Zoll über dem Mittelpunkt des Bretts, und das Gewicht des Laufs nebst dem Eisen, welches zur Befestigung gebraucht worden, war $11\frac{1}{2}$ Pfund. In dieser Lage wurde der Lauf mit 12 Drachm. Pulver ohne Kugel und Pfropf geladen, und das Pulver nur allein mit dem Ladestock zusammen gedruckt. Nachdem nun der Schuß geschehen, so stieg das Pendulum durch einen Bogen hinauf, dessen Sehne von 10 Zollen befunden worden. Wenn man nun diese Würkung auf einen gleich starken Stoß gegen das Mittel-Punkt des Penduli reducirt, und dasjenige, was das Gewicht des Laufs dazu beygetragen, abzieht, so wird man finden, daß dasselbe durch einen Bogen, dessen Sehne 14,4 Zoll, gestiegen seyn würde.

1) Siehe p. 123. F. R. S.

Eben dieses Experiment ist zum andern mahl wiederhohlet worden, und da wurde die Sehne des Bogens, durch welchen das Pendulum gestiegen, von 10,1 Zoll befunden, welche auf obige Art reducirt 14,6 Zoll geben.

Um den Unterscheid in der Geschwindigkeit zu untersuchen, welcher sich in den verschiedenen Theilen der Flamme befindet, habe ich den vorigen Lauf wiederum mit 12 Drachm. Pulver geladen, und dasselbe mit einem Pfropf von Hanf, so 1 Drachm. wog, zusammen getrieben. Ich stellte mir nun vor, daß dieser Vorschlag, weil derselbe so leicht war, augenblicklich eben denjenigen Grad der Geschwindigkeit erlangen würde, mit welchem sich der subtile Theil des Pulvers vor sich allein, wann kein Vorschlag vorhanden gewesen wäre, ausgedehnt haben würde: und auf diese Art fand ich, daß die Sehne des aufsteigenden Bogens würcklich auf 12 Zoll vermehret worden, welche nach der obigen Reduction auf das Mittel-Punkt des Penduli 17,3 Zoll austragen. Da nun in den beyden erstern Experimenten die mittlere Länge der Sehne war 14,5 Zoll, so hat in dem gegenwärtigen Fall, da die Gewalt durch den Zusatz von 1 Drachm. Materie, so sich mit dem geschwindesten Theil der Flamme gleich beweget, vermehret worden, die Sehne des aufsteigenden Bogens um 2,8 Zoll zugenommen. Folglich war die Geschwindigkeit, welche dieser Drachma Materie eingedruckt worden, von 7000 Schuh in einer Secunde.

Man könnte vielleicht gegen diese Bestimmung einwenden, daß die Vermehrung des Bogens, durch welchen das Pendulum in diesem Fall zurück getreten, nicht allein von der dem Vorschlag mitgetheilten Bewegung hergekommen, sondern daß die nähere Einschränkung des Pulvers, wodurch ein grösserer Theil davon entzündet worden, nicht wenig zu dieser Vermehrung beygetragen. Allein, wenn es wahr wäre, daß sich nicht alles Pulver, sondern nur ein Theil davon entzündete, wenn kein Vorschlag gebraucht wird, so würde man nicht wahrnehmen, daß, wenn man verschiedene Quantitäten Pulver ohne Vorschlag loßbrennet, alsdenn die Sehne des aufsteigenden Bogens nach eben der Verhältniß zu- und abnehme, als die Quantität des Pulvers vermehret oder vermindert worden. Welche Verhältniß doch, wie ich durch viele Versuche befunden, ziemlich genau eintrift. Denn, als ich 9 Drachm. Pulver geladen, so fand ich die Sehne des aufsteigenden Bogens von 7,3 Zoll, welche mit einer Ladung von 12 Drachm. 10 bis 10,1 Zoll lang gewesen. Als ich aber nur 3 Drachm. zur Ladung genommen, so wurde diese Sehne nur 2 Zoll, welche Länge zwar um $\frac{1}{2}$ Zoll kleiner ist, als obgedachte Verhältniß erfordert: es können aber hiervon zwo andere wichtige Ursachen angezeiget werden.

Es findet sich aber hier eine noch viel stärkere Probe, daß sich alles Pulver auf einmahl entzündet, wenn auch kein Vorschlag vor die Ladung gesetzt wird. Dieselbe beruhet hierauf, daß der Theil der Bewegung des Penduli, welcher von der Ausdehnung des Pulvers allein herrühret, nicht grösser ist, wenn eine Kugel vor das Pulver geladen wird, als wenn man eben dieselbe Quantität allein loßbrennet, ohne daß dieselbe vermittelst eines Vorschlags zusammen gehalten worden. Wir haben gesehen, daß die Sehne des Bogens, durch welche das Pendulum von der Ausdehnungs-Kraft des Pulvers allein gestossen worden, 10 oder 10,1 Zoll gewesen: als ich aber denselben Lauf auf die gewöhnliche Art mit Vorschlag und Kugel geladen, so habe ich die Sehne des gedachten Bogens einmahl $22\frac{1}{4}$, ein andermahl $22\frac{7}{8}$ Zoll lang gefunden, wozwischen 22,56 die Mittel-Zahl ist. Wenn wir nun setzen, daß die Kugel nebst dem Vorschlag an eben dem Ort, wo der Lauf gegen das Pendulum befestigt worden, aufgestossen, und das mit eben derselben Geschwindigkeit, welche dieselbe bey der Mündung des Laufs erhalten hätte, so müste davon das Pendulum durch einen Bogen, dessen Sehne ungefehr 12,3 Zoll, getrieben werden: welches aus dem Gewichte des Penduli, dem Gewichte der Kugel und ihrer Geschwindigkeit, nebst dem Ort, wo dieselbe aufgestossen, nach den vorher angeführten Experimenten und Regeln abzunehmen ist. Wenn man also diese Zahl 12,3 von der vorher gefundenen 22,56 abzieht, so muß der Rest 10,26 beynahe die Sehne des Bogens anzeigen, durch welchen das Pendulum von der Kraft des Pulvers allein gestossen worden, wenn man damit eine Kugel geladen. Diese Zahl 10,26 ist nicht merklich unterschieden von 10,1, wodurch die Sehne des aufsteigenden Bogens ausgedruckt worden, als wir eben dieselbe Quantität Pulver ohne Kugel und Vorschlag gegen das Pendulum abgefeuret hatten.

Daß aber diese Geschwindigkeit von 7000 Schuh in einer Secunde, welche wir für den würkenden Theil der Flamme herausgebracht, nicht zu groß sey, erhellet gantz deutlich aus dem 38sten Experiment, welches oben angeführet worden. Denn in demselben wurde die Kugel mit einer Geschwindigkeit von 2400 Schuh in einer Secunde heraus getrieben. Wenn sich nun die Flamme nicht mit einer weit grösseren Geschwindigkeit ausgebreitet hätte, so hätte man eine merkliche Verminderung ihrer Gewalt auf diese so schnelle Bewegung der Kugel wahrnehmen müssen, welches doch nicht geschehen. Folglich mußte in diesem Fall der Grad der Geschwindigkeit, womit sich das Pulver hinter der Kugel würklich ausgebreitet, ohne einen merklichen Theil seiner Kraft zu

verlieren, weit kleiner seyn, als derjenige, womit sich das Pulver allein, wenn keine Kugel daselbst gewesen wäre, ausgedehnet haben würde.

Und in eben dieser erstaunlichen Geschwindigkeit, womit sich die Flamme von dem entzündeten Pulver ausbreitet, bestehet hauptsächlich die so gantz ausserordentliche Gewalt derselben, wodurch sie alle andere sowohl alte als neue Erfindungen, welche immer zum Behuf des Kriegs-Wesens gemacht worden, so weit übertrift. Wenn man zwar nur auf die Grösse der Bewegung sieht, welche den geworfenen Körpern eingedruckt wird, und welche man aus dem Gewicht derselben mit der Geschwindigkeit multiplicirt zu schätzen pflegt, so muß man gestehen, daß viele Kriegs-Maschinen der Alten eine weit grössere Bewegung hervor zu bringen vermögend gewesen, als unsere heut zu Tage üblichen schwersten Canonen und Mörser. Allein die entsetzliche Geschwindigkeit, womit man anjetzo die Körper vermittelst des Pulvers fortzutreiben im Stande ist, kann mit jenen in keine Vergleichung gebracht werden. Die Ursache von diesem Unterscheid bestehet hierinne, daß zwar die Alten die forttreibende Gewalt theils durch Gewichte, theils durch Federn und verdrehete Stricke, nach Belieben vermehren konnten, allein eine jegliche Vermehrung der Gewalt vermehrte zugleich die Materie, welche damit in Bewegung gesetzt werden muste, dergestalt, daß wenn die Gewalt verstärket wurde, zugleich auch diejenigen Theile der Maschine, welche die Bewegung geben solten, am Gewichte zunahmen. Dahero dann nothwendig folgte, daß die Würkung der Gewalt nicht allein auf die Bewegung der fortzutreibenden Körper angewandt werden konnte, sondern der gröste Theil derselben muste auf die Bewegung derjenigen Theile der Maschine selbst, mit welchen die Kraft verknüpft war, verwandt werden, um dieselben in Stand zu setzen, dem Körper, welcher fortgetrieben werden solte, nachzufolgen, und denselben immer weiter fortzustossen, so weit sich der Raum ihrer Würcksamkeit erstreckte. Aus diesem Grunde geschahe es nun, daß, obgleich diese alten Maschinen ungeheure Gewichte forttreiben konnten, dennoch die Geschwindigkeit derselben sehr geringe war, in Ansehung derjenigen, welche anjetzo durch die Gewalt des Pulvers den Kugeln und andern Körpern eingedruckt werden können. Dahero in allen Gelegenheiten, wo es auf eine sehr schnelle Bewegung ankommt, unsere jetzigen Maschinen einen sehr grossen Vortheil vor den alten erhalten. Wo aber keine so schnelle Bewegung erfordert wird, da könnten auch noch heut zu Tage die alten Maschinen mit nicht geringem Vortheil gebraucht werden. Dahero dieselben auch noch alle Aufmersamkeit bey den Kriegsverständigen verdienen,

welche eine hinlängliche Fähigkeit besitzen, einen jeglichen Theil ihrer Profession nach seinem wahren und eigentlichen Werth in Erwegung zu ziehen, und sich nicht an die Vorurtheile der Zeit, in welcher sie leben, kehren.

Aus den in diesem Satze gegebenen Bestimmungen läßt sich auch die Gewalt der Petarden erklären, indem ihre Würkung bloß allein auf der Kraft der Flamme beruhet. Hieraus erhellet auch, daß eine Quantität Pulver, vermittelst einer solchen Maschine, wenn dieselbe wohl zugerüstet worden, eine eben so grosse Würkung hervor bringen könne, als eine Kugel, welche zweymahl so schwer ist, und sich mit einer Geschwindigkeit von 14 bis 1500 Schuh in einer Secunde bewegt.

ERSTE ANMERKUNG

Wir haben schon oben bemerket, daß die Geschwindigkeit, welche der Kugel von dem Pulver eingedruckt wird, nicht allein von desselben Ausdehnungskraft herkomme, sondern daß auch die Geschwindigkeit selbst, mit welcher die Flamme der Kugel nachfolget, in Betrachtung gezogen werden müsse. Denn es ist klar, daß, so groß auch immer die Gewalt des Pulvers angenommen wird, der Kugel dennoch von demselben kein grösserer Grad der Geschwindigkeit eingedruckt werden könne, als derjenige ist, womit sich die Flamme des Pulvers selbst, wenn keine Kugel vorhanden wäre, ausbreiten würde. Dieser Grad der Geschwindigkeit kan nun der Kugel nimmermehr mitgetheilet werden, indem das Pulver nur in so ferne auf die Kugel würket, als dieselbe noch langsamer fortgehet, als die Flamme selbst fortgehen würde, wenn die Kugel in demselben Augenblick zernichtet würde. Da nun die Kugel selbst, kraft ihrer Schwehre, der Bewegung wiederstehet, und auch über dieses noch vielerley äusserlichen Wiederstand antrift, so ist leicht zu erachten, daß dieselbe nimmer den Grad der Geschwindigkeit, womit sich die Flamme selbst ausdehnet, erreichen könne. Hieraus sieht man auch ferner, daß der höchste Grad der Geschwindigkeit, welcher einer Kugel von dem Pulver mitgetheilet werden kann, beständig um soviel kleiner seyn müsse, als derjenige ist, welchen die bloße Flamme erreichen kann, je schwerer die Kugel selbst, und je grösser der äusserliche Wiederstand ist. Um dieser Ursache willen ist also die Frage, welche der Verfasser in dem gegenwärtigen Satze aufwirft, von der grösten Wichtigkeit, indem, ehe dieselbe erörtert worden, die wahre Geschwindigkeit der Kugel aus der Gewalt

des Pulvers unmöglich bestimmt werden kann. Der Autor sieht zwar die Auflösung dieser Frage an sich selbst betrachtet, als sehr leicht an, und findet nur in den ungleichen Theilen, worein das Pulver durch die Entzündung aufgelöset wird, eine so grosse Schwierigkeit, daß er die Theorie völlig bey Seite setzt, und seine Zuflucht bloß allein zu den Experimenten nimmt. Ungeachtet wir nun an der Geschicklichkeit des Verfassers, dergleichen Fragen aufzulösen, keinesweges zweifeln, so glauben wir doch, daß derselbe bey dieser Frage, wenn auch der gemeldete Umstand nicht da wäre, nicht wenig Schwierigkeit gefunden haben würde. Denn diese Frage erfordert die tiefste Einsicht in die Natur, und die Gesetze der Bewegung flüßiger Cörper; und es ist noch nicht lange, daß man sich im Stande befindet, dergleichen Aufgaben durch Hülffe der Rechnung auszuführen.

Wir haben diese wichtige Erweiterung der mathematischen Wissenschaften den beyden weit berühmten Männern Johanni und Daniel Bernoulli zu danken, von welchen der letztere diese Materie zuerst in seinem unvergleichlichen Werke von der Hydrodynamic abgehandelt, und das ganze Werk meistentheils auf die Erhaltung der sogenannten lebendigen Kräfte gegründet. Sein Herr Vater, der Hr. Prof. Joh. Bernoulli in Basel hat hierauf die Natur dieser Bewegungen aus den ersten Grundsätzen der Mechanic auf eine sehr sinnreiche Art erkläret, welche Abhandlung sich sowohl in dem IX. Theil der Werke der Kayserl. Academie in St. Petersburg[1]), als der vor einigen Jahren in Lausanne herausgekommenen Sammlung aller Werke dieses grossen Manns, befindet. Da nun diese wichtigen Erfindungen unserm Verfasser, als er sein Werk geschrieben, noch unbekannt gewesen, so ist auch schwehr zu glauben, daß er mit der Auflösung dieser Frage so leicht würde haben zurechte kommen können; ungeachtet er dieselbe für sehr leicht zu halten scheinet. Die gröste Schwierigkeit bestehet aber gar nicht darinne, daß die ungleichen Theile, worein das Pulver durch die Entzündung aufgelöset wird, auch in eine ungleiche Bewegung gesetzet werden: sondern wenn auch diese Ungleichheit nicht vorhanden wäre, so würde doch die Bestimmung der verschiedenen Kräfte, welche auf alle Theilchen insbesondere würken, noch weit schwerer fallen. Insonderheit aber wenn man betrachtet, daß in einem jeglichen Zustand, worinn sich die aus dem Pulver erzeugte Luft während der Ausdehnung befindet, nicht alle Theile einen gleichen Grad der Elasticität, und folglich auch nicht einen gleichen Grad der Dichtigkeit, haben können; so er-

1) Siehe die Anmerkung 3 p. 6. F. R. S.

eignen sich in der Ausrechnung so viel Schwierigkeiten, daß auch die obgemeldeten Methoden der Herren Bernoulli kaum hinreichend sind, dieselben zu überwinden. Denn da, wie wir schon oben erinnert haben, die Bewegung eines jeglichen Theilchens, so lange die Ausbreitung dauret, beständig vermehret wird, so muß auch ein jegliches Theilchen von hinten stärker, als von vornen gedruckt werden: folglich muß die elastische Kraft hinten immer grösser seyn, als vorne. Wenn also eine Kugel vor dem Pulver befindlich ist, so muß dieselbe nach der Entzündung immer nur von der kleinsten Kraft, womit die Theile der Flamme begabet sind, fortgestossen werden, weil darauf nur die vordersten Theile mit ihrer Elasticität würken. Weil aber die Theilchen dieser aus dem Pulver erzeugten elastischen Materie so sehr subtil sind, und also eine sehr geringe Kraft erfordert wird, um dieselben in Bewegung zu setzen, so kann auch die Ungleichheit in der Elasticität nicht merklich seyn, dahero wir uns nicht viel von der Wahrheit entfernen werden, wenn wir annehmen, daß in einem jeden Augenblick die Elasticität durch die ganze subtile Materie gleich zertheilet sey. Auf diese Art fallen aber die grösten Schwierigkeiten weg, und die Frage kann nach den obgemeldeten Methoden folgendergestalt aufgelöset werden.

Weil man die aus dem Pulver durch die Entzündung erzeugte subtile elastische Materie als eine sehr stark zusammengepreßte Luft ansehen kann, so wollen wir setzen, daß im ersten Augenblick nach der Entzündung in dem hohlen

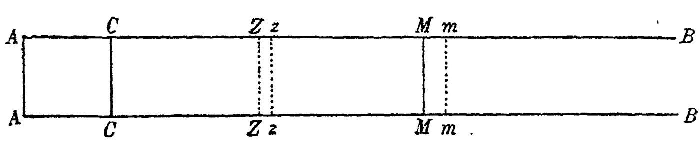


Fig. 9.

Cylinder $AABB$ (Fig. 9) der Raum $AACC$ mit dergleichen zusammen gepreßten Luft erfüllet gewesen. Es sey nun die Länge dieses gantzen Cylinders $AB = a$; die Weite desselben $= cc$, und die Länge $AC = b$; die in diesem Raum AC zusammen gepreßte Luft aber sey m mahl dichter, als die natürliche Luft, so wird auch nach der gemeinen Regel die Elasticität derselben m mahl grösser seyn, als die Elasticität der natürlichen Luft. Wenn wir also die Höhe des Quecksilbers in dem Barometer setzen $= h$, deren Schwehre der Elasticität der natürlichen Luft gleich ist, so wird die Elasticität der natürlichen Luft durch das Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe $= 12000h$, ausgedrucket werden, folglich wird die Elasticität der in dem Raum AC zusammengepreßten Luft

dem Druck einer natürlichen Luft-Säule, welche $12000mh$ hoch ist, gleich seyn. Lasst uns nun setzen, daß sich diese Luft nach einiger Zeit schon bis MM ausgedehnet habe, und nennen die Länge dieses Raums $AM = x$; so wird die Dichte der durch diesen Raum ausgebreiteten Luft sich zur anfänglichen Dichte in AC verhalten, wie AC zu AM, das ist, wie b zu x, und also wird dieselbe noch $\frac{mb}{x}$ mahl grösser seyn, als die der natürlichen Luft, und ihre Elasticität wird dem Gewicht einer natürlichen Luft-Säule gleichen, deren Höhe ist

$$= \frac{12\,000\,mbh}{x}.$$

Wenn wir nun annehmen, daß sich diese Luft gantz allein durch ihre Kraft ausbreite, und weder eine Kugel noch einen Pfropf vor sich her stossen müsse, so kann die Geschwindigkeit, mit welcher diese Ausdehnung geschieht, auf einen jeglichen Augenblick, und an einem jeglichen Orte, also bestimmet werden. Es sey $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich die vorderste Scheibe MM gegen BB fort beweget, dergestalt daß v die Höhe andeutet, aus welcher ein schwerer Körper durch den Fall eben diejenige Geschwindigkeit erhält, mit welcher die Scheibe MM fortgehet. Da wir nun annehmen, daß sich die zusammengedruckte Luft beständig gleichförmig ausbreite, so wird eine jegliche andere Scheibe ZZ um so viel langsamer fortgehen, je näher dieselbe dem Boden AA ist. Wenn wir also diese Entfernung $AZ = z$ setzen, so wird die Geschwindigkeit in ZZ seyn $= \frac{z\sqrt{v}}{x}$ und indem die vordere Scheibe MM durch den unendlich kleinen Weg $Mm = dx$ fortrücket, so wird die Scheibe ZZ durch einen Weg, so $= \frac{z\,dx}{x}$ fortgehen. Da aber die Geschwindigkeit vermehret wird, so wollen wir nach den Regeln der Differential-Rechnung setzen, daß indem MM durch Mm fortgehet, die Höhe v um dv oder die Geschwindigkeit selbst $\sqrt{v}$ um $\frac{dv}{2\sqrt{v}}$ vermehret werde; so wird in eben der Zeit die Geschwindigkeit der Scheibe ZZ um

$$\frac{z\,dv}{2x\sqrt{v}}$$

und die Höhe $\frac{zzv}{xx}$, aus welcher diese Geschwindigkeit erlanget wird, um

$$\frac{zz\,dv}{xx}$$

zunehmen. Wir wollen nun der Scheibe ZZ eine Dicke $Zz = dz$ geben, der-

gestalt, daß ihr Inhalt seyn soll $= ccdz$, und da die Luft in diesem Zustand $\frac{mb}{x}$ mahl dichter ist, als die natürliche, so wird die Scheibe $ZZzz$ in Ansehung der Materie, einer gleich dicken Scheibe natürlicher Luft gleichen, deren Höhe $= \frac{mbdz}{x}$. Da nun die Bewegung dieser Scheibe vermehret wird, keine solche Vermehrung aber ohne Kraft hervorgebracht werden kann, so wollen wir setzen, daß die Kraft, wodurch die Geschwindigkeit der Scheibe $ZZzz$ vermehret wird, dem Gewicht einer natürlichen gleich dicken Luft-Säule gleiche, deren Höhe $= 12000p$. Weil wir nun gesehen, daß, indem diese Scheibe durch den Weg $\frac{zdx}{x}$ fortrückt, die ihre Geschwindigkeit bestimmende Höhe $\frac{zzv}{xx}$ um $\frac{zzdv}{xx}$ wachse, so muß sich nach den Grund-Gesetzen der Mechanic dieser Zuwachs $\frac{zzdv}{xx}$ zu dem Wege $\frac{zdx}{x}$ verhalten, wie die fortstossende Kraft $12000ccp$ zum Gewicht der Scheibe $\frac{mbccdz}{x}$, das ist

$$\frac{zzdv}{xx} : \frac{zdx}{x} = 12000\,ccp : \frac{mbccdz}{x},$$

woraus man bekommt die Grösse der zur Forttreibung dieser Scheibe erforderten Kraft

$$12000ccp = \frac{mbccz\,dzdv}{xxdx} = \frac{mbccdv}{xxdx} \cdot zdz.$$

Da nun zu der unendlich kleinen Scheibe $ZZzz$ so viel Kraft erfordert wird, so wird das Integrale der gefundenen Formul, nehmlich

$$\frac{mbccdv}{xxdx} \cdot \frac{zz}{2},$$

die Kraft anzeigen, welche zur Acceleration der im Raum $AAZZ$ befindlichen Luft nöthig ist, und wann wir jetzt $z = x$ setzen, so kommt die gäntzliche Kraft, von welcher die Acceleration aller im Raum $AAMM$ eingeschlossenen Luft herrühret, heraus, und wird

$$= \frac{mbccdv}{2dx}.$$

Diese Kraft muß nun, wenn kein Wiederstand vorhanden, der elastischen Kraft, womit diese zusammen gedruckte Luft begabet ist, gleich seyn, welche durch das Gewicht einer natürlichen Luft-Säule, deren Höhe $= \frac{12000\,mbh}{x}$ und Dicke $= cc$, ausgedruckt worden; folglich bekommen wir diese Vergleichung:

$$\frac{dv}{2\,dx} = \frac{12000\,h}{x}, \quad \text{oder} \quad dv = \frac{24000\,h\,dx}{x},$$

davon das Integrale gibt

$$v = 24000\,h\,l\,\frac{x}{b}.$$

Wenn wir nun für x setzen $AB = a$, so bekommen wir die Höhe, aus welcher eben diejenige Geschwindigkeit erzeuget wird, womit die in unserm hohlen Cylinder zusammen gepreßte Luft bey der Oefnung BB herausfahren wird; und diese Höhe ist also

$$= 24000\,h\,l\,\frac{a}{b}.$$

Wobey zu merken, daß alhier für $l\frac{a}{b}$ nicht die gewöhnlichen Logarithmi, sondern die so genannten hyperbolischen Logarithmi genommen werden müssen. Wenn man sich aber der gemeinen bedienen will, so muß man dieselben mit dieser Zahl 2,30258509 multipliciren, oder man bekommt

$$v = 55261\,h\,l\,\frac{a}{b}.$$

Will man aber wissen, wie viel Schuhe diese Geschwindigkeit in einer Secunde betrage, so darf man nur die Länge h in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhes ausdrucken, und die Quadrat-Wurzel aus v durch 4 dividiren. Wenn nun $h = 30$ Englische Zoll genommen wird, so ist nach Rheinländischem Maaß $h = 2425$, und die gesuchte Geschwindigkeit beträgt

$$\frac{1}{4}\sqrt{55261 \cdot 2425\,l\,\frac{a}{b}}$$

Rheinl. Schuhe in einer Secunde. In dem von dem Autore zuerst angeführten Exempel war

$$a = 45 \quad \text{und} \quad b = 2\frac{5}{8}, \quad \text{folglich} \quad \frac{a}{b} = \frac{360}{21} = \frac{120}{7},$$

dahero mußte in diesem Fall die Flamme, wenn weder Kugel noch Vorschlag vor das Pulver geladen worden, und auch kein äusserlicher Wiederstand vorhanden wäre, aus dem Lauf mit einer Geschwindigkeit heraus fahren, womit in einer Secunde so viel Schuhe, als diese Zahl

$$\frac{1}{4}\sqrt{55261 \cdot 2425 \cdot 1{,}23408}\,[1])$$

1) Im Original $\frac{1}{4}\sqrt{55261 \cdot 2425 \cdot 1{,}23438}$. Berichtigt von F. R. S.

anzeigt, werden durchlaufen können. Da nun

$$
\begin{array}{rl}
l\,55261 = & 4,7424187 \\
l\,2425 = & 3,3847117 \\
l\,1,23408 = & 0,0913435 \\
\hline
 & 8,2184740
\end{array}
$$

die Hälfte genommen

$$
\begin{array}{rl}
 & 4,1092370 \\
\text{subtr. } l\,4 = & 0,6020600 \\
\hline
 & 3,5071770,
\end{array}
$$

so beträgt diese Geschwindigkeit so viel Schuh 3215 in einer Secunde. Welche Zahl mehr als um die Hälfte kleiner ist, als diejenige, welche der Autor durch seine Experimenta herausgebracht, ungeachtet wir hier weder auf den Gegendruck der Luft, noch auf den Wiederstand derselben, gesehen haben, welche beyde Umstände diese Geschwindigkeit noch mehr verringern müssen. Denn, da der Gegendruck der Luft dem Gewicht des Quecksilbers im Barometer, und folglich einer Luft-Säule, so $12000\,h$ hoch ist, gleichet, der Wiederstand einer Luft-Säule aber, deren Höhe $= v$, gleich ist, so wird die sämtliche Resistenz $= (12000\,h + v)c^2$, welche in der obigen Rechnung von der fortstossenden Kraft

$$\frac{12\,000\,mbcch}{x}$$

abgezogen werden muß. Dahero wir diese Vergleichung erhalten

$$\frac{mb\,dv}{2\,dx} = \frac{12\,000\,mbh}{x} - 12000\,h - v,$$

welche in diese verwandelt wird

$$dv + \frac{2\,v\,dx}{mb} = \frac{24\,000\,h\,dx}{x} - \frac{24\,000\,h\,dx}{mb}.$$

Diese Aequation wird integrabel, wenn man sie mit $e^{\frac{2x}{mb}}$ multipliciret, allwo e die Zahl bedeutet, deren Logarithmus hyperbolicus gleich ist 1, oder es ist $e = 2,718281828$; das Integrale selbst aber wird:

$$e^{\frac{2x}{mb}}v = 24000\,h\int\frac{e^{\frac{2x}{mb}}dx}{x} - 12000\,he^{\frac{2x}{mb}}.$$

Wenn nun m eine so grosse Zahl andeutet, daß der Bruch $\frac{2x}{mb}$ sehr klein wird, so wird beynahe

$$e^{\frac{2x}{mb}} = 1 + \frac{2x}{mb}$$

und folglich

$$\int \frac{e^{\frac{2x}{mb}}\,dx}{x} = l\frac{x}{b} + \frac{2x}{mb} - \frac{2}{m},$$

weil dieses Integrale verschwinden muß, wenn $x = b$. Dahero bekommt man

$$\left(1 + \frac{2x}{mb}\right)v = 24000hl\frac{x}{b} + \frac{24000hx}{mb} - \frac{24000h}{m}.$$

Man multiplicire durch $\frac{1}{1+\frac{2x}{mb}}$ oder durch $1 - \frac{2x}{mb}$, so wird

$$v = 24000h\left(1 - \frac{2x}{mb}\right)l\frac{x}{b} + \frac{24000hx}{mb} - \frac{24000h}{m},$$

wenn man nehmlich die Terminos, welche allzu klein werden, auslässt. Um nun die Geschwindigkeit zu bekommen, mit welcher die Flamme bey der Mündung BB hervor bricht, so setze man $x = a$, und damit man sich der gemeinen Logarithmen bedienen könne, so multiplicire man den gefundenen Logarithmum mit 2,30258509, woher entspringt

$$v = 55261h\left(1 - \frac{2a}{mb}\right)l\frac{a}{b} + \frac{24000ha}{mb} - \frac{24000h}{m}.$$

Hier ist, wie wir vorher gesehen, $h = 2425$ tausendste Theile eines Rheinländischen Schuhes, und wenn wir mit dem Autore annehmen $m = 1000$, und für den vorigen Fall setzen $\frac{a}{b} = \frac{120}{7} = 17{,}1428$, so wird $l\frac{a}{b} = 1{,}2340832$ und also

$$v = 160646077;$$

und die Geschwindigkeit wird in einer Secunde 3168 Schuhe betragen: welche nicht viel geringer ist, als diejenige, welche wir vorher, ohne auf die Resistentz der Luft zu sehen, heraus gebracht haben.

ZWEYTE ANMERKUNG

Wenn nun des Autoris Experimente und die daraus gemachten Schlüsse ihre Richtigkeit haben, so ist diese Geschwindigkeit, welche wir hier aus der Theorie gefunden, viel zü klein. Dieselbe würde aber noch viel kleiner heraus gekommen seyn, wenn wir der Wahrheit gemäß in Betrachtung gezogen hätten, daß sich nicht alles Pulver im ersten Augenblick zugleich entzünde, und ferner würde noch über dieses die Betrachtung der gröbern Theilchen des Pulvers eine merkliche Verminderung in dieser Geschwindigkeit verursachet haben. Solten diese Umstände, wie wohl zu vermuthen, so viel austragen, daß die Geschwindigkeit in dem angeführten Exempel nicht viel über 2000 Schuhe in einer Secunde ausmachte, so würde auch keine Kugel mit einer so grossen Geschwindigkeit heraus getrieben werden können, als durch die Experimente des Autoris gefunden worden. Ja wenn wir so gar zugeben wollten, daß sich alles Pulver auf einmal entzünde, und daß auch die gröbern Theile die Bewegung der subtilern nicht hindern, so würde doch die Geschwindigkeit der Kugel weit kleiner heraus kommen, als solche in der That befunden wird.

Um dieses deutlicher vor Augen zu legen, so dürfen wir nur in der obigen Rechnung außer den Theilchen der zusammen gepressten Luft, welche in Bewegung gesetzt werden möchten, noch eine Kugel in Betrachtung ziehen. Laßt uns also setzen, daß sich vor der zusammen gepressten Luft in MM noch eine Kugel befinde, deren Gewicht einer Luft-Säule gleiche, welcher Dicke $= cc$ und Höhe $= k$. Weil nun diese Kugel mit der vordersten Scheibe MM einerley Bewegung hat, wenn wir annehmen, daß dieselbe von einer Kraft, welche dem Gewicht einer natürlichen Luft-Säule, so hoch $= P$, gleich ist, fort getrieben werde, so bekommen wir nach den Grund-Gesetzen der Bewegung diese Vergleichung: $kdv = Pdx$, und also

$$P = \frac{kdv}{dx}.$$

Diese Kraft muß zu derjenigen, welche zur Acceleration der Flamme selbst erfordert worden,

$$\frac{mbccdv}{2\,dx},$$

addirt werden, und da bekommt man die völlige zur Acceleration erforderte Kraft

$$= \frac{mbccdv}{2dx} + \frac{kccdv}{dx},$$

welche der Elasticität, wodurch die Bewegung in der That fortgesetzet wird, gleich seyn muß, wenn wir nehmlich, welches ohne merklichen Fehler geschehen kan, die Resistentz der Luft aus der Acht lassen. Auf diese Art erhalten wir diese Aequation, nachdem wir durch cc dividiret,

$$\frac{mbdv}{2dx} + \frac{kdv}{dx} = \frac{12000mbh}{x}$$

und folglich

$$v = \frac{24000\,mbh}{mb + 2k} l \frac{x}{b}.$$

Hieraus erhellet, daß die Geschwindigkeit der Kugel immer weit kleiner seyn müsse, als die Geschwindigkeit der blossen Flamme, welche durch diese Aequation $v = 24000hl\frac{x}{b}$ ausgedruckt gefunden worden. Es wird sich also die Geschwindigkeit der Kugel verhalten zur Geschwindigkeit der blossen Flamme, welche dieselbe unter gleichen Umständen erlangt haben würde, wie $\sqrt{mb}$ zu $\sqrt{(mb + 2k)}$ oder wie 1 zu

$$\sqrt{\left(1 + \frac{2k}{mb}\right)}.$$

Da nun in dem vorher angeführten Exempel die Geschwindigkeit der blossen Flamme 3168 Schuhe in einer Secunde betragen, so wird die Geschwindigkeit der Kugel, so unter eben denselben Umständen heraus geschossen worden, in einer Secunde nur

$$\frac{3168}{\sqrt{\left(1 + \frac{2k}{mb}\right)}}$$

Schuhe austragen. Es ist aber hier $m = 1000$, $b = 2\frac{5}{8}$ Zoll, und da die Kugel von Bley gewesen, so wird $k = 4900$ Zoll; folglich wird

$$\sqrt{\left(1 + \frac{2k}{mb}\right)} = \sqrt{\frac{12425}{2625}}$$

und also die verlangte Geschwindigkeit der Kugel von 1456 Schuhe in einer Secunde gefunden werden, welche Geschwindigkeit weit kleiner ist, als die-

jenige, welche in eben diesem Fall die Versuche zu erkennen gegeben haben. Dieselbe würde aber noch geringer heraus gekommen seyn, wenn wir die gröberen Theile des Pulvers, und auch noch dieses in Betrachtung gezogen hätten, daß sich nicht alles Pulver auf einmal entzünde.

Aus allem diesem erhellet nun gantz deutlich, daß die von dem Autore angegebne Theorie von der Gewalt des Pulvers mit seinen eigenen Experimenten unmöglich bestehen könne, und daß eine weit grössere Kraft in dem Pulver verborgen liegen müsse, als der Autor glaubt. Wir sind also genöthiget, je länger je mehr der Meynung des tiefsinnigen Herrn DANIEL BERNOULLI beyzupflichten, welcher in seiner *Hydrodynamic* behauptet, daß die erste Elasticität der im Pulver befindlichen subtilen Materie, bey nahe 10000 mahl grösser sey, als die Elasticität der natürlichen Luft.[1]) Da nun das Pulver selbst nicht einmahl 1000 mahl schwerer ist, als die Luft, und nur $\frac{3}{10}$ davon die zusammen gedruckte Luft ausmachen, so folget hieraus nothwendig, daß in so sehr starken Zusammenpressungen der Luft die Elasticität derselben nach einer grösseren Verhältniß vermehret werde, als die Dichtigkeit. Denn wenn man dieses nicht zugeben will, so kann man in dem Pulver unmöglich diejenige Kraft finden, welche doch nach den Experimenten würklich darinne steckt. Solchergestalt wird derjenige Grundsatz des Verfassers, welchen wir schon oben in Zweifel gezogen, daß nehmlich die Elasticität der Luft immer ihrer Dichtigkeit proportional sey, gänzlich umgestossen: und dieser Satz kann nicht anders beybehalten werden, als wenn die Luft nicht allzusehr zusammen gedruckt wird. Die Beweis-Gründe, welche der Autor anführt, gehen auch nur auf diesen Fall, wie in der daselbst beygefügten Anmerkung erinnert worden. Derowegen muß, um die Würkungen des Pulvers zu erklären, eine ganz andere Lehre von der Natur der Luft zu Hülfe genommen werden. Zu diesem Ende scheinet nun keine bißher bekannte Theorie der Luft bequemer zu seyn, als diejenige, welche ich im 2ten Theil der Comment. der Academie zu Petersburg[2]) gegeben, allwo ich aus dem Begriff, den ich mir von dem Zustande der Luft formiret hatte, folgendes gefunden. Da die Luft aus Materie bestehet, so ist für sich klar, daß sich dieselbe nicht unendlich weit zusammen drucken lasse; dahero muß es einen Grad der Dichtigkeit geben, welchen man in Zusammen-

1) Siehe p. 48. F. R. S.

2) Siehe EULERS Abhandlung 7 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses): *Tentamen explicationis phaenomenorum aeris,* Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 347; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 27. F. R. S.

pressung der Luft nicht überschreiten kann. Es sey also dieser höchste Grad der Dichtigkeit der Luft q mahl grösser, als die Dichtigkeit der natürlichen; und wenn man diese Zahl q als bekannt annimmt, so habe ich gefunden, daß sich die Elasticität der natürlichen Luft zur Elasticität einer Luft, welche m mahl dichter ist, als die natürliche, verhalten müsse, wie

$$\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2} \quad \text{zu} \quad \sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}.$$

Da nun die Elasticität der natürlichen Luft durch einen Cylinder von Quecksilber, dessen Höhe $=h$, ausgedrucket wird, so wird die Elasticität der Luft, wenn dieselbe m mahl dichter ist, durch einen Cylinder von Quecksilber angezeigt werden, dessen Höhe

$$=\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2}}\,h.$$

Weil aber q eine sehr grosse, und allem Ansehen nach grössere Zahl ist, als m immer seyn kann, so wird zu unserm Vorhaben genau genug sein

$$\sqrt[3]{(q-1)^2}=\sqrt[3]{q^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{q}}-\frac{1}{9q\sqrt[3]{q}}$$

und

$$\sqrt[3]{(q-m)^2}=\sqrt[3]{q^2}-\frac{2m}{3\sqrt[3]{q}}-\frac{mm}{9q\sqrt[3]{q}}.$$

Derowegen wird die Elasticität der Luft, wenn sie m mahl dichter ist, als die natürliche, also ausgedruckt werden:

$$\frac{6mq+mm}{6q+1}\,h=\left(m+\frac{m(m-1)}{6q}\right)h,$$

oder die Elasticität der natürlichen Luft wird sich verhalten zur Elasticität einer Luft, welche m mahl dichter ist, als die natürliche, wie 1 zu

$$m+\frac{m(m-1)}{6q}.$$

Aus welcher Formel zugleich die gemeine Regel erhellet, daß wenn m keine allzugrosse Zahl ist, die Elasticität immer der Dichte ziemlich genau proportional sey. Wenn aber die Zahl m anfängt, so groß zu werden, daß der Bruch $\frac{m(m-1)}{6q}$ nicht mehr aus der Acht gelassen werden kann, so muß die Abwei-

chung der gemeinen Regul von der Wahrheit merklich werden. Dieses beruhet aber auf der Größe der Zahl q, welche uns unbekannt ist; wir würden aber dieselbe bestimmen können, wenn wir nur in einem einzigen Fall wüsten, wie viel die gemeine Regel von der Wahrheit abwiche. Da wir nun aus den angeführten Gründen deutlich sehen, daß, wenn die natürliche Luft in einen 244 mahl kleinern Raum zusammengedruckt wird, als welcher Fall im Pulver statt findet[1]), ihre Elasticität vielmehr mahle vermehrt werden müßte, ohne auf diejenige Vermehrung zu sehen, welche von der Erhitzung herrührt: so folget, daß die Zahl $6q$ viel kleiner als $244 \cdot 243$ seyn müßte. Sollte die Elasticität der gemeldeten zusammen gedruckten Luft 300 mahl grösser seyn, als der natürlichen, so würde $56 = \frac{244 \cdot 243}{6q}$ und folglich $q = \frac{244 \cdot 243}{336}$ und also kleiner als 244, welches wieder unsere festgesetzten Begriffe laufft. Es ist aber zu merken, daß wenn die Zahl m nicht viel kleiner ist, als q, die obgedachte Näherung nicht statt finden könne; dahero in solchen Fällen nachfolgende Regel gebraucht werden muß. Nehmlich, die Elasticität der natürlichen Luft muß sich verhalten zur Elasticität einer m mahl dichtern Luft, wie

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{q}} + \frac{1}{9q\sqrt[3]{q}} \quad \text{zu} \quad \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2},$$

das ist, wie

$$6q + 1 \quad \text{zu} \quad 9qq - 9q\sqrt[3]{q(q-m)^2}.$$

Wenn also $m = 244$, so kann die Vermehrung der Elasticität nicht grösser werden, als wenn auch $q = 244$. In diesem Fall würde also die Elasticität der im Pulver zusammen gedruckten Luft $\frac{9qq}{6q+1}$, das ist 366 mahl grösser seyn, als die Elasticität der Luft in ihrem natürlichen Zustande. Und wenn die Erhitzung dazu kommt, wie unser Autor dieselbe bestimmt, so würde die Elasticität der aus dem Pulver durch die Entzündung befreyten und erhitzten Luft 1500 mahl grösser seyn, als der natürlichen. Ungeachtet nun dieses die gröste Kraft zu seyn scheinet, welche dem Pulver zugeeignet werden kann, so sieht man doch leicht, daß dieselbe noch nicht hinlänglich seyn würde, die durch die Erfahrung bestimmte Würkung zu erklären.

---

1) Siehe p. 61. F. R. S.

DRITTE ANMERKUNG

Um derohalben zu einer richtigen Erkenntniß der im Pulver enthaltenen Kraft zu gelangen, so hat man erstlich zu erwegen, daß die im Pulver enthaltene Luft, nachdem dieselbe mit der natürlichen einerley Grad der Dichtigkeit angenommen, einen 244 mahl grössern Raum ausfüllt, als vorher das gantze Wesen des Pulvers eingenommen; die zusammen gepreßte Luft im Pulver aber nur ungefehr den dritten Theil desselben betrage. Dahero muß die Luft im Pulver vor der Entzündung noch ungefähr drey mahl, oder nach dem Autore $\frac{10}{3}$ mahl mehr zusammen gepreßt, und folglich 813 mahl dichter gewesen seyn, als die natürliche Luft. In einem solchen so sehr zusammen gepreßten Zustande befindet sich demnach die Luft im Salpeter verschlossen, und da der obige Werth des Buchstaben q nicht kleiner, als diese Zahl 813 angenommen werden kann, so scheinet der Wahrheit am meisten gemäß zu seyn, daß q gleich sey 813 oder nach einer graden Zahl $q = 800$. Denn weil sich dieser Grad der Dichtigkeit der Luft in allem Salpeter beständig befindet, so ist zu vermuthen, daß eben dieses auch der gröste mögliche Grad der Zusammenpressung sey. Hieraus ist nun leicht zu erachten, wie ungeheure Kräfte zu Erzeugung des Salpeters erfordert werden, und da sich solche Kräfte in der Natur würklich befinden, so ist sehr wahrscheinlich, daß dadurch die Luft in dem Salpeter auf den höchsten möglichen Grad zusammen gedruckt werde, und daß aus eben diesem Grunde die Gleichheit zwischen den verschiedenen Theilen des Salpeters beruhe. Wenn wir also setzen, daß die grösste Dichtigkeit, wozu die Luft durch die Zusammenpressung gebracht werden kann, 800 mahl grösser sey, als die natürliche, in welchem Zustand folglich die Luft eben so dicht, als das Wasser seyn würde, welche Gleichheit nicht wenig zu Bestätigung dieses Satzes beyzutragen scheinet: so sind wir im Stande, eine vollständige Theorie über die verschiedenen Grade der Elasticität, welche sich in der Luft nach den verschiedenen Graden der Dichtigkeit befindet, zu geben. Denn wenn wir die Elasticität der natürlichen Luft durch 1 anzeigen, so wird die Elasticität einer Luft, welche m mahl dichter ist, als die natürliche, durch diese Zahl

$$\left(1200 - 3\sqrt[3]{100\,(800 - m)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4800}\right)$$

ausgedrückt werden, woraus folgende Schlüsse gemacht werden können.

Erstlich, wenn m eine sehr kleine Zahl ist, so wird die Elasticität $= m + \frac{m(m-1)}{4800}$. Dahero wenn m ein Bruch ist, welches geschieht, wenn die Luft nicht zusammen gedruckt, sondern verdünnert wird, so ist die Elasticität immer der Dichte proportional, wie die gemeine Regel mit sich bringt, und auch alle Experimente, welche über die Verdünnerung der Luft angestellt worden, bezeugen.

Zweytens, wenn die Luft in einen 16 mahl kleinern Raum zusammen gestossen wird, welches fast der höchste Grad ist, den man durch menschliche Kräfte im Experimentiren erreichen kan, so wird die Elasticität schon $16\frac{1}{20}$ mahl grösser, als die Elasticität der natürlichen Luft. Da nun dieser Unterscheid kaum zu erkennen ist, so hat man sich nicht zu verwundern, daß bißher die Unrichtigkeit der gemeinen Regel nicht durch Versuche hat entdecket werden können.

Drittens, wenn m eine grössere Zahl ist, als 16, so wird die Abweichung der gemeinen Regel schon merklicher. Weil aber in diesen Fällen die Formul $m + \frac{m(m-1)}{4800}$ schon von der Wahrheit abzugehen anfängt, so muß man sich der ersten, nehmlich

$$(1200 - 3\sqrt[3]{100(800-m)^2})\left(1 - \frac{1}{4800}\right)$$

bedienen.

Wenn also gesetzet wird $m = 100$, so wird die Elasticität

$$= (1200 - 3\sqrt[3]{49000000})\left(1 - \frac{1}{4800}\right) = 102{,}19.$$

Setzt man aber $m = 300$, so wird die Elasticität

$$= (1200 - 3\sqrt[3]{25000000})\left(1 - \frac{1}{4800}\right) = 322{,}73.$$

Setzt man aber viertens $m = 800$, wie in dem Salpeter und Pulver würklich geschieht, so wird die Elasticität $= 1200$. Wenn nun noch dazu die Erhitzung von der Flamme kommt, so kann dieselbe beynahe noch um 5 mahl grösser, und also über 5000 mahl grösser werden, als der natürlichen Luft. Solchergestalt bekommen wir also eine Gewalt, welche 5 mahl grösser ist, als diejenige, welche der Verfasser angiebt, und welche folglich, allem Ansehen nach, vermögend seyn wird, nach Abzug aller obgemeldeten Hindernisse diejenigen Würkungen hervor zu bringen, welche uns die Erfahrung an die Hand giebt. Wie weit also diese Lehre mit der Erfahrung übereinstimme, wollen wir in der folgenden Anmerkung untersuchen.

VIERTE ANMERKUNG

Laßt uns also wiederum setzen, daß in dem hohlen Cylinder $AABB$ der Raum $AACC$ mit Pulver angefüllet worden (Fig. 10). Da nun die zusammen

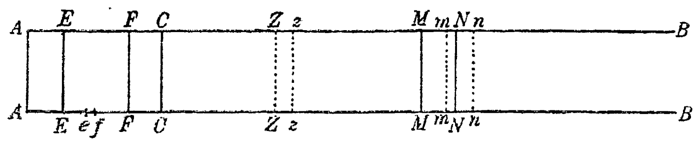


Fig. 10.

gepreßte Luft $\frac{3}{10}$ Theil des ganzen Gewichts des Pulvers ausmacht, so kommen hier dreyerley Materien zu betrachten vor: Erstlich diese zusammen gepreßte Luft, welche, wie gezeiget worden, 800 mahl dichter ist, als die natürliche; zweytens die groben Theile, woraus das Pulver bestehet, und drittens die natürliche Luft, welche sich zwischen den Pulver-Körnern befindet. Diese dreyerley Materien erfüllen den Raum $AACC$, und es scheinet, daß wir uns von der Wahrheit nicht merklich entfernen, wenn wir annehmen, daß die natürliche Luft $\frac{1}{4}$ des Raums $AACC$, die zusammen gepreßte Luft auch $\frac{1}{4}$ und die gröbere Materie $\frac{2}{4}$ einnehmen. So bald also die zusammen gepreßte Luft durch die Entzündung aus ihren Behältnissen befreyet wird, so vermischet sie sich mit der natürlichen Luft, und nimmt folglich einen zweymahl grössern Raum ein, als vorher, dergestalt, daß dieselbe nunmehr nur 400 mahl dichter seyn wird, als die natürliche. Die übrige Helfte des Raums $AACC$ bleibt von der gröbern Materie eingenommen. Weil nun diese weder gantz durch die folgende Ausbreitung der Luft mit der ersten Scheibe CC fortgetrieben wird, noch auch völlig bey dem Grunde AA zurück bleibet, so werden wir der Wahrheit am nächsten kommen, wenn wir setzen, daß eine Helfte der gröberen Materie an dem Grund AA zurück bleibe, die andere Helfte aber vor der Luft her getrieben werde. In dem ersten Augenblick also, nachdem sich das Pulver entzündet, welches, wie der Autor will, auf einmahl geschehen soll, so wird der Raum $AACC$ dergestalt angefüllt seyn, daß der erste vierte Theil $AAEE$ eine Helfte der gröberen Materie des Pulvers, das letzte Viertel $CCFF$ die andere Helfte, und die mittlere zwei Viertel $EEFF$ die zusammen gedruckte Luft, welche 400 mahl dichter ist, als die natürliche, in sich ent-

halten. Wenn also die Länge des Raums $AC = b$ gesetzt wird, so ist

$$AE = \frac{1}{4}b \quad \text{und} \quad CF = \frac{1}{4}b \quad \text{und} \quad EF = \frac{1}{2}b.$$

Weil nun die gröberen Theile des Pulvers schwehrer sind als Wasser, so wollen wir setzen, daß die in $CCFF$ enthaltene gröbere Materie einer gleich dicken natürlichen Luft-Säule gleiche, deren Höhe $= 1000\,CF = 250\,b$. Damit aber unsere Rechnung nicht auf diese Hypotheses, als woran man noch einigen Zweifel haben könnte, eingeschränket werde, so wollen wir auf eine allgemeine Art setzen:

$$EF = \frac{1}{\alpha}b, \quad AE = CF = \frac{\alpha - 1}{2\alpha}b,$$

und die in $EEFF$ enthaltene Luft soll m mahl dichter seyn, als die natürliche; die gröbere Materie in $CCFF$ aber soll n mahl schwehrer, als die gemeine Luft angenommen werden; dahero wenn man setzen wird $\alpha = 2$, $m = 400$ und $n = 1000$, so kommen die vorher gegebenen Bestimmungen heraus.

Laßt uns nun ferner setzen, daß sich nach Verfliessung einiger Zeit die in $EEFF$ zusammen gepreßte Luft biß in $EEMM$ ausgebreitet, und die in $FFCC$ enthaltene gröbere Materie bis in $MMNN$ fortgestossen habe, dergestalt, daß $MN = FC = \frac{\alpha - 1}{2\alpha}b$, so wird, wenn wir $EM = x$ setzen, die Dichtigkeit der in $EEMM$ befindlichen Luft $\frac{mb}{\alpha x}$ mahl grösser seyn, als der natürlichen. Wenn also h für die Höhe einer Luft-Säule angenommen wird, deren Gewicht der Elasticität der natürlichen Luft gleich ist, so wird ungefehr $h = 29100$ Rheinl. Schuh und die Elasticität der in $EEMM$ eingeschlossenen Luft wird dem Gewicht einer natürlichen Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$= \frac{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{\left(q - \frac{mb}{\alpha x}\right)^2}}{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}}\,h = \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha q x}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}}\,h,$$

allwo q die Zahl 800 andeutet. Wir wollen aber lieber den Buchstaben q beybehalten, damit, wenn auf allen Fall ein anderer Werth dafür gefunden werden solte, die Rechnung dennoch Platz finden möchte. In dieser Formul ist aber die Erhitzung noch nicht in Betrachtung gezogen worden, wodurch nach dem Autore die Elasticität ungefehr 4 mahl grösser wird. Weil aber dieselbe bisweilen grösser, bisweilen kleiner seyn kann, so wollen wir an statt

der Zahl 4 den Buchstaben β gebrauchen, dahero die gesuchte Elasticität seyn wird

$$= \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha q x}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}} \beta h.$$

Es sey ferner $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit, womit die vorderste Scheibe MM und also auch die gröbere Materie $MMNN$ fortgetrieben wird, wo v, wie schon oben gemeldet worden, die Höhe andeutet, aus welcher ein schwehrer Körper durch den Fall eben dieselbe Geschwindigkeit erhält; indem aber die Scheibe MM durch $Mm = dx$ fortrücket, so soll die obige Höhe v um dv zunehmen. Hieraus ergiebt sich nun leicht die Kraft, welche erfordert wird, um diese Acceleration in der groben Materie $MMNN$ hervorzubringen. Denn, da die Materie einer Luft-Säule gleichet, deren Höhe $= \frac{\alpha - 1}{2\alpha} nb$, so wird die erforderte Kraft dem Gewichte einer gleich dicken Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe $= \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \cdot \frac{nb\,dv}{dx}$. Wenn noch über dieses eine Kugel fortgetrieben werden sollte, deren Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe $= k$, gleich wäre, so würde die zu Forttreibung dieser Kugel erforderte Gewalt durch eine Luft-Säule, deren Höhe $= \frac{k\,dv}{dx}$, ausgedruckt werden.

Um aber die Kraft zu bestimmen, welche zur Acceleration der in $EEMM$ zusammen gepreßten Luft erfordert wird, deren Dichte sich zur natürlichen Luft verhält, wie $\frac{mb}{\alpha x}$ zu 1, so wollen wir davon eine Scheibe ZZ betrachten, und die Entfernung $EZ = z$ setzen. Die Geschwindigkeit dieser Scheibe wird nun, wie wir oben gezeigt haben, seyn $= \frac{z\sqrt{v}}{x}$, und indem die vorderste Scheibe MM durch dx fortgehet, so wird diese durch $\frac{z\,dx}{x}$ fortrücken, und inzwischen die Höhe $\frac{zzv}{xx}$, welche ihre Geschwindigkeit bestimmt, um $\frac{zz\,dv}{xx}$ zunehmen. Wenn wir nun dieser Scheibe eine Dicke $Zz = dz$ geben, so wird dieselbe einer Luft-Säule gleichen, deren Höhe $= \frac{mb\,dz}{\alpha x}$, welche mit $\frac{zz\,dv}{xx} : \frac{z\,dx}{x}$ oder mit $\frac{z\,dv}{x\,dx}$ multipliciret, die Höhe einer Luft-Säule anzeigt, deren Gewicht der zur Acceleration erforderten Kraft gleich ist. Dahero diese Kraft seyn wird

$$= \frac{mbz\,dz\,dv}{\alpha xx\,dx} = \frac{mb\,dv}{\alpha xx\,dx} \cdot z\,dz,$$

wovon das Integrale

$$\frac{mb\,dv}{\alpha xx\,dx} \cdot \frac{zz}{2}$$

die Kraft ausdrückt, welche zur Acceleration der in $EEZZ$ befindlichen Luft

erfordert wird, und wenn man $z = x$ setzt, so bekommt man die Kraft, welche zur Acceleration der ganzen Luft, so in $EEMM$ eingeschlossen ist, erfordert wird

$$= \frac{mb\,dv}{2\,\alpha dx}.$$

Wir wollen nun erstlich annehmen, es befinde sich keine Kugel vor dem Pulver, sondern es werde das Pulver bloß allein ohne einigen Vorschlag loßgebrennt; und da wird in diesem Fall die sämtliche angewandte Kraft seyn

$$= \frac{mb\,dv}{2\alpha dx} + \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \cdot \frac{nb\,dv}{dx} = \frac{(m + (\alpha - 1)n)b\,dv}{2\alpha dx},$$

welche der würklichen forttreibenden Gewalt weniger dem Wiederstand wird gleich seyn müssen. Nun aber ist die forttreibende Gewalt der Elasticität gleich, und also

$$= \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}}\beta h.$$

Der Wiederstand bestehet aber erstlich aus dem Gegendruck der äussern Luft, welche durch h angezeigt wird, und denn aus der Resistenz, welche einer Luft-Säule, deren Höhe $= v$, gleich ist, folglich bekommen wir diese Aequation

$$\frac{(m + (\alpha - 1)n)b\,dv}{2\alpha dx} = \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}}\beta h - h - v.$$

Weil wir aber schon vorher gesehen, daß der Wiederstand der Luft in diesem Fall nicht viel austrägt, so können wir zur Leichtigkeit der Rechnung zum wenigsten den letzten Terminum v sicher weglassen, und da bekommen wir

$$\frac{\left(1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}\right)(m + (\alpha - 1)n)}{2\alpha}b\,dv$$

$$= \left(1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}\right)\beta h dx - \left(1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}\right)h dx.$$

Um diese Aequation zu integriren, ist zu merken, daß

$$\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}=1-\frac{2}{3q}-\frac{1}{9qq}-\frac{4}{81q^3}-\frac{7}{243q^4}-\text{etc.}$$

und

$$\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}=1-\frac{2mb}{3\alpha qx}-\frac{m^2b^2}{9\alpha^2q^2x^2}-\frac{4m^3b^3}{81\alpha^3q^3x^3}-\frac{7m^4b^4}{243\alpha^4q^4x^4}-\text{etc.}$$

Hernach muß die Integration also angestellt werden, daß wenn $x=EF=\frac{b}{\alpha}$, die Geschwindigkeit oder v nichts werde. Dahero bekommt man

$$\frac{(m+(\alpha-1)n)bv}{2\alpha}\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\frac{7}{243q^4}+\text{etc.}\right)$$

$$=\beta h\left(\frac{2mb}{3\alpha q}\,l\frac{\alpha x}{b}-\frac{m^2b^2}{9\alpha^2q^2x}+\frac{m^2b}{9\alpha q^2}-\frac{2m^3b^3}{81\alpha^3q^3x^2}+\frac{2m^3b}{81\alpha q^3}-\text{etc.}\right)$$

$$-hx\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\text{etc.}\right)+\frac{hb}{\alpha}\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\text{etc.}\right).$$

Weilen aber die Brüche $\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\frac{7}{243q^4}+\text{etc.}$ so sehr klein sind, so kann man dieselben weglassen, und da erhält man

$$\frac{(m+(\alpha-1)n)bv}{2\alpha}=\beta h\left(\frac{mb}{\alpha}\,l\frac{\alpha x}{b}+\frac{m^2b}{6\alpha q}-\frac{m^2b^2}{6\alpha^2qx}\right)+\frac{hb}{\alpha}-hx.$$

Setzt man nun die Länge $EB=a$, und macht $x=a$, so kommt die Geschwindigkeit heraus, mit welcher die Flamme bey der Mündung BB heraus fährt,

$$v=\frac{2m\beta h}{m+(\alpha-1)n}\left(l\frac{\alpha a}{b}+\frac{m}{6q}-\frac{mb}{6\alpha qa}\right)-\frac{2h(\alpha a-b)}{(m+(\alpha-1)n)b},$$

für welche Aequation man, ohne merklich zu fehlen, diese nehmen kann

$$v=\frac{2\beta mh}{m+(\alpha-1)n}\,l\frac{\alpha a}{b}.$$

Wenn wir nun für die Buchstaben α, β, m, n und h die oben angezeigten Werthe setzen, nehmlich $\alpha=2$, $\beta=4$, $m=400$, $n=1000$ und $h=29100$ Rheinl. Schuhe, so kommt

$$v=\frac{16}{7}hl\frac{2a}{b}.$$

Lasst uns hernach das oben angeführte Exempel berechnen, wo $b = 2\frac{5}{8}$ Englische Zoll, und $a = 45 - \frac{21}{32}$. Dahero ist

$$2a = 90 - \frac{21}{16} \quad \text{und} \quad \frac{2a}{b} = \frac{1419}{42} = 33{,}8,$$

folglich $l\frac{2a}{b} = 1{,}528917$, welches aber noch mit dieser Zahl 2,30258509 multiplicirt werden muß. Es ist aber

$$\begin{aligned} l\,1{,}528917 &= 0{,}184383 \\ l\,2{,}302585 &= 0{,}362215 \\ l\,\frac{16}{7} &= \underline{0{,}359021} \\ &\ 0{,}905619. \end{aligned}$$

Hiezu addire man den log. von h in 1000sten Theilen eines Rheinl. Schuhes

$$lh = \underline{7{,}463893}$$

kommt $$lv = 8{,}369512$$

und $$l\sqrt{v} = 4{,}184756$$

folglich $$\sqrt{v} = 15302.$$

Der vierte Theil hiervon 3825 zeiget, wie viel Schuhe die gesuchte Geschwindigkeit in einer Secunde betrage. Diese nicht allzugrosse Vermehrung der Geschwindigkeit, als welche vorher[1]) von 3215 Schuhen befunden worden, ungeachtet wir jetzo eine weit grössere Kraft angenommen haben, kömmt hauptsächlich von der gröbern Materie des Pulvers her, davon die Helfte vor der zusammengepressten Luft heraus getrieben werden muste. Wenn wir aber gesetzt hätten, daß diese grobe Materie gänzlich bey dem Boden des Stücks AA zurück bleibe, so würde der Terminus, darinnen n ist, weggefallen, und also diese Aequation

$$v = 2\beta hl\frac{\alpha a}{b} \quad \text{oder} \quad v = 8hl\frac{2a}{b}$$

herausgekommen seyn, woraus eine $\sqrt{\frac{7}{2}}$ mahl grössere Geschwindigkeit, das

1) Siehe p. 168. F. R. S.

ist, von 7157 Schuhen in einer Secunde erwächst, welche, nach Abzug des Gegenstands der Luft, noch ungefehr 7000 Schuh betragen mag, welche Würkung sehr genau mit der Muthmassung des Autoris, welche er aus seinen Experimenten gezogen, überein kommt. Denn er schliesst aus denselben, daß, wenn die Bewegung der Flamme nicht durch die gröbern Theile des Pulvers gehemmet würde, dieselbe in dem gegenwärtigen Fall mit einer Geschwindigkeit von 7000 Schuhen aus dem Lauf heraus gefahren wäre. Es dienet auch insonderheit zu Bekräftigung unserer Meynung von der Gewalt des Pulvers, daß die von uns gefundene Geschwindigkeit etwas grösser ist, als die Experimente anzeigen, weil wegen der allmähligen Entzündung des Pulvers noch etwas abgezogen werden muß.

Wenn sich vor dem Pulver eine Kugel befindet, so kan die vorige Rechnung auch leicht auf diesen Fall eingerichtet werden. Denn wenn k die Höhe einer Luft-Säule andeutet, deren Gewicht der Schwehre der Kugel gleich ist, so kommt die sämmtliche Kraft, welche zur Acceleration erfordert wird, heraus

$$=\frac{mbdv}{2\alpha dx}+\frac{\alpha-1}{2\alpha}\cdot\frac{nbdv}{dx}+\frac{kdv}{dx}=(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)\frac{dv}{2\alpha dx},$$

welche Kraft, da keine Kugel da war, gewesen

$$=(m+(\alpha-1)n)\frac{bdv}{2\alpha dx}.$$

Wir dürfen also nur in der vorigen Rechnung an statt

$$m+(\alpha-1)n$$

setzen

$$m+(\alpha-1)n+\frac{2\alpha k}{b},$$

so bekommen wir die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel herausgetrieben wird, durch diese Aequation bestimmt

$$v=\frac{2\beta mbh}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}\left(l\frac{\alpha a}{b}+\frac{m}{6q}-\frac{mb}{6\alpha qa}\right)-\frac{2h(\alpha a-b)}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}.$$

Wenn wir nun nach den obigen Bedeutungen setzen $\alpha=2$, $\beta=4$, $m=400$, $n=1000$, $q=800$ und $h=29100$ Rheinl. Schuh, so bekommen wir

$$v = \frac{h}{700b + 2k}\left(1600 b l \frac{2a}{b} + (2a - b)\left(\frac{200b}{3a} - 1\right)\right)$$

oder

$$v = \frac{h}{700 + 2k:b}\left(1600\, l \frac{2a}{b} + \left(\frac{2a}{b} - 1\right)\left(\frac{200b}{3a} - 1\right)\right).$$

Um nun diese Rechnung auf den ersten Fall des Autoris zu appliciren, so wird $b = 2\frac{5}{8}$, $a = 44\frac{11}{32}$ und $k = 4900$ Englische Zoll. Dahero $\frac{2a}{b} = 33{,}8$ und der Logarithmus hyperbolicus von $\frac{2a}{b}$

$$= 3{,}52045.$$

Ferner $\frac{200\,b}{3\,a} = 3{,}94$ und $\frac{2k}{b} = 3733$. Hieraus erwächst

$$1600\, l \frac{2a}{b} = 5632{,}72$$

$$\left(\frac{2a}{b} - 1\right)\left(\frac{200b}{3a} - 1\right) = \frac{96{,}43}{5729{,}15}.$$

Also ist

$$v = \frac{5729{,}15h}{4433}.$$

Um nun zu finden, wie viel Schuh mit dieser Geschwindigkeit in einer Secunde durch lauffen werden können, so muß h in tausendsten Theilen eines Rheinl. Schuhs ausgedruckt werden, da denn ist $h = 29100000$ und alsdenn muß die Quadrat-Wurzel aus v durch 4 getheilt werden. Mit Logarithmis zu rechnen, wird also:

$$\begin{aligned} lh &= 7{,}463893 \\ l\,5729{,}15 &= 3{,}758090 \\ &\quad \overline{11{,}221983} \\ l\,4433 &= 3{,}646698 \\ lv &= \overline{7{,}575285} \\ l\sqrt{v} &= 3{,}787642 \\ l\,4 &= 0{,}602060 \\ &\quad \overline{3{,}185582} \end{aligned}$$

Die Zahl davon

$$1533.$$

Folglich müßte die Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1533 Rheinl. Schuhen in einer Secunde heraus getrieben worden seyn, welche Zahl in Englischen Schuen 1580 beträgt. Diese Zahl, welche noch wegen der nicht auf einmahl

erfolgten Entzündung und des Verlusts der Kraft, so durch den Spielraum und das Zündloch weggehet, vermindert werden müsste, würde um viel kleiner werden, als diejenige, welche die Experimente für diesen Fall angezeigt haben. Die Ursache hiervon scheinet aber diese zu seyn, daß wir nach der Entzündung nur die Helfte des Raums $AACC$ mit Luft angefüllt angenommen haben; es ist aber sehr wahrscheinlich, daß die grobe Materie des Pulvers keinen so grossen Theil des Raumes einnehme: wobey zu merken, daß ein geringer Unterscheid in diesem Stücke bey der Geschwindigkeit einen sehr merklichen Unterscheid verursache. Denn, wenn wir annehmen, daß die gröbere Materie nach der Entzündung nur noch den dritten Theil des Raums erfülle, so wird $\frac{b}{\alpha} = \frac{2}{3} b$ und $\alpha = \frac{3}{2}$; dahero die oben gefundene Aequation in diese verwandelt wird

$$v = \frac{2h}{900b + 3k}\left(1600\,b\,l\,\frac{3a}{2b} + \left(\frac{3}{2}a - b\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right)\right)$$

oder

$$v = \frac{2h}{900 + 3k:b}\left(1600\,l\,\frac{3a}{2b} + \left(\frac{3a}{2b} - 1\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right)\right).$$

Gesetzt nun, es sey $b = 2\frac{5}{8}$, $a = 45 - \frac{7}{16}$ und $k = 4900$ Engl. Zoll, so wird

$$\frac{3a}{2b} = 25{,}46, \quad \frac{800b}{9a} = 5{,}23 \quad \text{und} \quad l\,\frac{3a}{2b} = 3{,}23710.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 1600\,l\,\frac{3a}{2b} &= 5179{,}36 \\ \left(\frac{3a}{2b} - 1\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right) &= \underline{103{,}46} \\ & 5282{,}82. \end{aligned}$$

Hernach ist

$$\frac{3k}{b} = 5600 \quad \text{und} \quad \frac{900 + 3k:b}{2} = 3250,$$

dahero

$$v = \frac{5283h}{3250},$$

woraus eine Geschwindigkeit erwächst, welche in einer Secunde 1720 Rheinl. Schuh, oder 1773 Engl. Schuh beträgt. Diese Geschwindigkeit ist nun weit grösser als diejenigen, welche durch die Experimente gefunden werden, und es scheinet, daß nach allem Abzug eine völlige Uebereinstimmung eintreffen würde, dahero wir billig diese letzte Expression, da $\alpha = \frac{3}{2}$ gesetzt worden, als der Wahrheit sehr nahe kommend, ansehen.

FÜNFTE ANMERKUNG

Wir können hieraus sowohl zur Erkenntniß der Natur des Pulvers, als zu vortheilhaftem Gebrauch desselben, sehr nützliche Schlüsse ziehen, welche vielleicht zu Verbesserung der Artillerie nicht wenig beytragen können.

Erstlich, da die Menge der gröbern und irdischen Materie, welche in dem Pulver enthalten ist, so viel zur Geschwindigkeit der Kugel beyträgt, indem dieselbe sehr merklich geschwinder oder langsamer fortgetrieben wird, wenn weniger oder mehr dergleichen gröbere Materie mit dem Pulver vermischet ist, so siehet man leicht, daß die verschiedene Güte des Pulvers hauptsächlich auf der Menge der damit vermischten gröbern Materie beruhe. Denn, da allem Ansehen nach in dem Salpeter die darinne befindliche Luft ungefehr 800 mahl dichter ist, als die natürliche, als welches der höchste Grad der Dichtigkeit ist, auf welchen die Luft durch die Zusammenpressung gebracht werden kann: so würde auch alles Pulver mit einerley Kraft begabt seyn, wenn sich darinn nur einerley Verhältniß zwischen dieser zusammen gedruckten Luft und der gröbern Materie befinden solte; woferne nehmlich die Vermischung nur so beschaffen ist, daß dadurch die Entzündung nicht verhindert wird. Dahero ist das Pulver um so viel besser und stärker, je weniger grobe Materie darinne enthalten ist. Da aber die Entzündung desselben auf dieser gröbern Materie beruhet, so bestehet der fürnehmste Handgriff in Zubereitung des Pulvers darinne, daß man eine solche Proportion zwischen dem Salpeter und den verbrennlichen Materien treffe, daß dadurch sowohl die Entzündung beschleuniget, als auch zugleich so wenig, als immer möglich, von diesen Materien damit vermischet werde. Die erste Vorsichtigkeit kommt also auf die Läuterung des Salpeters an, daß dadurch die gröbern und irdischen Theile, so viel als möglich, abgesondert werden. Denn da diese Theile nicht nur zur schnellen Entzündung nichts beytragen, sondern dieselbe auch verhindern, so vermindern dieselben auch deswegen die Kraft des Pulvers, daß dadurch die Menge der gröbern Materie unnöthiger Weise vermehret wird; welcher Umstand, da das Pulver grösten theils aus Salpeter bereitet wird, sehr viel austrägt. Die Güte und Stärke des Pulvers besteht also in diesen zweyen Haupt-Stücken, daß sich dasselbe erstlich plötzlich entzünde, und daß zweytens damit so wenig, als immer möglich ist, gröbere und irdische Materie vermischet sey. Dahero wenn man auf die Verbesserung des Pulvers arbeiten will, so hat man auf diese beyden Punkte zu sehen: erstlich, ob man nicht eine neue

Vermischung finden könne, wo eine schnellere und plötzlichere Entzündungskraft hervor gebracht werde; und zweytens, ob man nicht die Menge der gröbern Materie, welche zur Entzündung erfordert wird, vermindern könne?

Hieraus lassen sich ferner die Mängel eines jeglichen Pulvers leicht beurtheilen. Denn alles, was entweder die Entzündungskraft hemmet, oder die gröbere Materie vermehret, dasselbe vermindert auch die Kraft desselben. Aus dem ersten Grunde wird das Pulver durch die damit vermischte Feuchtigkeit entkräftet, weil dadurch entweder viel Theilchen gar nicht Feuer fassen, oder doch die Entzündung langsamer vor sich geht. Aus dem andern Grunde wird solches Pulver, welches entweder aus unreinem Salpeter bereitet worden, oder allzuviel Schwefel und Kohlen, oder andere dergleichen Materien in sich enthält, schwächer, weil bey der Entzündung allzuviel grobe Theile mit in Bewegung gebracht werden müßten. Wenn also für das beste Pulver der in obigen Aequationen befindliche Buchstabe α durch $\frac{3}{2}$ ausgedruckt wird, so muß demselben für schlechteres Pulver ein kleinerer Werth ertheilet werden. Dahero die für die Geschwindigkeit der Kugel gefundene Aequation für alle Arten Pulver gebraucht werden kann. Weil wir aber darinne angenommen haben, daß sich alles Pulver im ersten Augenblick auf einmahl entzünde, dieses aber in der That nicht geschieht, so müßten aus diesem Grunde die gefundenen Geschwindigkeiten etwas kleiner genommen werden: wie viel aber diese Verminderung austragen könne, wollen wir nachgehends genauer untersuchen.

Drittens läßt sich hieraus auch bestimmen, wie viel man Pulver in einen jeglichen gegebenen Lauf laden müsse, damit die Kugel mit der grösten Geschwindigkeit heraus geschossen werde. Denn man siehet leicht, daß durch die Verstärkung der Ladung die Geschwindigkeit nicht über einen gewissen Grad vermehret werden könne. Um dieses einzusehen, darf man sich nur einbilden, daß der ganze Lauf mit Pulver angefüllet werde. Denn da in diesem Fall die Kugel gleich nach dem ersten Eindruck heraus getrieben wird, und alsdenn die forttreibende Gewalt wegen der Ausbreitung in der äussern Luft meistentheils aufhöret, so muß die der Kugel eingedruckte Bewegung sehr geringe seyn. Da nun eine solche allzu starke Ladung der Kugel eine weit kleinere Geschwindigkeit mittheilet, als eine kleine, doch aber eine allzu kleine Ladung wiederum eine kleinere Würkung hervorbringt: so muß es nothwendig in einem jeglichen Fall eine solche Ladung geben, wodurch die Kugel mit der grösten Geschwindigkeit heraus getrieben wird, dergestalt, daß wenn man so wohl mehr als weniger Pulver nehmen sollte, die Kugel in beyden

Fällen eine schwächere Bewegung erhalten würde. Man sieht aber wohl, daß die Erkenntniß dieses Grads der Ladung in der Artillerie von einer grossen Wichtigkeit ist. Denn dadurch wird man nicht nur in Stand gesetzt, die Kugel mit dem grösten möglichsten Grad der Geschwindigkeit fort zu treiben, sondern man kan auch dadurch in vielen Fällen viel Pulver erspahren, wenn man nehmlich weiß, daß die Kugel mit einer geringeren Ladung eben so geschwind, und vielleicht noch geschwinder, fortgetrieben werden könnte.

Um derohalben die Grösse dieser stärkesten Ladung zu bestimmen, so dürfen wir nur die oben gefundene Expression für die Geschwindigkeit der Kugel differenziren, und nur die Quantität b als variabel betrachten, hernach dieses Differentiale $= 0$ setzen. Wir wollen zu diesem Ende, damit sich unsere Bestimmung auf alle Fälle erstrecke, die generale Expression nehmen, welche ist

$$\frac{v}{2h} = \frac{\beta mb}{mb + (\alpha - 1)nb + 2\alpha k}\, l\frac{\alpha a}{b} + \frac{(\alpha a - b)(\beta m^2 b - 6\alpha q a)}{(mb + (\alpha - 1)nb + 2\alpha k)6\alpha q a}.$$

Hiervon ist das Differentiale auf gemeldte Art genommen:

$$\frac{2\alpha\beta mk db \cdot l(\alpha a : b)}{(mb + (\alpha - 1)nb + 2\alpha k)^2} - \frac{\beta m db}{mb + (\alpha - 1)nb + 2\alpha k}$$
$$+ \frac{-(m + (\alpha - 1)n)(\beta m^2 b^2 - 6\alpha^2 q a^2)db - 4\alpha\beta m^2 bk db + 2\alpha^2 ak(\beta m^2 + 6q)db}{(mb + (\alpha - 1)nb + 2\alpha k)^2 6\alpha q a},$$

welches $= 0$ gesetzt, diese Aequation giebt:

$$12\alpha^2\beta mqka\, l\frac{\alpha a}{b} = (m + (\alpha - 1)n)\beta m^2 b^2 + 6\alpha\beta mq(m + (\alpha - 1)n)ab$$
$$- 6\alpha^2 q(m + (\alpha - 1)n)a^2 + 4\alpha\beta m^2 bk + 12\alpha^2\beta mqak - 2\alpha^2\beta m^2 ak - 12\alpha^2 qak.$$

Es ist aber hier k eine sehr grosse Zahl, massen dieselbe die Höhe einer Luft-Säule ausdrückt, deren Gewicht dem Gewicht der Kugel gleich ist. Wenn wir nun den Diameter der Kugel setzen $= c$, so ist dieselbe einem gleich dicken Cylinder gleich, dessen Höhe $= \frac{2}{3}c$. Wenn also die Materie, woraus die Kugel besteht, i mahl schwerer als Luft angenommen wird, so kommt $k = \frac{2}{3}ic$; und wenn die Kugel von Eisen gesetzt wird, weil Eisen 7,820 mahl schwehrer ist, als Wasser, Wasser aber ungefehr 850 mahl schwehrer als Luft, so wird $i = 6650$, und also ungefehr $k = 4430c$. Wenn wir nun in obiger Aequation

die kleinsten Terminos weglassen, so wird[1])

$$l\frac{\alpha a}{b} = 1 - \frac{m}{6q} - \frac{(m+(\alpha-1)n)a}{2\beta mk} + \frac{mb}{3\alpha qa} + \frac{(m+(\alpha-1)n)b}{2\alpha k} + \frac{(m+(\alpha-1)n)mb^2}{12\alpha^2 qak}.$$

Da nun alle diese Brüche in Ansehung der Unität sehr klein sind, wenn wir e für die Zahl annehmen, deren Logarithmus hyperbolicus $= 1$, so bekommen wir

$$\frac{\alpha a}{b} = e^{1-\frac{m}{6q}-\frac{(m+(\alpha-1)n)a}{2\beta mk}} \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 + \dfrac{mb}{3\alpha qa} + \dfrac{(m+(\alpha-1)n)b}{2\alpha k} \\ + \dfrac{(m+(\alpha-1)n)mb^2}{12\alpha^2 qak} + \dfrac{mmbb}{18\alpha^2 q^2 a^2} + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

woraus der Werth für b durch die Näherung nicht schwehr zu finden ist. Laßt uns nun wie oben setzen

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = 4, \quad m = 400, \quad n = 1000 \quad \text{und} \quad q = 800,$$

so wird

$$\frac{3a}{2b} = e^{1-\frac{1}{12}-\frac{9a}{32k}}\left(1 + \frac{b}{9a} + \frac{300b}{k} + \frac{50bb}{3ak} + \frac{bb}{162aa}\right).$$

Es sey der Kürze halben

$$\frac{3}{2}a : e^{1-\frac{1}{12}-\frac{9a}{32k}} = A,$$

so wird

$$A = b + \frac{bb}{9a} + \frac{300bb}{k} + \frac{50b^3}{3ak}.$$

Wenn man nun setzt

$$b = A - \mathfrak{p}A^2 + \mathfrak{q}A^3,$$

so wird

$$bb = AA - 2\mathfrak{p}A^3 \quad \text{und} \quad b^3 = A^3,$$

---

1) Im Original lautet die folgende Gleichung

$$l\frac{\alpha a}{b} = 1 - \frac{m}{6q} + \frac{(m+(\alpha-1)n)a}{2\beta mk} + \cdots,$$

ein Versehen, das sich in den daraus abgeleiteten Gleichungen für

$$\frac{\alpha a}{b}, \ \frac{3a}{2b} \ \text{und} \ A$$

wiederholt. Berichtigt von F. R. S.

folglich

$$
\begin{aligned}
A = A - {} & \mathfrak{p} A^2 + {} && \mathfrak{q} A^3 \\
& + \frac{1}{9a} A^2 - {} && \frac{2\mathfrak{p}}{9a} A^3 \\
& + \frac{300}{k} A^2 - {} && \frac{600\mathfrak{p}}{k} A^3 \\
& && + \frac{50}{3ak} A^3,
\end{aligned}
$$

dahero

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{9a} + \frac{300}{k},$$

$$\mathfrak{q} = 2\mathfrak{p}\left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{k}\right) - \frac{50}{3ak}.$$

Wir wollen diesen Werth für eine halbe Carthaune ausrechnen, deren Länge 20 mahl länger ist, als das Caliber, oder wo $a = 20c$. Für eine eiserne Kugel wird also seyn $k = 4430c$, und folglich

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{180c} + \frac{1}{15c} = \frac{1}{14c}$$

und

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{98cc} - \frac{1}{5316cc} = \frac{1}{99cc}.$$

Dahero haben wir

$$b = A - \frac{AA}{14c} + \frac{A^3}{99cc}.$$

Es ist aber

$$A = 30c : e^{1-\frac{1}{12}},$$

weil der Bruch $\frac{9a}{32k}$ allzuklein wird, und da

$$e^{1-\frac{1}{12}} = e : \left(1 + \tfrac{1}{12}\right),$$

so wird

$$A = \frac{32{,}5\,c}{2{,}718} = 12c$$

ungefehr; und also

$$b = 12c - \frac{72}{7}c.\text{[1]}$$

1) Eigentlich ergibt sich $b = 12c - \frac{72}{7}c + \frac{192}{11}c.$ F. R. S.

Da aber hier der zweyte Terminus nicht viel kleiner ist als der erste, so sieht man wohl, daß die gebrauchte Näherung in diesem Fall nicht statt finde. Wir müssen also die erste Aequation wiederum vornehmen, da

$$A = b + bb\left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{k}\right) + \frac{50b^3}{3ak},$$

welche auf den gegenwärtigen Fall giebt

$$12c = b + \frac{bb}{14c} + \frac{b^3}{5316cc},$$

in welcher der letzte Terminus schon weggelassen werden kann, und da bekommen wir diese quadratische Gleichung

$$bb + 14bc = 168cc$$

und also

$$b = -7c + \sqrt{217cc},$$

oder beynahe

$$b = 7\frac{3}{4}c,$$

welcher Werth doch wegen des weggeworfenen letzten Termini noch etwas zu groß ist. Hieraus siehet man, daß aus einer halben Carthaune eine eiserne Kugel mit der grösten Geschwindigkeit heraus geschossen werden kann, wenn die Ladung in der Canone ungefähr $7\frac{1}{2}$ Caliber ausfüllt. So viel Pulver wird aber ungefehr anderthalb mahl schwehrer seyn, als die Kugel. Da nun die ordentliche Ladung dem halben Gewicht der Kugel gleich genommen wird, so siehet man, daß eine dreyfache Ladung der Kugel die allergröste Geschwindigkeit gebe, und daß, wenn man noch mehr als dreymahl so viel Pulver, als gewöhnlich ist, laden sollte, die Kugel mit einer kleinern Geschwindigkeit geschossen werden würde. In andern Fällen aber, da eiserne Kugeln geschossen werden, kann die stärkste Ladung auf gleiche Weise folgender Gestalt gefunden werden. Da $k = 4430c$, so setze man $a = \theta c$, so wird

$$A = \frac{13\theta c}{8e} = \frac{3}{5}\theta c,$$

und ferner

$$A = b + \frac{bb}{9\theta c} + \frac{bb}{15c},$$

folglich

$$bb + \frac{45\theta bc}{5+3\theta} = \frac{45\theta Ac}{5+3\theta} = \frac{27\theta\theta cc}{5+3\theta};$$

und also

$$b = \frac{-45\theta c + 3\theta c\sqrt{(285+36\theta)}}{10+6\theta}.$$

Die Verhältniß des Raums, welcher die Ladung enthält, zum Caliber beruhet also auf der Zahl θ, welche anzeigt, wie viel Caliber lang der Lauf ist. Hieraus ist diese Tabelle gemacht worden:

Wenn die Länge der Seele so viel Caliber beträgt:	So trägt die stärkste Ladung in der Seele so viel Caliber aus:
5	2,46
10	4,46
15	6,17
20	7,71
25	9,10
30	10,39
35	11,60
40	12,73
45	13,81
50	14,83

Wobey zu merken, daß diese Zahlen nicht aufs genaueste, sondern nur beyläuffig mit der Erfahrung übereinstimmen werden, theils weil alle Umstände nicht in die Rechnung gebracht werden können, theils weil sich das Pulver nicht alles auf einmahl entzündet, wie hier angenommen worden, und auch die forttreibende Kraft noch andern Abbruch leidet.

SECHSTE ANMERKUNG

Wir haben versprochen, auch noch zu untersuchen, um wie viel die vorher gefundene Geschwindigkeit vermindert werde, wenn sich nicht alles Pulver zugleich entzündet. Es sey demnach (Fig. 10) wie vorhin die Länge des Raums, welchen anfänglich das Pulver eingenommen, $AC = b$, die Länge der ganzen Canone $AB = a$, und nach einiger Zeit soll sich die Flamme nebst der Kugel schon biß NN ausgebreitet haben. Man setze $AN = x$, und die Geschwindigkeit so wohl der vördersten Scheibe NN als der Kugel sey $= \sqrt{v}$, dergestalt daß, indem die Kugel durch $Nn = dx$ fortgetrieben wird, die Höhe v um dv wachse. Wenn also das Gewicht der Kugel durch eine Luft-Säule ausgedruckt wird, deren Länge $= k$, so ist die Kraft, welche zur Acceleration der Kugel erfordert wird, $= \frac{k\,dv}{dx}$. Da sich aber noch nicht alles Pulver entzündet, so wollen wir annehmen, daß sich der schon allbereits entzündete Theil des Pulvers zur ganzen Ladung verhalte, wie y zu b; so wird y eine solche aus x und bekannten Zahlen zusammen gesetzte Quantität seyn, welche, wenn $x = b$ gesetzt wird, verschwindet, weil in diesem Fall die Entzündung erst anfängt: hernach wenn sich schon alles Pulver entzündet hat, so muß $y = b$ werden, welches geschehen soll, wenn $x = a$; wenn wir nehmlich den Lauf so lang annehmen, daß sich alles Pulver zu entzünden Zeit hat, ehe die Kugel heraus getrieben worden. Solte sich aber in dieser Zeit noch nicht alles Pulver entzündet haben, so muß $y = b$ werden, wenn für x eine grössere Länge als a gesetzt wird. Dieselbe sei $= f$, dergestalt, daß wenn $x = f$, alsdenn werde $y = b$. Hieraus läßt sich nun schon ziemlicher massen abnehmen, wie die Expression für y beschaffen seyn werde: denn es wird ungefehr seyn

$$y = \frac{b(x-b)^{\mu}}{(f-b)^{\mu}},$$

als welche Ausdrückung die obgedachten Eigenschaften besitzt. Wenn wir ferner setzen, daß die aus dem schon entzündeten Pulver erzeugte Materie den $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ten Theil desselben einnehme, so wird damit ein Theil des Raums AM erfüllet seyn, dessen Länge $= \frac{(\alpha-1)y}{\alpha}$; hernach nimmt aber das noch nicht entzündete Pulver einen Raum ein, dessen Länge $= b - y$, welches mit den vorigen zusammen macht $b - \frac{y}{\alpha}$. Dahero für die Luft ein Raum übrig bleibt, dessen Länge ist $= x - b + \frac{y}{\alpha}$. Wenn sich aber diese Luft so weit

ausdehnen solte, biß dieselbe mit der natürlichen einerley Grad der Dichte erhielte, so würde dieselbe einen mit dem Lauf gleich weiten Raum erfüllen, dessen Länge $= 244y$; folglich muß dieselbe in gegenwärtigem Fall

$$\frac{244y}{x - b + \frac{y}{\alpha}}$$

mahl dichter seyn, als die natürliche. Wir wollen der Kürze halben für diese Zahl

$$\frac{244y}{x - b + \frac{y}{\alpha}}$$

den Buchstaben s setzen; so wird, wie wir oben gewiesen haben, die Elasticität dieser Luft dem Gewichte einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$= \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{s}{q}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}} \beta h = \beta h \left(s + \frac{ss}{6q}\right),$$

welche Näherung zu unserm Endzweck hinlänglich ist. Es bedeutet aber hier h die Höhe einer Luft-Säule, deren Gewicht der Elasticität der natürlichen Luft gleich ist, und β zeiget an, wie viel mahl die Elasticität durch die Erhitzung vermehret werde. Da nun die durch die Entzündung schon befreyte Luft einer Luft-Säule gleich ist, deren Höhe $= 244y$, so wird zur Acceleration derselben eine Kraft erfordert, welche

$$= \frac{122y\,dv}{dx}.$$

Diese Kraft ist nehmlich, wie aus obigem erhellet, nur halb so groß, als wenn alle diese Luft gleich stark accelerirt werden müßte. Ausser diesem ist noch die grobe Materie zu betrachten übrig, davon ein Theil gleichfals in Bewegung gesetzt werden muß.

Wir wollen wieder wie oben annehmen, daß die eine Helfte an dem Boden AA zurück bleibe, die andere aber mit der Kugel fortgestossen werde: und daß dieselbe n mahl dichter sey, als die natürliche Luft; so wird dieselbe seyn

$$= \frac{1}{2} n \left(b - \frac{y}{\alpha}\right),$$

und zur Acceleration derselben wird eine Kraft erfordert, welche

$$= \frac{1}{2} n\left(b - \frac{y}{\alpha}\right) \frac{dv}{dx},$$

dahero die sämtliche zur Forttreibung erforderte Kraft seyn wird

$$= \frac{dv}{dx}\left(k + \frac{1}{2} nb - \frac{ny}{2\alpha} + 122y\right),$$

welche gleich seyn muß der würklichen Kraft, so vorhanden ist,

$$\beta h\left(s + \frac{ss}{6q}\right),$$

weniger dem Gegendruck der Luft h, und noch über dieses weniger der Resistenz der Luft, welche, weil die Kugel rund ist, durch $\frac{1}{2}v$ ausgedruckt wird. Hieraus bekömmt man diese Aequation:

$$dv(2\alpha k + n\alpha b - ny + 244\alpha y) = 2\alpha\beta h dx\left(s + \frac{ss}{6q}\right) - 2\alpha h dx - \alpha v dx,$$

wo

$$s = \frac{244\alpha y}{\alpha(x-b)+y} \quad \text{und} \quad y = \frac{b(x-b)^\mu}{(f-b)^\mu}.$$

Hieraus wird

$$s = \frac{244\alpha b(x-b)^{\mu-1}}{\alpha(f-b)^\mu + b(x-b)^{\mu-1}}.$$

Wenn also die Zahl $\mu = 1$ wäre, so würde

$$s = \frac{244\alpha b}{\alpha f - (\alpha - 1)b} \quad \text{und} \quad y = \frac{b(x-b)}{f-b};$$

folglich würde in diesem Fall die elastische Kraft immer einerley seyn. Wir wollen diesen Fall wegen Erleichterung der Rechnung beybehalten, um zu sehen, wie viel derselbe von der Wahrheit abweicht, so wird

$$dv\big(\alpha(2k+nb)(f-b) + b(244\alpha - n)(x-b)\big) = \alpha dx(f-b)\left(2\beta h\left(s + \frac{ss}{6q}\right) - 2h - v\right)$$

und also

$$\frac{dv}{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right) - 2h - v} = \frac{\alpha dx(f-b)}{\alpha(2k+nb)(f-b) + b(244\alpha - n)(x-b)},$$

welche integrirt und auf den gegenwärtigen Fall gerichtet giebt

$$l\frac{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h}{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h-v}=\frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)b}\,l\,\frac{\alpha(2k+nb)(f-b)+(244\alpha-n)b(x-b)}{\alpha(2k+nb)(f-b)}.$$

Man setze um abzukürtzen

$$2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h=g,\qquad \frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)b}=\nu;$$

so wird

$$l\frac{g}{g-v}=\nu l\frac{\nu(2k+nb)+x-b}{\nu(2k+nb)}$$

und folglich

$$\frac{g}{g-v}=\left(1+\frac{x-b}{\nu(2k+nb)}\right)^{\nu};$$

dahero

$$v=g-g\left(1+\frac{x-b}{\nu(2k+nb)}\right)^{-\nu}.$$

Aus welcher Gleichung, wenn man setzt $x=a$, die Geschwindigkeit, womit die Kugel herausgetrieben wird, heraus kömmt.

Um diese Ausdrückung auf den schon öfters berechneten Fall zu reduciren, so sey

$$\alpha=\tfrac{3}{2},\ \beta=4,\ n=1000,\ a=45,\ b=2\tfrac{5}{8}\ \text{und}\ f=45\ \text{und}\ k=4900\ \text{Engl. Zoll},$$

so wird

$$s=14{,}5\ ^{1)},\quad g=114{,}4h\ ^{2)},\quad \nu=-\tfrac{1}{26}\quad\text{und endlich}\quad v=\tfrac{10135}{24850}h\ ^{3)},$$

woraus eine Geschwindigkeit gefunden wird, welche in einer Secunde 861 Rheinl. Schuh[4]) beträgt. Ohngeachtet nun diese Geschwindigkeit fast um die Helfte kleiner ist, als diejenige, welche aus den Versuchen herausgekommen, so ist doch dieselbe sehr groß, in Ansehung der kleinen Kraft, wodurch die Kugel fortgetrieben wird, als welche von einer Luft herrühret, die nur 14,5[1]) mahl dichter ist, als die natürliche, und also durch die Erhitzung nur eine 58[5]) mahl grössere Elasticität bekömmt. Wir sehen also hieraus, daß wir die Zahl μ

1) Im Original 15,7. 2) Im Original $124h$. 3) Im Original $\frac{10509}{24850}h$.
4) Im Original 877 Schuh. 5) Im Original 63. Berichtigt von F. R. S.

zu groß angenommen; denn je grösser μ angenommen wird, je kleiner wird s, und folglich auch die Geschwindigkeit. Wenn wir aber μ kleiner als 1 setzen, so wird s, und also auch die Geschwindigkeit grösser. Es dürfte also ungefehr seyn $\mu = \frac{1}{2}$, in welchem Fall wird

$$s = \frac{244\,\alpha b}{b + \alpha\sqrt{(f-b)(x-b)}} \quad \text{und} \quad y = b\sqrt{\frac{x-b}{f-b}};$$

und da $\sqrt{(x-b)} = \frac{y}{b}\sqrt{(f-b)}$, so ist

$$s = \frac{244\,\alpha bb}{bb + \alpha(f-b)y} \quad \text{und} \quad dx = \frac{2(f-b)ydy}{bb}.$$

Damit aber die Integration um so viel weniger Schwierigkeit habe, so wollen wir die 3 letzten Terminos

$$2\alpha\beta h dx \cdot \frac{ss}{6q} - 2\alpha h dx - \alpha v dx$$

weglassen, welches sehr füglich geschehen kann, da wir schon oben gesehen, daß die Würkung des Wiederstands $2\alpha h dx + \alpha v dx$ fast nichts austrage, und dieselbe noch über dieses in gegenwärtigem Fall durch den Terminum $\frac{\alpha\beta h ss dx}{3q}$ fast aufgehoben wird. Solchergestalt bekommen wir diese Aequation:

$$dv = \frac{2\alpha\beta h s dx}{\alpha(2k+nb) - (n - 244\,\alpha)y}.$$

Da nun

$$s = \frac{244\,\alpha bb}{bb + \alpha(f-b)y} \quad \text{und} \quad dx = \frac{2(f-b)ydy}{bb},$$

so wird

$$sdx = \frac{488\,\alpha(f-b)ydy}{bb + \alpha(f-b)y}$$

und dahero bekommt man

$$dv = \frac{976\,\alpha^2\beta h(f-b)ydy}{(bb + \alpha(f-b)y)(\alpha(2k+nb) - (n - 244\,\alpha)y)}.$$

Man setze um abzukürzen

$$\frac{976\,\alpha^2\beta h(f-b)}{bb(n - 244\,\alpha) + \alpha\alpha(f-b)(2k+nb)} = A,$$

so zertheilet sich die gefundene Aequation in diese Gestalt

$$dv = \frac{-Abbdy}{bb+\alpha(f-b)y} + \frac{A\alpha(2k+nb)dy}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y},$$

wovon das Integrale ist

$$v = C - \frac{Abb}{\alpha(f-b)} l(bb+\alpha(f-b)y) - \frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha} l(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y).$$

Diese beständige Quantität C muß aber also beschaffen seyn, daß $v=0$ wird, wenn $x=b$, das ist, wenn $y=0$; dahero hat man

$$v = \frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha} l \frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y} - \frac{Abb}{\alpha(f-b)} l \frac{bb+\alpha(f-b)y}{bb}.$$

Um nun die letzte Geschwindigkeit zu finden, mit welcher die Kugel aus dem Lauf hinaus getrieben wird, so setze man $x=a$; wir wollen aber annehmen, daß auch $f=a$, oder daß sich das Pulver alles entzünde, indem die Kugel durch den Lauf fährt; so wird $y=b$; und in diesem Fall ist also

$$A = \frac{976\alpha^2\beta h(a-b)}{bb(n-244\alpha)+\alpha\alpha(a-b)(2k+nb)}$$

und

$$v = \frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha} l \frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b} - \frac{Abb}{\alpha(a-b)} l \frac{bb+\alpha(a-b)b}{bb},$$

oder

$$v = \frac{-Abb}{\alpha(a-b)} l\left(1+\frac{\alpha(a-b)}{b}\right) - \frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha} l\left(1-\frac{(n-244\alpha)b}{\alpha(2k+nb)}\right).$$

Man setze ferner

$$\frac{\alpha(a-b)}{b} = \zeta \quad \text{und} \quad \frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)b} = \eta,$$

so wird

$$v = -\frac{976\beta\eta bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)} l(1+\zeta) - \frac{976\beta\zeta\eta^2 bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)} l\left(1-\frac{1}{\eta}\right).$$

Damit man nun diesen Fall besser mit demjenigen, da sich alles Pulver im ersten Augenblick auf einmahl zu entzünden gesetzt wird, vergleichen könne, so dürfen wir nur in der Differential-Aequation setzen $y=b$, und wenn wir

eben dieselben Terminos als vorher weglassen, so haben wir

$$s = \frac{244\,\alpha b}{\alpha x - (\alpha - 1)\,b}$$

und

$$dv = \frac{488\,\alpha^2 \beta b h\, dx}{(\alpha(2k + nb) - (n - 244\,\alpha)\,b)\,(\alpha x - (\alpha - 1)\,b)},$$

wovon das Integrale ist

$$v = \frac{488\,\alpha\beta b h}{\alpha(2k + nb) - (n - 244\,\alpha)\,b}\, l\,\frac{\alpha x - (\alpha - 1)\,b}{b};$$

und wenn wir setzen $x = a$, so kommt:

$$v = \frac{488\,\alpha\beta b h}{\alpha(2k + nb) - (n - 244\,\alpha)\,b}\, l\left(1 + \frac{\alpha(a - b)}{b}\right).$$

Setzen wir nun wie vorher

$$\frac{\alpha(a - b)}{b} = \zeta \quad \text{und} \quad \frac{\alpha(2k + nb)}{(n - 244\,\alpha)\,b} = \eta,$$

so haben wir:

$$v = \frac{488\,\beta\eta b h}{(\eta - 1)(2k + nb)}\, l\,(1 + \zeta),$$

welche mit der vorigen Expression leichter verglichen werden kann, als diejenige, so wir oben gefunden haben; weil wir alhier in beyden Fällen einerley Terminos weggelassen haben. Derowegen wenn wir die Geschwindigkeit der Kugel, wenn sich das Pulver auf einmahl entzündet, setzen $= \sqrt{u}$, und die Geschwindigkeit der Kugel, wenn sich das Pulver nach und nach, wie wir angenommen haben, entzündet, setzen $= \sqrt{v}$, so wird sich verhalten

$$u : v = \frac{1}{\eta - 1}\, l\,(1 + \zeta) : \frac{-2}{1 + \zeta\eta}\, l\,(1 + \zeta) - \frac{2\zeta\eta}{1 + \zeta\eta}\, l\left(1 - \frac{1}{\eta}\right),$$

und da die Logarithmi von allen verschiedenen Tabellen unter sich einerley Verhältnisse haben, so ists hier gleich viel, was man für eine Tabelle gebraucht. Wenn wir nun setzen

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad a = 45, \quad b = 2\tfrac{5}{8}, \quad k = 4900 \quad \text{und} \quad n = 1000,$$

so wird

$$\zeta = 24{,}21, \quad \eta = 5{,}2\,^{1)}$$

---

1) Die Rechnung ergibt $\eta = \frac{3550}{317} = 11{,}2$. Siehe die Anmerkung 1 p. 200. F. R. S.

und also
$$u : v = \frac{10}{42}\, l\, 25{,}2 : \frac{-100}{6342}\, l\, 25{,}2 + \frac{12580}{6342}\, l \frac{52}{42}$$
oder
$$u : v = 1 : \frac{1258\, l\, 1{,}2381}{151\, l\, 25{,}2} - \frac{10}{151} = 1 : \frac{73{,}25}{151},$$
das ist
$$u : v = 1 : 0{,}4851 \quad \text{und} \quad \sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0{,}696,$$

folglich verhalten sich diese Geschwindigkeiten beynahe wie 10 zu 7. Nun aber beträgt die Geschwindigkeit, wenn sich alles Pulver auf einmahl zu entzünden gesetzt wird, in einer Secunde 1731 Rheinl. Schuhe, dahero für den gegenwärtigen Fall, da sich nicht alles Pulver auf einmahl entzündet, 1212 Schuh heraus kommen. Da nun diese almählige Entzündung auf dem Werth $\mu = \frac{1}{2}$ beruht: als wir aber vorher $\mu = 1$ gesetzt hatten, eine Geschwindigkeit nur von 877 Schuhen gefunden worden; so sieht man schon, daß wenn man für μ einen noch kleinern Bruch als $\frac{1}{2}$ nehmen solte, die Geschwindigkeit auch grösser, als 1212 Schuh, heraus kommen und folglich der Wahrheit näher kommen würde. Je kleiner wir aber den Werth von μ annehmen, je plötzlicher entzündet sich das Pulver im ersten Anfange, dennoch aber bleibt die Entzündung im allerersten Augenblick unendlich klein. Weil wir nun versichert seyn können, daß sich gleich im ersten Augenblick schon ein beträchtlicher Theil des Pulvers entzündet, so folgt hieraus, daß die gefundene Geschwindigkeit von 1212 Schuhen viel zu klein seyn müsse: und daß also unsere Meynung, kraft welcher sich das Pulver nicht auf einmahl entzünden soll, mit der Wahrheit sehr wohl bestehen könne. Denn da die plötzliche Entzündung eine Geschwindigkeit von 1795 Englischen Schuhen giebt, durch die Versuche aber nur ungefehr 1650 wahrgenommen worden, so ist der Unterscheid von 145 Schuhen groß genug, daß man daraus eine von der almähligen Entzündung herrührende Verminderung schliessen kann.[1]) Da auch die gefundene Geschwindigkeit von 1795 Schuhen wegen des weggeworfenen Termini $\frac{ss}{6q}$, als welcher in diesem Fall da s sehr groß ist, nicht mehr so wenig austrägt, noch um etwas merkliches

1) Mit Benutzung des richtigen Wertes von η ergibt sich $\sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0{,}718$, ferner als Mündungsgeschwindigkeit bei plötzlicher vollständiger Entzündung des Pulvers 1630 rheinl. oder 1680 engl. Fuß und bei allmählicher Entzündung 1171 rheinl. Fuß. Der Unterschied der für plötzliche Entzündung berechneten und der aus den Beobachtungen ermittelten Mündungsgeschwindigkeit beträgt also nicht 145 sondern nur 30 engl. Fuß. F. R. S.

zu klein ist, so begreift man leicht, daß man davon noch den durch den Spiel-Raum und das Zündloch verursachten Verlust abziehen könne: indem dieser Verlust in einem-Musketen Lauf, da wegen der Fütterung durch den Spielraum fast gar nichts durchdringen kann, kaum merklich seyn wird. Und also wird man keine weitere Ursache mehr finden, an der Wahrheit der hier gegebenen Lehre über die Gewalt des Pulvers zu zweifeln.

SIEBENTE ANMERKUNG

Weil es aber eben so schwehr ist, die almählige Entzündung des Pulvers in Rechnung zu bringen, als die Rechnung selbst zu vollenden, so kan man sich die Sache dergestalt vorstellen, als wenn sich im ersten Augenblick ein gewisser Theil des Pulvers auf einmahl entzündete, der übrige Theil aber gänzlich unentzündet bliebe. Denn das Pulver mag sich in der That so plötzlich oder langsam, als man immer will, entzünden, so wird es allzeit möglich seyn, eine gewisse Portion zu bestimmen, welche, wenn sie sich im ersten Augenblick auf einmahl entzündete, eben diejenige Würkung hervorbringen würde. Wir wollen dahero in der obigen Rechnung annehmen, daß diese Portion Pulver, welche sich im ersten Augenblick entzündet, und durch ihre Kraft allein die Kugel forttreibet, durch λb aus gedrückt werde, oder daß sich die Portion zur ganzen Ladung verhalte, wie $\lambda:1$, dergestalt daß λ einen gewissen Bruch andeutet, welcher der Unität um soviel näher kommt, je plötzlicher sich das Pulver in der That entzündet. Dahero wird in der vorher gefundenen Aequation seyn $y=\lambda b$ und

$$s=\frac{244\alpha\lambda b}{\alpha(x-b)+\lambda b} \quad \text{oder} \quad s=\frac{244\alpha\lambda b}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}$$

und

$$\frac{ss}{6q} \quad \text{oder} \quad \frac{ss}{4800}=\frac{12{,}4\alpha^2\lambda^2 b^2}{(\alpha x-(\alpha-\lambda)b)^2}.$$

Weil nun

$$dv(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b)=2\alpha\beta h dx\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2\alpha h dx-\alpha v dx,$$

so wird durch die Integration gefunden werden

$$v(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b)=488\alpha\beta\lambda bhl\,\frac{\alpha(x-b)+\lambda b}{\lambda b}$$
$$-\frac{24{,}8\,\alpha^2\beta\lambda^2b^2h}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}+24{,}8\alpha^2\beta\lambda bh-2\alpha hx+2\alpha bh-\alpha\int v\,dx.$$

Weil aber schon ziemlich genau ist

$$v=\frac{488\alpha\beta\lambda bh}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\,l\,\frac{\alpha(x-b)+\lambda b}{\lambda b},$$

so ist

$$\alpha\int v\,dx=v(\alpha x-(\alpha-\lambda)b)-\int dv(\alpha x-(\alpha-\lambda)b).$$

Dahero ist

$$\alpha\int v\,dx=\frac{488\,\alpha\beta\lambda bh(\alpha x-(\alpha-\lambda)b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\,l\,\frac{\alpha(x-b)+\lambda b}{\lambda b}-\frac{488\,\alpha^2\beta\lambda bh(x-b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}.$$

Man setze nun um abzukürtzen

$$\frac{2\alpha b}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}=m,$$

so wird man finden

$$v=244\beta\lambda mh\,l\,\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}-\frac{12{,}4\,\alpha\beta\lambda^2mbh}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}+12{,}4\,\alpha\beta\lambda mh-\frac{mh(x-b)}{b}$$
$$-\frac{244\beta\lambda mh(\alpha x-(\alpha-\lambda)b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\,l\,\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}+\frac{244\,\alpha\beta\lambda mh(x-b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}$$

oder

$$v=244\beta\lambda mh\left(1-\frac{m(\alpha x-(\alpha-\lambda)b)}{2\alpha b}\right)l\,\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}+\frac{12{,}4\,\alpha^2\beta\lambda mh(x-b)}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}$$
$$-\frac{mh(x-b)}{b}(1-122\beta\lambda m).$$

Setzt man nun $x=a$, so kommt die Geschwindigkeit heraus, womit die Kugel aus dem Lauf geschossen wird, in welchem Fall man diese Vergleichung erhält:

$$v=244\beta\lambda mh\left(1-\frac{m(\alpha(a-b)+\lambda b)}{2\alpha b}\right)l\,\frac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b}+\frac{12{,}4\,\alpha^2\beta\lambda mh(a-b)}{\alpha(a-b)+\lambda b}$$
$$-\frac{mh(a-b)}{b}(1-122\beta\lambda m).$$

Um aber die Geschwindigkeiten mit einander zu vergleichen, welche heraus kommen, wenn man erstlich setzt, daß sich alles Pulver, und hernach daß sich nur ein Theil desselben entzünde, so ist genug, den ersten Terminum allein zu nehmen. Es sey dahero $\sqrt{u}$ die Geschwindigkeit, womit die Kugel heraus geschossen wird, wenn sich alles Pulver auf einmahl entzündet; ferner sey $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit, womit die Kugel heraus gestossen wird, wenn sich nur ein Theil des Pulvers, welcher sich zum ganzen verhält, wie λ zu 1, entzündet, so wird man haben

$$u : v = \frac{1}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b}\, l\frac{\alpha(a-b)+b}{b} : \frac{\lambda}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\, l\frac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b}$$

oder

$$u : v = 1 : \frac{\alpha\lambda(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b} \cdot \frac{l\frac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b}}{l\frac{\alpha(a-b)+b}{b}}.$$

Oder um abzukürzen, so setze man, wie oben

$$\frac{\alpha(a-b)}{b} = \zeta \quad \text{und} \quad \frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)b} = \eta,$$

so wird

$$u : v = 1 : \frac{(\eta-1)\lambda}{\eta-\lambda} \cdot \frac{l(\zeta+\lambda):\lambda}{l(\zeta+1)}.$$

Wenn nun, wie in dem schon oft berechneten Exempel, ist

$$\alpha = \tfrac{3}{2}, \quad a = 45, \quad b = 2\tfrac{5}{8}, \quad k = 4900 \quad \text{und} \quad n = 1000,$$

so wird

$$\zeta = 24{,}21 \quad \text{und} \quad \eta = 5{,}2$$ [1];

folglich hat man diese Vergleichung

$$u : v = 1 : \frac{4{,}2\lambda}{5{,}2-\lambda} \cdot \frac{l\frac{24{,}21+\lambda}{\lambda}}{l\,25{,}21}.$$

Man setze zum Exempel $\lambda = \frac{3}{4} = 0{,}75$, so wird

$$u : v = 1 : 0{,}7078\frac{l\,33{,}28}{l\,25{,}21} = 1 : 0{,}7687$$

1) Berichtigt durch die Anmerkung 1 p. 199. F. R. S.

und die Geschwindigkeiten selbst werden sich also verhalten:

$$\sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0{,}8767.$$

Da also, wie wir gesehen, die Geschwindigkeit der Kugel, da alles Pulver auf einmahl zu entzünden gesetzt worden, in einer Secunde ungefehr 1800 Schuh betragen, so wird die Geschwindigkeit der Kugel, wenn sich nur $\frac{3}{4}$ vom Pulver entzünden, in einer Secunde austragen 1578 Engl. Schuh. Es ist aber wahrscheinlich, daß man, um mit der Wahrheit überein zu stimmen, einen grössern Theil als $\frac{3}{4}$ für λ annehmen müsse. Setzen wir aber $\lambda = \frac{7}{8}$, so kömmt ungefehr eine Geschwindigkeit von 1689 Schuhen in einer Secunde heraus, welche schon grösser ist, als die Experientz angezeiget. Da nun auch noch etwas weniges von der forttreibenden Gewalt durch das Zündloch und den Spiel-Raum weggehet, so wird man ungefehr, wenn das Pulver recht gut ist, wie der Autor gebrauchet, ziemlich sicher für λ diesen Bruch $\frac{9}{10}$ annehmen können. In dem gegenwärtigen Exempel wird aber dahero diese Proportion entstehen:

$$u : v = 1 : 0{,}88 \frac{l\,27{,}9}{l\,25{,}21} = 1 : 0{,}90765$$

und also

$$\sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : \sqrt{0{,}90765}.$$

Dahero anjetzo die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde 1755 Englische Schuh betragen wird. Wenn nun davon 100 Schuh für den Verlust wegen des Spielraums und des Zündlochs abgezogen werden, so kommt die wahre Geschwindigkeit, welche gefunden worden, heraus.[1]) Wir können aber aus der letzt integrirten Aequation den Werth von u oder die Geschwindigkeit der Kugel, wenn sich alles Pulver auf einmahl entzündet, genauer bestimmen, als bißher, weil darinnen auch die Resistenz nicht ist aus der Acht gelassen worden. Wir dürfen zu diesem Ende nur $\lambda = 1$ setzen, und da β eine solche Zahl ist, daß nach

---

1) Weil η nicht gleich 5,2, sondern gleich 11,2 ist, so erhält man

für $\lambda = \frac{3}{4}$ $\qquad \sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0{,}8916,$

für $\lambda = \frac{7}{8}$ $\qquad \sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0{,}9481,$

für $\lambda = \frac{9}{10}$ $\qquad \sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0{,}9588;$

daher ergeben sich für die Mündungsgeschwindigkeit, je nachdem $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ oder $\frac{9}{10}$ des Pulvers verbrennt, 1605, 1705 oder 1726 englische Fuß. F. R. S.

dem Autore $244\beta = 1000$[1]), so ist $122\beta = 500$, und $12{,}4\beta = 50{,}8$. Ferner ist $n = 1000$, und $\alpha = \frac{3}{2}$, woraus entsteht $m = \frac{b}{k + 289b}$. Setzen wir weiter

$$\frac{\alpha(a-b)}{b} = \frac{3(a-b)}{2b} = \zeta,$$

so wird

$$u = 1000mh\left(1 - \frac{m(\zeta+1)}{3}\right) l(\zeta+1) + \frac{76{,}2\zeta mh}{\zeta+1} - \frac{2\zeta mh}{3}(1 - 500m).$$

In unserem Exempel also, da $a = 45$, $b = 2\frac{5}{8}$ und $k = 4900$, haben wir

$$\zeta = 24{,}2143 \quad \text{und} \quad m = \frac{1}{2155{,}66},$$

folglich

$$u = \frac{h}{2{,}15566} \cdot 0{,}996102\, l25{,}2143 + 0{,}033947 \cdot h - 0{,}005752 \cdot h$$

oder

$$u = 0{,}46209\, h\, l25{,}2143 + 0{,}028195 \cdot h.$$

Hieraus wird die gesuchte Geschwindigkeit folgender Gestalt bestimmt werden:

$$\begin{array}{rl}
l25{,}2143 & = 1{,}401647 \\
\hline
l1{,}401647 & = 0{,}146638 \\
l2{,}302581 & = 0{,}362215 \\
l0{,}46209 & = \underline{9{,}664723} \\
 & \ 0{,}173576 \\
\text{Die Zahl} & = 1{,}491340 \\
 & \ \underline{0{,}028195} \\
 & \ \underline{1{,}519535} \\
l1{,}519535 & = 0{,}181710 \\
lh & = \underline{7{,}463893} \\
 & \ \underline{7{,}645603} \\
\text{Die Hälfte} & = 3{,}822802 \\
l4 & = \underline{0{,}602060} \\
 & \ 3{,}220742
\end{array}$$

Die Geschwindigkeit 1662 Rheinl. Schuh oder aber 1711[2]) Engl. Schuh.

1) Siehe p. 66. F. R. S.

2) Im Original 1705. Berichtigt von F. R. S.

Da nun diese Zahl fast um 100 Schuh kleiner ist, als diejenige, welche vorher, da wir die Resistentz nicht in Betrachtung gezogen haben, gefunden worden, so bleiben nur ungefehr 60 Schuh übrig, welche der Verminderung, so von der allmähligen Entzündung des Pulvers und dem Zündloch, nebst dem Spielraum herrühren, zugeschrieben werden können. Setzt man nun $\lambda = \frac{9}{10}$, so beträgt dieser Abgang ungefehr 40 Schuh, und der übrige Verlust mag 20 Schuh austragen.

ACHTE ANMERKUNG

Da wir in diesen Anmerkungen alle diejenigen Umstände in Erwegung gezogen, welche auf die Bewegung der Kugel, ehe dieselbe aus der Canone heraus getrieben wird, einigen Einfluß haben, nur allein die Verminderung ausgenommen, welche von dem beständigen Verlust der forttreibenden Kraft durch das Zündloch und den Spiel-Raum herkömmt: so wollen wir alhier noch untersuchen, wie viel dieser Umstand austragen könne.

Es sey demnach, wie wir vorher gesetzt haben, die Länge der ganzen Canone (Fig. 10) $AB = a$, die Länge des Raums, welcher anfänglich mit Pulver angefüllt gewesen, $AC = b$, und um die Schwierigkeiten nicht ohne Noth zu vermehren, so wollen wir setzen, daß sich gleich im ersten Augenblick ein Theil des Pulvers, welcher sich zur ganzen Ladung verhalte wie λ zu 1, auf einmahl entzündet habe, und daß sich auch nachgehends nichts mehr entzünde. Dahero wird der noch unentzündete Theil einen Raum einnehmen, dessen Länge $= (1 - \lambda)b$. Ferner sey die aus dem entzündeten Pulver erzeugte gröbere Materie der $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ te Theil desselben, welche mit dem unentzündeten Pulver einen Raum einnehmen wird, dessen Länge $= b - \frac{\lambda b}{\alpha}$. Wir wollen nun setzen, daß die beyden Oefnungen des Spiel-Raums und Zündlochs, wodurch die zusammen gepreßte Luft heraus fährt, zusammen genommen den $\frac{1}{m}$ Theil der Höhlung des Stücks, welche durch cc angedeutet wird, austrage. Zu diesem Ende wollen wir das Zündloch ef um etwas grösser annehmen, damit darunter zugleich die Oefnung des Spiel-Raums begriffen werde, und folglich setzen $ef = \frac{cc}{m}$. Dieses voraus gesetzt, so soll nach einiger Zeit die Kugel schon biß MN fortgetrieben worden seyn. Man nenne die Länge $AM = x$, und die Geschwindigkeit sowohl der Kugel, als der vördersten Scheibe

$MN = Vv$, dergestalt daß, indem die Kugel durch $Nn = dx$ fortrücket, die Höhe v um dv wachse. Wenn also das Gewicht der Kugel durch eine Luft-Säule ausgedruckt wird, deren Höhe $= k$, so ist die Kraft, welche zur Acceleration der Kugel erfordert wird, $= \frac{k\,dv}{dx}$. Wenn hernach die gröbere Materie n mahl dichter, als die natürliche Luft, gesetzt wird, so ist die Kraft, welche zur Acceleration derselben erfordert wird,

$$= \frac{1}{2} n \left(b - \frac{\lambda b}{\alpha}\right) \frac{dv}{dx}.$$

Da aber anjetzo die Kugel nicht mehr von der ganzen Gewalt, welche anfänglich aus dem Pulver erzeugt worden, fortgetrieben wird, indem unterdessen ein Theil derselben durch das Zündloch verlohren gegangen, so wollen wir setzen, daß sich dieser verlohrne Theil zum ganzen verhalte, wie z zu 1; oder, daß dieser Verlust gleich sey einer natürlichen Luft-Säule, deren Höhe $244\lambda b z$. Also wird die in der Canone noch übrige Luft seyn $= 244\lambda b(1-z)$. Da nun dieselbe in der Canone einen Raum einnimmt, dessen Länge $= x - b + \frac{\lambda b}{\alpha}$, so muß dieselbe

$$\frac{244\,\lambda b(1-z)}{x - b + \frac{\lambda b}{\alpha}}$$

mahl dichter seyn, als die natürliche Luft. Wir wollen, um der Kürze willen für diesen Bruch den Buchstaben s setzen, so wird, wie oben gewiesen worden, die Elasticität dieser Luft dem Gewicht einer Luft-Säule gleichen, deren Höhe

$$= \beta h \left(s + \frac{ss}{6q}\right);$$

und da zur Acceleration dieser Luft eine Kraft erfordert wird

$$= \frac{122\,\lambda b(1-z)\,dv}{dx},$$

so ist die völlige zur Acceleration erforderte Kraft

$$= \frac{dv}{dx}\left(k + \frac{1}{2} nb \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) + 122\lambda b(1-z)\right),$$

welche der würklichen Kraft weniger dem Gegendruck h und der Resistentz der Luft $\frac{1}{2}v$ gleich gesetzt, diese Aequation giebt

$$dv\left(k + \frac{1}{2} nb \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) + 122\,\lambda b(1-z)\right) = \beta h\left(s + \frac{ss}{6q}\right) dx - h\,dx - \frac{1}{2} v\,dx.$$

Um aber den Verlust z zu bestimmen, so wollen wir die Geschwindigkeit, mit welcher diese Luft durch das Zündloch ef heraus dringt, setzen $=\sqrt{u}$. Indem also die Kugel durch dx fortgehet, so wird durch das Zündloch ein kleiner Cylinder heraus gehen, dessen Länge $=\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ und dessen Dicke $=\frac{cc}{m}$. Und weil diese Luft s mahl dichter ist, als die natürliche, so wird dieser Verlust eine natürliche Luft-Säule austragen, deren Dicke $=cc$, und deren Höhe $=\frac{sdx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}}$. Da nun dieses der Abgang ist von der in der Canone enthaltenen Luft $244\lambda b(1-z)$, so wird

$$244\lambda b\,dz=\frac{sdx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}},$$

wovon das Integrale also genommen werden muß, daß dasselbe verschwinde, wenn $x=b$. Nun ist also noch übrig, die Geschwindigkeit $\sqrt{u}$ zu bestimmen, welche von der Gewalt der Zusammendrückung abhängt. Weil nun diese Gewalt dem Gewichte einer natürlichen Luft-Säule, so hoch $=\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)$, gleich ist, so wird zu dieser Zusammendrückung eine Höhe von einer gleich dichten Luft, so $=\beta h\left(1+\frac{s}{6q}\right)$ erfordert, dahero wird der Druck auf das Zündloch eben so groß seyn, als wenn sich darüber eine Säule von einerley Luft, welche s mahl dichter als die natürliche, befände, deren Höhe $=\beta h\left(1+\frac{s}{6q}\right)$. In diesem Fall aber würde die Luft durch das Zündloch mit einer Geschwindigkeit heraus getrieben werden, dergleichen ein fallender Körper aus dieser Höhe erlangt, und also wird seyn

$$u=\beta h\left(1+\frac{s}{6q}\right).$$

Wir können alhier den Bruch $\frac{s}{6q}$ als sehr klein sicher weglassen, und bekommen also $u=\beta h$, und folglich

$$244\lambda b dz=\frac{sdx\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{v}}.$$

Nun ist

$$s=\frac{244\,\alpha\lambda b(1-z)}{\alpha x+(\lambda-\alpha)b}$$

oder, da $\alpha>1$ und $\lambda<1$, vielmehr

$$s=\frac{244\,\alpha\lambda b(1-z)}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}.$$

Wenn wir nun diesen Werth für s setzen, so kommt

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{\alpha\,dx\sqrt{\beta h}}{m(\alpha x-(\alpha-\lambda)b)\sqrt{v}}.$$

Wir haben aber schon vorher gefunden

$$dv(2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda b(1-z))=2\alpha\beta h\,dz\Big(s+\frac{ss}{6q}\Big)-2\alpha h\,dx-\alpha v\,dx,$$

und wenn wir hier die drey letzten Terminos, als welche nicht nur sehr klein sind, sondern sich auch beynahe fast aufheben, weglassen, so haben wir

$$dv\big(2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda b(1-z)\big)=\frac{488\,\alpha^2\beta\lambda bh(1-z)}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}\,dx.$$

Die obige Aequation aber giebt

$$\frac{\alpha\,dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=\frac{m\,dz\sqrt{v}}{(1-z)\sqrt{\beta h}}$$

und dahero bekommen wir

$$dv(2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda b(1-z))=488m\alpha\lambda b\,dz\sqrt{\beta hv}$$

oder

$$dz+\frac{z\,dv}{2m\sqrt{\beta hv}}=\frac{dv(2\alpha k+nb(\alpha-\lambda))}{488m\alpha\lambda b\sqrt{\beta hv}}+\frac{dv}{2m\sqrt{\beta hv}}\;^{1)},$$

welche mit $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}$ multiplicirt, integrirt werden kann, da denn kömmt

$$e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\,z=\Big(\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244m\alpha\lambda b}+\frac{1}{m}\Big)\int e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\frac{dv}{2\sqrt{\beta hv}}$$

oder

$$e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\,z=\Big(\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244\,\alpha\lambda b}+1\Big)\big(e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}-1\big),$$

weil die Quantität z, welche den Verlust der forttreibenden Gewalt ausdrückt, verschwinden muß, wenn $v=0$, als welches im ersten Augenblick geschieht. Hieraus bekommen wir

1) Das Glied $\frac{dv}{2m\sqrt{\beta hv}}$ fehlt im Original. F. R. S.

$$z = \frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda) + 244\alpha\lambda b}{244\alpha\lambda b}\left(1 - e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\right)$$

und

$$1 - z = \frac{(2\alpha k + nb(\alpha-\lambda) + 244\alpha\lambda b)\, e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - 2\alpha k - nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}$$

ferner

$$l(1-z) = l\left(\left(1 + \frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}\right) e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - \frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}\right).$$

Es sey

$$\frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b} = \mu;$$

so ist

$$l(1-z) = l((1+\mu)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - \mu)$$

und also

$$\frac{dz}{1-z} = \frac{(1+\mu)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\, dv : 2m\sqrt{\beta h v}}{(1+\mu)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - \mu}$$

oder

$$\frac{dz}{1-z} = \frac{(1+\mu)\, dv : 2m\sqrt{\beta h v}}{1 + \mu - \mu e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}}.$$

Da nun oben gefunden worden

$$\frac{\alpha dx}{\alpha x - (\alpha-\lambda)b} = \frac{dz}{1-z}\cdot\frac{m\sqrt{v}}{\sqrt{\beta h}},$$

so wird

$$\frac{2\alpha\beta h dx}{\alpha x - (\alpha-\lambda)b} = \frac{(1+\mu)dv}{1 + \mu - \mu e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}}.$$

Weil aber m gemeiniglich eine sehr grosse Zahl ist, so wird der Bruch $\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}$ sehr klein, und folglich ziemlich genau

$$e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} = 1 + \frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}.$$

Wenn man nun diesen Werth in der obigen Aequation anbringt, so wird

$$\frac{2\alpha\beta h dx}{\alpha x - (\alpha-\lambda)b} = \frac{m(1+\mu)\, dv\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h} - \mu\sqrt{v}},$$

oder da

$$\frac{m\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h} - \mu\sqrt{v}} = 1 + \frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}},$$

so bekommt man

$$\frac{2\alpha\beta h\,dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=(1+\mu)dv+\frac{\mu(1+\mu)dv\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}.$$

Woraus man durch die Integration erhält

$$2\beta hl\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}=(1+\mu)v+\frac{2\mu(1+\mu)v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}}.$$

Solte aber durch das Zündloch nichts von der Gewalt des Pulvers verlohren gehen, so würde man haben

$$(1+\mu)v=2\beta hl\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b},$$

woraus erhellet, daß in dem gegenwärtigen Fall die Geschwindigkeit vermindert wird. Um nun zu finden, wie viel diese Verminderung austrägt, so wollen wir setzen, daß wenn dieser Verlust nicht da wäre, die Geschwindigkeit der Kugel seyn würde $=\sqrt{u}$; wenn aber der Verlust durch das Zündloch da ist, so sey die Geschwindigkeit der Kugel $=\sqrt{v}$; und hieraus entspringt diese Aequation:

$$u=v+\frac{2\mu v\sqrt{v}}{2m\sqrt{\beta h}}$$

und daraus ferner durch die Näherung

$$v=u-\frac{2\mu u\sqrt{u}}{3m\sqrt{\beta h}} \quad \text{und} \quad \sqrt{v}=\sqrt{u}-\frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}}.$$

Folglich wird sich verhalten

$$\sqrt{v}:\sqrt{u}=1-\frac{\mu\sqrt{u}}{3m\sqrt{\beta h}}:1.$$

Wenn nun $\sqrt{u}$ durch die Anzahl der Schuhe ausgedruckt wird, welche die Kugel in einer Secunde durchzulauffen vermögend ist, so wird $\sqrt{\beta h}=2700$ Schuhe, und also

$$\sqrt{v}:\sqrt{u}=1-\frac{\mu\sqrt{u}}{8100m}:1;$$

es ist aber

$$\mu=\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244\,\alpha\lambda b}.$$

Wenn also die Kugel ohne diesen Verlust mit einer Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde heraus getrieben würde, so müste dieser Umstand einen Verlust von $\frac{17\mu}{81m}\cdot 1700$ Schuh in einer Secunde austragen. In dem obigen Exempel, da

$$b = 2{,}625, \quad k = 4900, \quad n = 1000, \quad \alpha = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{9}{10},$$

wird

$$\mu = 18{,}82^{1)},$$

und daher beträgt der Verlust

$$\frac{319{,}6}{81m}\cdot 1700^{2)}, \quad \text{das ist} \quad \frac{6714}{m}{}^{3)} \text{ Schuh.}$$

Sollte nun die Weite des Zündlochs den hundertsten Theil der Weite der Canone austragen, so würde dieser Verlust 67[4]) Schuh in einer Secunde ausmachen: und also die Kugel an statt 1700 nur 1633[5]) Schuh in einer Secunde durchlauffen. Hierbey ist aber zu merken, daß unsere für den Verlust gefundene Expression allzu groß ist, indem wir in der obigen Integration einige Terminos weggelaßen, welche diesen Verlust vermindert haben würden; und dieser Fehler wird um so viel grösser seyn, je grösser das Zündloch, oder je kleiner die Zahl m ist; denn die gebrauchte Näherung gilt nur, wenn m eine sehr große Zahl bedeutet. Dieses erhellet auch gantz deutlich aus dem Verlust $\frac{6714}{m}{}^{3)}$; denn wenn zum Exempel m nur 3 wäre, so müste der Verlust 2238[6]) Schuh in einer Secunde austragen. Da nun die gantze Geschwindigkeit nur bey 1700 Schuhen ist, so siehet man wohl, daß sich der Verlust auf weit weniger als 1700 Schuh belauffen müsse: folglich ist klar, daß wenn m keine sehr grosse Zahl ist, der auf diese Art gefundene Verlust immer um ein merkliches zu groß seyn müsse. Dahero wenn in dem Exempel $m = 100$ gesetzt worden, so ist die Verminderung der Geschwindigkeit gewiß viel kleiner, als 67[4]) Schuh. Hernach ist auch der herausgebrachte Verlust aus diesem Grunde zu groß, weil wir angenommen haben, daß durch das Zündloch nur allein die zusammen gepreßte Luft heraus fahre, da doch außer Zweifel auch etwas von der gröbern Materie zugleich mit heraus geht, folglich wird die forttreibende Kraft nicht um so viel vermindert, als in der Rechnung angenommen worden. Denn außer dem, daß die forttreibende Gewalt dadurch keinen so großen Abgang

---

1) Im Original 17. 2) Im Original $\frac{289}{81m}\cdot 1700$. 3) Im Original $\frac{6065}{m}$. 4) Im Original 60. 5) Im Original 1640. 6) Im Original 2000. Berichtigt von F. R. S.

leidet, so wird dadurch auch die gröbere Materie vermindert, welche sonsten mit der Kugel fortgestossen werden müßte. Diesem letzten Mangel kann nun in der gefundenen Formul leicht abgeholfen werden, wenn man das Zündloch um etwas kleiner ansetzt, als solches in der That ist; wobey zu merken, daß wir hier unter dem Zündloch zugleich die Oefnung des Spielraums mit begreiffen. Um aber den ersten Fehler zu heben, welches nöthig ist, wenn m keine sehr große Zahl ist, so muß man den Werth von $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}$ näher ausdrucken, und da bekommt man darfür

$$1 + \frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}} + \frac{v}{2m^2\beta h} + \frac{v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}} + \text{etc.}$$

und also

$$\frac{2\alpha\beta h\,dx}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b} = \frac{(1+\mu)\,dv}{1 - \frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}} - \frac{\mu v}{2m^2\beta h} - \frac{\mu v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}} - \text{etc.}}$$

oder den Bruch weggebracht

$$\frac{2\alpha\beta h\,dx}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b} = (1+\mu)\,dv\left(1 + \frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}} + \frac{\left(\mu^2 + \frac{1}{2}\mu\right)v}{m^2\beta h} + \frac{\left(\mu^3 + \mu^2 + \frac{1}{6}\mu\right)v\sqrt{v}}{m^3\beta h\sqrt{\beta h}}\right).$$

Setzt man nun $\sqrt{u}$ für die Geschwindigkeit, welche die Kugel erhalten würde, wenn nichts von der forttreibenden Gewalt verlohren gienge, so wird

$$u = v + \frac{2\mu v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}} + \frac{(2\mu^2 + \mu)v^2}{4m^2\beta h} + \frac{(6\mu^3 + 6\mu^2 + \mu)v^2\sqrt{v}}{15m^3\beta h\sqrt{\beta h}}$$

und diese Aequation umgekehrt giebt

$$\sqrt{v} = \sqrt{u} - \frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}} + \left(\frac{1}{36}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu\right)\cdot\frac{u\sqrt{u}}{m^2\beta h} + \left(\frac{1}{270}\mu^3 + \frac{1}{20}\mu^2 - \frac{1}{30}\mu\right)\cdot\frac{uu}{m^3\beta h\sqrt{\beta h}}.$$

Weil nun $\sqrt{\beta h}$ eine Geschwindigkeit von 2700 Schuhen ausdruckt, wenn $\sqrt{u}$ gleichfals in Schuhen genommen, und der Bruch $\frac{\sqrt{u}}{m\sqrt{\beta h}}$ Kürze halber $= r$ genennet wird: so findet man

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 1 - \frac{1}{3}\mu r + \left(\frac{1}{36}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu\right)r^2 + \left(\frac{1}{270}\mu^3 + \frac{1}{20}\mu^2 - \frac{\mu}{30}\right)r^3.$$

Da nun in obigem Exempel $\mu = 18{,}82$[1]) und $r = \frac{17}{27m}$, so wird

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 1 - 3{,}950\cdot\frac{1}{m} + 2{,}968\cdot\frac{1}{m^2} + 10{,}427\cdot\frac{1}{m^3}.$$[2])

1) Im Original 17. 2) Im Original: $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 1 - 3{,}568\cdot\frac{1}{m} + 2{,}340\cdot\frac{1}{m^2} + 8{,}007\cdot\frac{1}{m^3}\cdot$

Berichtigt von F. R. S.

Diese Formul dienet nun, wenn m keine sehr große Zahl ist, als etwan unter 60. Denn wenn $m = 60$, so giebt der dritte Terminus $2{,}968 \cdot \frac{1}{m^2}$ [1]) mit $\sqrt{u} = 1700$ multipliciret nur 1,4 [2]) Schuh. Es sey zum Exempel $m = 10$, oder das Zündloch, nebst der Oefnung des Spielraums, betrage den zehnten Theil der gantzen Mündung, so wird $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 0{,}64511$ [3]) und der Verlust an der Geschwindigkeit beträgt 603 [4]) Schuh, dergestalt, daß die Kugel nur eine Geschwindigkeit von 1097 [5]) Schuh in einer Secunde erhält. Uebrigens ist hier noch zu bemerken, daß, da $\mu = \frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)}{244\alpha\lambda b}$, der Abgang an der Geschwindigkeit um so viel grösser werde, je schwehrer die Kugel, oder je grösser k ist, und hieraus können wir einen von den stärksten Gründen, welche der Verfasser zu Behauptung seiner Meynung, daß sich alles Pulver im ersten Augenblick auf einmahl entzünde, anführet, hinlänglich wiederlegen. Denn derselbe sagt, daß, wenn sich nicht alles Pulver auf einmahl entzündete, zwey oder drey Kugeln, welche zugleich geladen werden, nach Proportion eine grössere Geschwindigkeit erhalten müßten, als nur eine, indem dieselben länger im Lauf blieben, und also eine stärkere Gewalt aushielten. Dem ungeachtet aber habe er niemahls finden können, daß solches durch seine Experimente wäre bestätiget worden. Und in der That würde dieser Schluß seine völlige Richtigkeit haben, und die Meynung des Autoris bekräftigen, wenn dieser wegen des Zündlochs hier erklärte Umstand nicht vorhanden wäre. Denn da aus diesem Grunde eine schwerere Kugel einen stärkern Abgang leidet, als eine leichtere, aus dem vorigen Grunde aber das Wiederspiel folget: so kann es leicht geschehen, daß diese zwey wiederwärtigen Würkungen entweder einander völlig aufheben, oder doch so nahe, daß der Unterscheid in der Erfahrung nicht bemerkt werden kan.

Wenn man nun alle diese Anmerkungen zusammen nimmt, so wird man in einem jeglichen vorkommenden Fall nicht nur die Ursachen von allen Umständen anzeigen, sondern auch zum voraus die Geschwindigkeit der Kugel durch die Rechnung bestimmen können.

---

1) Im Original $2{,}340 \cdot \frac{1}{m^2}$. 2) Im Original 1. 3) Im Original 0,67461. 4) Im Original 553. 5) Im Original 1147. Berichtigt von F. R. S.

ZWÖLFTER SATZ

Die Gewalt zu untersuchen, mit welcher eine Kugel, so von der Ladung merklich entfernet ist, fortgetrieben wird.

Wir haben in verschiedenen von den oben angeführten Experimenten die Kugel nicht unmittelbar vor das Pulver, sondern in einer geringen Entfernung von demselben gesetzt, inzwischen hat doch der ledige Raum zwischen der Ladung und der Kugel immer über anderthalb Zoll betragen: und in diesem Fall haben wir gesehen, daß unsere Theorie noch ziemlich genau mit den Experimenten übereingestimmet. Wenn aber die Kugel noch weiter von dem Pulver, als in einer Entfernung von 12, 18 oder 24 Zoll geladen wird, so finden diejenigen Gründe nicht mehr statt, welche wir oben in dem 7ten Satz, da die Kugel entweder unmittelbar vor das Pulver, oder nicht weit davon, gesetzt worden, gebraucht haben. Denn wir haben in dem vorhergehenden Satze gesehen, daß wenn sich nicht unmittelbar vor dem Pulver ein schwerer Körper befindet, die Flamme sich alsdenn mit einer weit grösseren Geschwindigkeit ausbreite, als dieselbe immer einer Kugel einzudrucken vermögend ist. Da nun das Pulver, indem sich dasselbe durch einen ledigen Raum von 12, 18 oder 24 Zoll ausbreitet, einen sehr beträchtlichen Grad von dieser Geschwindigkeit erhält, so wird die erste Bewegung der Kugel nicht allein von der druckenden Kraft des Pulvers, sondern auch von dem würklichen Stoß desselben verursachet: und dahero wird der Kugel in dem ersten Augenblick ein weit grösserer Grad der Bewegung eingedruckt, welcher so wohl aus der Gewalt des Stosses, als aus der Ausdehnungs-Kraft des Pulvers, bestimmt werden muß.

Hieraus folget nun, daß die Geschwindigkeit der Kugel, wenn dieselbe ziemlich weit von dem Pulver geladen worden, weit grösser seyn müsse, als diejenige, welche oben in dem siebenten Satze aus der Ausdehnungs-Kraft des Pulvers allein heraus gebracht worden. Wir haben auch diese der Theorie gemäße Vermehrung der Geschwindigkeit der Kugel durch vielerley Versuche bestätiget. Auf diese Art haben wir gefunden, daß eine Kugel, welche in dem mit dem Buchstaben A bezeichneten Lauf $11\frac{1}{4}$ Zoll weit von dem Boden geladen, und mit 12 Drachm. Pulver heraus geschossen worden, eine Geschwindigkeit von 1400 Schuhen in einer Secunde erhalten; da dieselbe doch, wenn sie von der blossen Ausdehnungs-Kraft des Pulvers wäre in Bewegung gesetzt

worden, nur eine Geschwindigkeit von 1200 Schuhen in einer Secunde erlangt haben würde. Eben diesen Umstand haben wir auch in allen andern grösseren Entfernungen (und auch in kleinern, obgleich nicht auf denselben Grad) und mit allen Ladungen der Wahrheit gemäß befunden. Alle diese Würkungen kommen auch ziemlich genau mit demjenigen überein, was wir in dem vorigen Satz über die Geschwindigkeit der Ausdehnung so wohl der subtilen als der gröbern Theile der Flamme ausgeführet haben.

Hieraus fliesst noch eine andere Betrachtung von sehr großer Wichtigkeit im Gebrauch der Artillerie, welche darinne bestehet, daß man nimmer eine Kugel auf eine merkliche Distantz vor das Pulver laden soll, wenn der Lauf nicht über die maßen stark und fest ist. Denn, wenn eine mäßige Ladung Pulver sich schon durch den ledigen Raum ausgebreitet, und alsdenn erst die Kugel erreichet: so muß sich die Flamme durch die schon erhaltene Geschwindigkeit hinter der Kugel aufhäuffen, und dadurch einen weit grössern Grad der Dichtigkeit erhalten; dahero der Lauf, wenn derselbe an diesem Ort keine außerordentliche Stärke hat, von dieser verstärkten Kraft des Pulvers unfehlbar zerspringen wird. Ich habe auch die Wahrheit dieses Schlußes an einer herrlichen und aus zähem Eisen geschmiedeten Mußkete erfahren. Denn als ich dieselbe mit 12 Drachm. Pulver geladen, und die Kugel 16 Zoll weit vom Boden hinein gesetzt hatte, so ist dieser Lauf nach dem Schuß just hinter der Kugel fast zweymahl so dicke aufgeschwollen, und hat daselbst eine Gestalt, als eine aufgeblasene Blatter, bekommen; über dieses waren auch zwey grosse Stücke ungefehr zwey Zoll lang daraus gesprungen.

Da nun die ganze Bewegung einer Kugel, welche ziemlich weit vor das Pulver geladen worden, von zweyerley Kräften, welche darauf würken, herkommt: nehmlich erstlich von dem Stoß der Theile des entzündeten Pulvers, dessen Stärke auf der Geschwindigkeit, welche diese Theile durch die Ausdehnung schon würklich erhalten haben, beruhet, und denn zweytens von der fortdaurenden Kraft der Ausdehnung, womit die Kugel durch die übrige Länge des Laufs fortgetrieben wird; so war ich bemühet, diese zwey verschiedenen Würkungen von einander abzusondern, und nur die letztere beyzubehalten, welche von dem fortdaurenden Druck der Flamme herrühret. Zu diesem Ende trieb ich das Pulver nicht mehr auf dem Boden des Laufs zusammen, sondern um die Würkung des Stosses zu verhüten, so zerstreuete ich dasselbe durch den ganzen Raum hinter der Kugel so gleichförmig, als mir möglich war, und bildete mir ein, daß durch dieses Mittel die Geschwindigkeit der Flamme an einem jeglichen Ort durch die Ausdehnung der umliegenden Theile gehemmet

werden würde. Nachdem ich nun die Ladung auf diese Art eingerichtet, so fand ich, daß die Kugel, welche $11\frac{1}{4}$ Zoll weit von dem Boden gesetzt worden, an statt der Geschwindigkeit von 1400 Schuhen in einer Secunde, welche in dem vorhergehenden Experiment heraus gekommen, anjetzo nur eine Geschwindigkeit von 1100 Schuhen bekommen, welche um 100 Schuh kleiner ist, als nach unserer Theorie aus der fortdaurenden Druckung des Pulvers allein gefunden wird.

Die Ursache dieses Abgangs war nun außer Zweifel die innere Bewegung der Flamme. Denn aus der Entzündung des Pulvers, welches durch einen weit grössern Raum, als dasselbe anzufüllen vermögend war, zerstreuet gewesen, musten nothwendig mancherley verschiedene Stösse und Zurückprallungen der Flamme entstehen; und durch diese innerliche Bewegungen der subtilen flüßigen Materie muste notwendig der Druck auf die innern Wände, und folglich auch auf die Kugel, wie bey allen andern flüßigen Materien in diesem Fall zu geschehen pflegt, sehr merklich vermindert werden. Um nun diese Ungleichheit der Gewalt zu vermeiden, so habe ich nachgehends in allen Experimenten, welche ich gemacht, das Pulver immer so nahe, als möglich gewesen, sorgfältig zusammen gestossen, wenn auch die Kugel in einer kleinen Entfernung von demselben gesetzet worden.

ANMERKUNG

Die Untersuchung, wovon in diesem Satz gehandelt wird, ist eine von den schwehresten Materien, welche immer in der Lehre von der Bewegung flüßiger Körper vorkommen können; und wenn dieser Satz nach aller Schärfe ausgeführet werden sollte, so würden noch zur Zeit weder die bekannten Vortheile der Auflösungskunst, noch die Grundsätze der Wissenschaft selbst, wohin diese Untersuchung gehöret, hinreichend seyn, alle dabey vorkommenden Schwierigkeiten zu überwinden. Es wird nehmlich hier der Fall betrachtet, wenn die Kugel nicht unmittelbar auf das Pulver geladen, sondern ein merklicher Raum zwischen dem Pulver und der Kugel ledig gelassen wird. Wenn nun dieser Raum völlig leer wäre und sich darinne auch so gar keine Luft befände, so würde sich gleich nach der Entzündung die dadurch befreyte zusammen gepreßte Luft nach der im vorigen Satze beschriebenen Art so lange gantz frey ausdehnen, biß die vördersten Theile derselben die Kugel erreichten. Und in

diesem Fall würde es so schwehr nicht seyn, so wohl die Ausdehnungs-Kraft der zusammen gedruckten Luft, in dem Augenblick, da dieselbe auf die Kugel zu würken anfängt, als auch die Geschwindigkeit aller Theile derselben nach den bißher erklärten Regeln zu bestimmen. Und da alsdenn auf die Kugel eine doppelte Gewalt würket, wovon die erste in der Ausdehnungs-Kraft der zusammengedruckten Luft bestehet, und die Kugel so lange fortstößt, biß dieselbe gänzlich zum Lauf hinaus getrieben worden, die andere aber aus der Gewalt des Stoßes entspringt, und gleichsam nur einen Augenblick ihre Kraft auf die Kugel ausübet: so könnte auch noch die Würkung der ersten Kraft nach den hier angeführten Grundsätzen bestimmet werden, wie solches denn auch oben würklich geschehen ist. Allein es finden sich bey Bestimmung der andern Würkung um so viel grössere Schwierigkeiten, welche noch zur Zeit nicht wohl aus dem Wege geräumet werden können. Diese Sache scheinet zwar in die Lehre von der Mittheilung der Bewegung, so durch den Stoß geschieht, zu lauffen, und folglich, da diese Lehre schon genugsam ausgeführt ist, keinen so grossen Hindernissen unterworfen zu seyn; allein da in diesem Falle so wohl die Schwehre, als die Geschwindigkeit des anstossenden Körpers bekannt sein muß, so siehet man leicht, daß in den gegenwärtigen Aufgaben diese beyden Stücke gänzlich ungewiß sind. Denn weil hier die sich ausdehnende Luft den anstossenden Körper ausmacht, so kann weder das ganze Wesen derselben für die Schwehre des anstossenden Körpers, noch die Geschwindigkeit der vordersten Theilchen für die Geschwindigkeit desselben angenommen werden. Um dieses deutlicher zu machen, so darf man nur betrachten, daß, so bald die vordersten Theilchen der zusammen gepreßten Luft auf die Kugel stossen, die hintern nur in so ferne zugleich mit würken, als die Bewegung derselben gehemmet wird. Da nun dieselben ihre Bewegung noch einiger maßen fortsetzen können, so ist es eben so viel, als wenn ein Theil derselben gar nicht zu dem Wesen des anstossenden Körpers gehörte. Wie groß aber dieser Theil sey, ist eben dasjenige, worinn die gröste Schwierigkeit bestehet. Inzwischen scheinet es doch, daß man von der Wahrheit nicht allzusehr abweiche, wenn man die Helfte, oder ein Drittel für diesen gesuchten Theil annimmt. Wenn wir demnach setzen, daß (Fig. 9) die Kugel anfänglich in ZZ gesetzt worden, und die Ladung den Raum AC erfüllet habe, so nenne man $AC = b$, $AZ = f$: so wird das Gewicht der Ladung ungefehr einer natürlichen Luft-Säule gleichen, deren Höhe $= 1000b$; wenn wir nehmlich annehmen, daß das Pulver 1000 mal schwehrer ist, als die Luft, und hiervon wird also die Helfte an die Kugel stossen, deren Gewicht durch eine Luft-Säule, welcher

Höhe $= k$, ausgedrückt worden. Indem sich aber nach der Entzündung die Flamme biß ZZ ausbreitet, so wird dieselbe, wie aus dem vorhergehenden [1]) erhellet, eine Geschwindigkeit bekommen, welche aus der Höhe

$$= \frac{2\alpha}{n(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda}\cdot 244\beta\lambda h\; l\frac{\alpha f-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}$$

herkömmt, wo $\alpha = \frac{3}{2}$, $n = 1000$, $244\beta = 1000$ und λ den entzündeten Theil des Pulvers bedeutet, wofür wir annehmen wollen $\lambda = \frac{9}{10}$; aber h ist die Höhe einer natürlichen Luft-Säule, deren Gewicht der Elasticität der natürlichen Luft gleich ist. Dahero wird die obige Höhe, wodurch die Geschwindigkeit der Flamme in Z ausgedruckt wird, seyn

$$= \frac{90}{31} h l \frac{5f-2b}{3b}$$

und folglich die Geschwindigkeit selbst

$$= \sqrt{\frac{90}{31} h l \frac{5f-2b}{3b}}.$$

Da nun die Kugel anfänglich stille gestanden, so muß man nach den bekannten Regeln diese Vergleichung anstellen: Wie sich verhält die Summa der beyden Körper $500b + k$ zu dem anstossenden $500b$, also verhält sich die Geschwindigkeit des anstossenden Körpers $\sqrt{\frac{90h}{31} l \frac{5f-2b}{3b}}$ zur Geschwindigkeit beyder nach dem Stoß; dahero die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoß seyn wird

$$= \frac{500b}{k+500b}\sqrt{\frac{90h}{31} l \frac{5f-2b}{3b}}.$$

Wenn man von der Materie des Pulvers einen kleineren Theil als die Helfte genommen hätte, so müßte man auch für $500b$ eine kleinere Zahl setzen. Wollen wir dafür $310b$ annehmen, so giebt $k + 310b$ eben denjenigen Nenner $\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b$, welcher oben in der VIIten Anmerkung zum vorigen Satz gefunden worden, und eben diese Uebereinstimmung scheinet auch eine starke Probe zu seyn, dass diese Zahl $310b$ den richtigen Theil an-

1) Nach p. 202, indem man dort $k = 0$ setzt, weil die Pulvergase erst für $x = f$ an die Kugel anstoßen. F. R. S.

zeigt. Demnach bekommen wir für die Höhe, welche die Geschwindigkeit der Kugel ausdrückt, diese Expression:

$$\frac{310\cdot 900 b^2 h}{(k+310b)^2}\, l\, \frac{5f-2b}{3b} = \frac{279\,000 b^2 h}{(k+310\,b)^2}\, l\, \frac{5f-2b}{3b}.$$

Wenn aber die Kugel anfänglich unmittelbar vor das Pulver wäre gesetzt worden, so würde dieselbe, nach dem sie biß in ZZ fortgestossen worden, eine Geschwindigkeit erhalten haben, welche aus dieser Höhe

$$= \frac{900 bh}{k+310b}\, l\, \frac{5f-2b}{3b}$$

entstehet; folglich wird sich diese Geschwindigkeit zu jener verhalten, wie 1 zu $\sqrt{\frac{310b}{k+310b}}$: und also wird die der Kugel durch den Stoß mitgetheilte Geschwindigkeit weit kleiner seyn, als diejenige, welche sie in Z erlangt haben würde, wenn sie unmittelbar vor das Pulver wäre geladen worden. Wenn nun diese durch den Stoß erlangte Geschwindigkeit richtig ist, so wird es leicht seyn, die folgende Vermehrung derselben durch die Ausdehnungskraft zu bestimmen. Wir dürfen zu diesem Ende nur die oben gefundene Aequation nehmen, welche, nachdem man die kleinen Terminos weggelassen, und für die Buchstaben α, λ, β und n die gehörigen Werthe gesetzt, also beschaffen ist

$$v = \frac{900 bh}{k+310b}\, l\, \frac{5x-2b}{3b},$$

und dazu noch eine unveränderliche Quantität setzen, welche so beschaffen seyn muß, daß, wenn man $x = f$ setzt, die Höhe v in

$$\frac{279\,000 bbh}{(k+310b)^2}\, l\, \frac{5f-2b}{3b}$$

verwandelt werde. Es bedeute also v die für die Geschwindigkeit der Kugel gebührende Höhe, nachdem die Kugel biß in MM, da $AM = x$, fortgestossen worden, und da wird man eine solche Aequation haben

$$v = \frac{900 bh}{k+310b}\, l\, \frac{5x-2b}{3b} + C.$$

Um nun die Quantität C zu bestimmen, so setze man

$$x = f \quad \text{und} \quad v = \frac{279\,000 bbh}{(k+310b)^2}\, l\, \frac{5f-2b}{3b},$$

da wird

$$\frac{279000\,bbh}{(k+310\,b)^2}\,l\,\frac{5f-2b}{3b} = \frac{900\,bh}{k+310\,b}\,l\,\frac{5f-2b}{3b} + C$$

und also

$$C = \frac{-900\,bkh}{(k+310\,b)^2}\,l\,\frac{5f-2b}{3b}.$$

Folglich wird man erhalten

$$v = \frac{900\,bh}{k+310\,b}\,l\,\frac{5x-2b}{3b} - \frac{900\,bkh}{(k+310\,b)^2}\,l\,\frac{5f-2b}{3b}.$$

Wenn aber die Kugel in ZZ keinen Stoß bekommen hätte, sondern bloß allein von der Ausdehnungs-Kraft wäre fort getrieben worden, so würde

$$C = \frac{-900\,bh}{k+310\,b}\,l\,\frac{5f-2b}{3b}$$

und also

$$v = \frac{900\,bh}{k+310\,b}\,l\,\frac{5x-2b}{3b} - \frac{900\,bh}{k+310\,b}\,l\,\frac{5f-2b}{3b}.$$

Wenn aber die Kugel anfänglich unmittelbar vor das Pulver wäre geladen worden, so würde heraus kommen

$$v = \frac{900\,bh}{k+310\,b}\,l\,\frac{5x-2b}{3b}.$$

Wenn wir nun für x die Länge des ganzen Laufs a, und für das von dem Autore angeführte Exempel setzen

$$a = 45, \quad b = 2{,}625, \quad f = 11{,}25, \quad k = 4900 \quad \text{und} \quad lh = 7{,}463893,$$

so können wir die dreyerley Geschwindigkeiten folgender Gestalt bestimmen:

$$\frac{900\,b}{k+310\,b} = \frac{236250}{571375}\,{}^{1)}, \quad \frac{900\,bk}{(k+310\,b)^2} = \frac{490000}{571375}\cdot\frac{236250}{571375}\,{}^{2)}$$

oder

1) Im Original $\frac{236350}{561375}$. 2) Im Original $\frac{490000}{571375}\cdot\frac{236260}{571375}$. Berichtigt von F. R. S.

$$\frac{900\,b}{k+310\,b} = 0{,}41348\,^{1})$$

$$\frac{900\,bk}{(k+310\,b)^2} = 0{,}35459$$

und

$$\frac{5x-2b}{3b} = 27{,}905, \quad \frac{5f-2b}{3b} = 6{,}476\,^{2}),$$

folglich

$$l\,27{,}905 = 1{,}445682$$

$$l\,6{,}476 = 0{,}811307\,^{3})$$

$$l\,1{,}445682 = 0{,}160073$$

$$l\,0{,}811307 = 9{,}909185\,^{4}).$$

Man addiere 0,362216[5]), so kommt

$$ll\,\frac{5x-2b}{3b} = 0{,}522289\,^{6})$$

$$ll\,\frac{5f-2b}{3b} = 0{,}271401\,^{7});$$

so bekommt man

$$\frac{900b}{k+310b}\,l\,\frac{5x-2b}{3b} = 1{,}37639$$

$$\frac{900b}{k+310b}\,l\,\frac{5f-2b}{3b} = 0{,}77243\,^{8})$$

$$\frac{900bk}{(k+310\,b)^2}\,l\,\frac{5f-2b}{3b} = 0{,}66242\,^{9}).$$

Wenn also die Kugel anfänglich unmittelbar vor das Pulver geladen wird, so wird $v = 1{,}37639\,h$, und die Geschwindigkeit beträgt in einer Secunde 1582 Schuh. Wird aber die Kugel anfänglich in ZZ gesetzt, und das Pulver durch den Raum AZ also zerstreuet, daß die Kugel keinen Stoß leidet, so wird $v = 0{,}60395\,h$[10]) und diese Geschwindigkeit beträgt 1048[11]) Schuh in einer Secunde. Wenn aber die Kugel in ZZ zugleich den Stoß von dem Pulver erhält, so wird $v = 0{,}71396\,h$[12]) und diese Geschwindigkeit beträgt 1140[13]) Schuh in einer Secunde.

---

1) Im Original 0,41438. 2) Im Original 6,375. 3) Im Original $l\,6{,}375 = 0{,}804470$. 4) Im Original $l\,0{,}80448 = 9{,}905515$. 5) Im Original 0,362215. 6) Im Original 0,522288. 7) Im Original 0,267730. 8) Im Original 0,76592. 9) Im Original 0,65683 10) Im Original 0,61046 h. 11) Im Original 1054. 12) Im Original 0,71955 h. 13) Im Original 1144. Berichtigt von F. R. S.

Es ist aber zu merken, daß die Formul, aus welcher diese Geschwindigkeiten bestimmet worden, etwas zu klein ist, dahero die gefundenen Zahlen noch um etwas vermehret werden müssen. Dem ungeachtet aber ist klar, daß die Geschwindigkeit der Kugel im letzten Fall, da dieselbe anfänglich durch den Stoß des Pulvers in Bewegung gesetzet worden, weit kleiner ist, als die Erfahrung ausgewiesen. Wenn wir aber auf die dabey vorgefallenen Umstände Acht haben, so sieht man leicht, daß sich die subtile Materie bey dem Stoß hinter der Kugel sehr stark müsse gehäuffet, und also eine weit grössere Elasticität bekommen haben, wodurch folglich der Kugel auch ein weit grösserer Grad der Geschwindigkeit eingedruckt worden. Was aber die Aufschwellung und Zersprengung des Laufs anlangt, so ist die Ursache davon leicht einzusehen. Denn da der Kugel gleichsam in einem Augenblick ein ziemlicher Grad der Geschwindigkeit durch den Stoß eingedruckt wird, so ist klar, daß eine druckende Kraft, welche in eben dieser kurzen Zeit der Kugel eben diesen Grad der Geschwindigkeit einzudrücken vermögend wäre, erstaunlich groß seyn müsse; und es dürfte vielleicht eine 10 mahl stärkere Kraft, als die ausdehnende Gewalt des Pulvers allein auf die Kugel auszuüben pflegt, nicht hinlänglich seyn, eine solche Würkung hervorzubringen. Da nun eine Canone oder ein Mußketen-Lauf an einem jeglichen Ort nur so stark gemacht zu werden pflegt, als zu Aushaltung der ordentlichen Ausdehnungs-Kraft des Pulvers erfordert wird, so hat man sich nicht zu verwundern, wenn von diesem grossen Zuwachs der Gewalt ein gewöhnlicher Lauf zerspringet oder auseinander gedehnet wird, wie in dem von dem Autore angeführten Exempel geschehen ist.

Wenn die Kugel diesen Stoß nicht bekommen hätte, so würde dieselbe nach unserer Rechnung eine Geschwindigkeit von 1048[1]) Rheinl. Schuhen in einer Secunde erhalten, welche in Englischen Schuhen 1080[2]) beträgt, und folglich mit 1100, so durch die Experimente heraus gekommen, um so viel mehr genau überein trifft, da die Formul, welche hier gebraucht worden, etwas zu klein ist. Wenn also der Autor für diesen Fall eine Geschwindigkeit von 1200 Schuhen heraus bringt, so muß entweder in seine Rechnung ein Fehler eingeschlichen seyn, oder die Ursache davon steckt, welches wahrscheinlicher ist, in der Unrichtigkeit der Theorie des Autoris selbst; indem er nicht auf die Kraft gesehen, welche zu Forttreibung der Flamme erfordert wird. Da sich nun die Sache also verhält, so fällt auch seine Erklärung, wodurch er

1) Im Original 1054. 2) Im Original 1086. Berichtigt von F. R. S.

die Verminderung der Geschwindigkeit der Kugel in diesem Fall erklären will, weg; als welche außer diesem auch so beschaffen ist, daß daraus die Würkung, welche der Autor angiebt, nicht folgen kann. Denn ungeachtet dieser Satz unstreitig wahr ist, daß die ausdehnende Kraft einer flüßigen elastischen Materie geringer wird, wenn sich darinne eine innerliche Bewegung unter den Theilen derselben befindet, so ist doch leicht zu erachten, daß diese innerliche Bewegung in der Flamme, wenn das Pulver durch den gantzen Raum hinter der Kugel zerstreuet worden, alsobald aufhören müsse, wenn dieselbe auf die Kugel zu würken anfängt.

Wir haben aber in demjenigen, was wir vorher von der Bewegung der Kugel, wenn dieselbe nicht unmittelbar auf das Pulver geladen wird, ausgeführet haben, angenommen, daß der Raum zwischen dem Pulver und der Kugel völlig leer sey. Da sich nun darinn eine natürliche Luft befindet, so entstehet daher in den gemachten Schlüßen eine geringe Veränderung. Denn, so bald sich nach der Entzündung die Flamme auszubreiten anfängt, so wird die zwischen dem Pulver und der Kugel befindliche Luft zusammen gedruckt, und bekommt folglich eine Kraft die Kugel fortzustossen, dergestalt, daß die Kugel würklich in Bewegung gesetzt wird, ehe die Flamme dieselbe unmittelbar erreichet und darauf den Stoß ausübet. Und in diesem Umstande scheinet die Ursache grösten theils zu stecken, daß die Kugel eine schnellere Bewegung erhält, als durch die obige Rechnung gefunden worden.

DREYZEHNTER SATZ

Die verschiedenen Gattungen von Pulver herzuzehlen, und den sichersten Weg anzuzeigen, um die Güte desselben zu erforschen.

Das Pulver, welches wir bißher betrachtet haben, war von derjenigen Art, welches zum Dienst der Regierung bereitet zu werden pflegt. Außer demselben aber giebt es noch mancherley andere Arten, davon einige besser, andere schlechter sind, von welchen ich mir vorgenommen habe einige Nachricht zu ertheilen, in so ferne ich dieselben zu untersuchen im Stande gewesen bin.

Ich muß aber erstlich zum voraus erinnern, daß das Pulver der Regierung, wenn dasselbe wohl zubereitet worden, meines Bedünkens so gut ist, als immer ein Pulver, so zum allgemeinen Gebrauch verfertiget wird, seyn kan. Ich habe dasselbe mit grosser Sorgfalt untersuchet, und mit andern Arten von Pulver, welche hier in Engelland gemacht, und für die besten gehalten werden, dergleichen sind das Bataille-Pulver und andere, in Vergleichung gezogen, und ich konnte keinen merklichen Unterscheid dazwischen wahrnehmen. Ich habe dasselbe auch durch vielerley Versuche mit einem gewißen Spanischen Pulver, so von St. Jago kommt, verglichen. Und ob ich gleich, wenn ich meine Meynung davon sagen soll, das Spanische Pulver besser befunden: so beträgt doch der Unterscheid nur etwa den funfzigsten oder sechzigsten Theil, und ist demnach allzu klein, als daß man davon mit einer völligen Gewißheit versichert seyn könnte. Wenn ich auch andere Experimente gegen die meinigen halte, so finde ich, daß das Französische Pulver sehr wenig von dem unsrigen unterschieden ist: ungeachtet ich hierüber nicht so gewiß seyn kan, als ich wünschte, indem ich nimmer etwas von diesem Pulver habe bekommen können. Ich muß aber hierbey nochmahls wiederholen, daß wenn ich von dem Pulver unserer Regierung spreche, ich solches verstehe, welches nach der verordneten Proportion der Materialien zusammen gesetzt, und wohl durch gearbeitet worden; denn von dieser Art war dasjenige Pulver, dessen ich mich in meinen Versuchen bedienet habe.

Das stärkste Pulver, womit ich jemahls umgegangen, war, wie ich berichtet worden, von einer Art, welche in Holland verfertiget wird. Die Gewalt desselben verhält sich zu der Gewalt des Pulvers unserer Regierung beynahe,

wie 5 zu 4. Allein dieses Pulver ist ohne Zweifel aus den feinsten und auserlesensten Materialien bereitet, und allem Ansehen nach noch mit starkem Spiritu gearbeitet worden, dergestalt, daß wenn dasselbe in grosser Menge gemacht werden sollte, die Unkosten, welche darauf verwandt werden müsten, diesen Zuwachs der Gewalt weit überwägen würden.

Das beste Pulver, welches mir nächst diesem vorgekommen, ist in Portugall unter der Aufsicht eines Holländers gemacht worden, welcher seit einigen Jahren bey Lissabon Pulver-Mühlen aufgerichtet. Dieses Pulver ist zwar etwas schwächer, als das vorhergemeldete Holländische, es kommt aber diesem doch näher, als unserem Regierungs-Pulver.

Das gemeine Kram-Pulver, welches hier in Engelland in allen Gewürtz-Läden verkaufft wird, ist nicht nur viel schlechter, als das Regierungs- und Batallien-Pulver, sondern auch über die maßen verschieden, je nach dem Gutdüncken derjenigen, von welchen dasselbe gemacht wird. Ich habe davon vielerley Arten untersucht, deren Stärke sich zu dem Regierungs-Pulver ungefehr verhalten, wie 2 zu 3; es giebt aber darunter noch andere Gattungen, welche noch schlechter sind. Unter allen verschiedenen Sorten aber ist dasjenige das schlechteste, welches für die Africanische Handlung verfertiget, und insgemein Guinea-Pulver genennet wird. Dergleichen schlechtes Pulver aber ist keiner fleißigen Untersuchung werth, indem bey der Zubereitung desselben keine gewissen und festgesetzten Regeln beobachtet werden.

Dieser Unterscheid nun in der Stärke des Pulvers kan von dreyerley Ursachen herrühren: entweder erstlich von der Beschaffenheit der Materien, aus welchen dasselbe bereitet wird, oder zweytens von der Proportion, welche bey Vermischung desselben beobachtet wird, oder drittens von der Art, wie dasselbe gearbeitet wird.

Das Pulver wird, wie jedermann zur Gnüge bekannt, aus Salpeter, Schwefel und Kohlen zusammen gesetzt. Von diesen Materien sind nun der Schwefel und die Kohlen am wohlfeilsten. Und ob es gleich unter diesen einige Arten giebt, welche vor andern zu diesem Ende tüchtig sind: so trägt doch der Unterscheid, wenn man davon die allerbesten nimmt, in Vergleichung der sämmtlichen Kosten, welche bey Verfertigung des Pulvers aufgehen, so wenig aus, daß es sehr ungereimt seyn würde, wenn man Pulver, welches sonsten gut seyn könnte, durch schlechten Schwefel und Kohlen verderben wolte.

Die theuerste Materie bey Verfertigung des Pulvers ist der Salpeter, und eben deswegen rühren auch die meisten Mängel des Pulvers hiervon her. Es

ist aber der Salpeter nichts anders, als eine durch die Erde aus der Luft getränkte Materie. Denn wenn eine Quantität Erde, aus welcher der Salpeter schon ausgezogen worden, wiederum von neuem der Luft eine Zeitlang ausgesetzet wird, so wird darinn wiedrum Salpeter erzeuget; und dieses geschieht so oft, als man den Versuch auch immer wiederholet.

Der Salpeter ist an sich selbst eine unverbrennliche Materie; denn wenn derselbe in das stärkste Feuer gesetzet wird, so schmeltzet er nur, und entzündet sich nimmer, wofern keine verbrennliche Materie damit vermischet wird. Ob derselbe aber gleich für sich selbst und ohne Vermischung mit andern Materien sich weder entzündet noch brennet, so vermehret derselbe doch, wenn er mit verbrennlichen Materien vermischet wird, die Heftigkeit der Entzündung auf eine gantz erstaunliche Art, und thut in diesem Fall eine weit stärkere Würkung, als die Luft, wenn dieselbe vermittelst etlicher Blase-Bälge mit dem Feuer vermischet wird, immer hervorzubringen vermögend ist.

Da nun das Pulver erstlich aus Schwefel und Kohlen, welches verbrennliche Materien, und denn aus Salpeter, welches eine unverbrennliche Materie ist, bestehet; so ist klar, daß wenn die Quantität des Salpeters in Ansehung der zwey übrigen Materien zu groß genommen wird, alsdenn die Verbrennlichkeit dieser nicht hinlänglich sey, allen Salpeter zu verzehren. Dahero in diesem Fall das Feuer nicht so würksam, und folglich das Pulver, wie in dem 10ten Satz angemerket worden, nicht so stark seyn wird, als wenn man einen Theil des Salpeters davon, und an dessen statt eine gleiche Quantität von den andern Materien hinzu thun sollte. Wenn aber im Gegentheil weniger Salpeter unter das Pulver genommen wird, als die beyden übrigen Materien leicht zu verzehren vermögend sind, so ist das Feuer nicht so heftig, als es seyn solte, indem dasselbe auf keinen so hohen Grad vermehret wird, als geschehen würde, wenn man eine grössere Menge Salpeter zu der Vermischung nehmen sollte.

Hieraus erhellet nun, daß die Güte des Pulvers nicht aus der Menge des damit vermischten Salpeters beurtheilet werden könne, ungeachtet diese Materie der Grund zu seyn scheinet der subtilen elastischen Materie, in welcher die ganze Gewalt bestehet. Denn da sowohl die Verwandlung des Salpeters in diese subtile elastische Materie, als die daher entstehende Ausdehnungs-Kraft einiger maßen auf der Gewalt des Feuers, womit die Entzündung verknüpfet ist, beruhet, so ist klar, daß es eine solche Proportion in der Vermischung dieser Materialien geben müsse, welche zu dem vorgesetzten Endzweck die bequemste ist, und also die beste Art von Pulver hervor bringt.

Wie nun diese Proportion beschaffen seyn müsse, ist durch die Erfahrung ausgemacht worden, und es scheinet anjetzo eine allgemeine Regel zu seyn, daß in einer jeglichen Quantität Pulver drey Viertel davon aus Salpeter, das übrige Viertel aber aus gleichen Theilen Schwefel und Kohlen bestehen müsse. Diese Verhältniß wird nicht nur von den Franzosen, sondern auch von den meisten Völkern in Europa beobachtet; wir hingegen massen uns weit genauere Bestimmungen der zu dieser Vermischung erforderten Theile an, ob dieselben gleich nicht merklich von der gemeldeten verschieden seyn sollen, und ich bin auch nicht versichert, daß dieselben einigen Vorzug verdienen. Zum wenigsten ist so viel gewiß, daß keine von den bißher bey uns in Engelland üblichen Arten das Pulver zu probiren, vermögend ist, den Unterscheid dazwischen anzuzeigen: und andere Arten von Pulver, welche nach den gewöhnlichen Proportionen gemacht werden, geben den unsrigen nicht viel nach.

Um aber gutes Pulver zu machen, so hat man nicht allein nöthig, auf die gehörige Proportion der Materialien zu sehen; sondern die Sache beruhet noch auf einem andern Umstande von nicht geringerer Wichtigkeit, welcher darinne bestehet, daß die Materialien sehr wohl untereinander vermischet werden müssen. Denn, wenn hierinne nicht alle Sorgfalt angewandt wird, so geschieht es, daß einige Theile allzu viel, andere aber allzu wenig Salpeter in sich enthalten; in beyden Fällen aber wird die Gewalt des Pulvers geschwächet.

Da nun die Güte des Pulvers auf so vielerley Umständen beruhet, nehmlich in der Beschaffenheit und Menge der Materien, aus welchen dasselbe zusammen gesetzt wird, und der Art der Vermischung selbst, so ist es ohne Zweifel eine Sache von sehr grosser Wichtigkeit, daß diejenigen, welche das Pulver in die öffentlichen Magazins empfangen, einen sicheren Weg haben, sich von der Güte desselben zu versichern. Die gemeinste Art zu diesem Zwecke zu gelangen, bestehet hier zu Lande, wenn ich recht berichtet worden bin, darinne, daß man einen kleinen Hauffen von dem Pulver, welches probiret werden soll, auf einem reinen Brett anzündet, und so wohl auf die Flamme und den Rauch, so dabey entsteht, als auch auf die Marken, welche auf dem Brett zurück bleiben, wohl Acht giebt: aus welchen lehrreichen Umständen die Güte des Pulvers sehr genau, wie man dafür hält, soll können beurtheilet werden. Allein, ausser dieser so ungewissen Manier, welche, so sehr dieselbe auch im Schwange seyn mag, dennoch kein verständiger, wie ich glaube, im Ernst gut heissen wird, pflegen noch bey besondern Gelegenheiten bißweilen andere Proben angestellt zu werden, welche alle eine genaue Verwandschaft mit den gemeinen Pulver-Proben, welche in den Kramläden feil sind, haben. Nur pflegen dieselben

etwas künstlicher ausgearbeitet zu seyn, und an statt einer Feder ein Gewicht zu bewegen, als welches eine gewissere und gleichförmigere Gewalt ist.

Ob aber gleich diese Maschinen einen grösseren Grad der Vollkommenheit besitzen, als die gemeinen Pulver-Proben, so sind dieselben doch auch sehr grossen Unrichtigkeiten unterworfen. Denn da dieselben nur allein durch die erste Gewalt der Flamme in Bewegung gesetzt werden, und die folgende Ausdehnungskraft darauf weiter keinen Einfluß hat, so können auch dieselben die wahre Kraft des entzündeten Pulvers nicht mit der Gewißheit und Gleichförmigkeit anzeigen, als man von dieser Art Versuchen zu fordern pflegt. Derowegen bin ich genöthiget zu glauben, daß die Art, welche in Frankreich im Gebrauch ist, und nach welcher daselbst das Pulver aus den Pulver-Mühlen in Empfang genommen zu werden pflegt, weit richtiger sey. Man verfährt aber daselbst folgender Gestalt: In einem jeglichen Magazin befindet sich ein kleiner gegossener Mörser, mit dem dazu gehörigen Gestell nach einem bestimmten Modell, welches durch das ganze Königreich einerley ist, festgesetzt. Dieser Mörser ist beständig auf 45^0 gerichtet, und hält accurat drey Unzen Pulver. Hiebey wird nun diese Regel beständig beobachtet, daß kein Pulver in die Magazins angenommen wird, wovon nicht drey Unzen, so in die Kammer des Mörsers geladen werden, eine wichtige Kugel[1]) von $7\frac{1}{2}$ Zoll im Diameter zum wenigsten 55 Französische Faden weit herauswerfen.

Man wendet aber gegen diese Art ein, daß wenn man ein jegliches Faß mit Pulver solchergestalt probiren wollte, die Beschwehrlichkeit, sowohl um den Mörser immer zu laden, als die Kugel zurück zu hohlen, unerträglich, und der Zeit-Verlust so groß seyn würde, daß man mit dergleichen Arbeit nicht wohl zu Ende kommen könnte. Wollte man aber eine grosse Anzahl Fässer auf die mit einigen wenigen angestellte Probe hin annehmen, so würde man Gefahr lauffen, daß sich einige schlechte darunter befänden, und hierdurch könnte öfters ein grosser Unterschleif vorgehen. Hierzu kommt noch eine andere Schwierigkeit, welche von grösserer Wichtigkeit ist, und diese bestehet in der grossen Ungleichheit, welche sich zwischen dem Gewicht der Kugel, und der Menge des Pulvers, womit dieselbe fortgetrieben wird, befindet: dergestalt, daß in diesem Fall das Pulver seine Kraft weit länger ausübet, und sich durch einen weit grösseren Raum ausdehnet, als jemahls bey dem würklichen Gebrauch desselben zu geschehen pflegt. Da nun hierzu einige Zeit erfordert wird, so nimmt inzwischen die Hitze der Flamme merklich ab, und

1) Im englischen Text *a solid ball*, das heißt eine Vollkugel. F. R. S.

ein grosser Theil desselben entwischet durch das Zündloch und den Spielraum der Kugel, dergestalt, daß die Grösse der Bewegung, welche durch die Entzündung des Pulvers in diesem Fall hervorgebracht wird, nur ein wenig mehr, als halb so groß ist, als dieselbe seyn müßte, wenn das Pulver mit seiner vollen Gewalt auf die Kugel würkete, und die gedachten Umstände, wodurch die Gewalt geschwächet wird, nicht vorhanden wären. Da nun um dieser Ursachen willen die forttreibende Gewalt des Pulvers nach keinem beständigen Gesetze vermindert wird, so kann es geschehen, daß nach der Beschaffenheit dieser veränderlichen Umstände, die Kugel auf sehr verschiedene Weiten geworfen wird, und also daraus nichts sicheres auf die Gewalt des Pulvers geschlossen werden kann.

Dieser letzte Einwurf fällt nun gänzlich weg, wenn man sich derjenigen Manier bedienen will, wodurch ich die Stärke aller verschiedenen Arten von Pulver untersuchet habe, welches durch die Bestimmung der würklichen Geschwindigkeit, womit eine Kugel durch die gewöhnliche Ladung heraus getrieben worden, geschieht. Da nun diese Geschwindigkeit, so groß dieselbe auch immer seyn mag, aus der Bewegung, welche dem Pendulo durch den Stoß von der Kugel eingedrücket wird, nach den hier oben ausgeführten Grundsätzen leicht bestimmt werden kann, so scheinet diese Methode eine herrliche Verbesserung der in Frankreich üblichen Manier zu seyn, um dieselbe an statt dieser einzuführen. Ob ich aber gleich versichert bin, daß diese Probe mit dem Pendulo weit richtiger, und nicht so mühsam seyn, dabey auch viel geschwinder von statten gehen würde, so wollte ich doch zum Gebrauch, weil diese Art keine geringe Aufmerksamkeit und Sorgfalt erfordert, und dadurch in der Ausübung, wenn eine grosse Anzahl Fässer ein jedes insbesondere untersucht werden soll, etwas unbequem fallen dürfte, eine andere Art vorschlagen, welche nicht weniger gewiß, und mit solcher Geschwindigkeit ins Werk gerichtet werden kann, daß der gröste Theil der Arbeit bloß allein in der Abwägung der Quantität Pulver, so aus einem jeden Faß genommen werden muß, bestehen sollte. Und auf diese Art würden drey oder vier Menschen vermögend seyn, in einem Morgen biß auf 500 Fässer zu probiren. Ueber dieses könnten die zu diesem Ende erforderten Maschinen aus gegossenem Eisen verfertiget, und wegen des wohlfeilen Preises sehr leicht nach Belieben vermehret werden. Dem sey aber wie ihm wolle, so werde ich vor jetzo die Beschreibung dieser Art das Pulver zu probiren noch zurück halten, und auf eine andere Zeit versparen; inzwischen aber zur Betrachtung des Wiederstands der Luft, welches eine Materie von der grösten Wichtigkeit zur Verbesserung und Erweiterung der Artillerie ist, fortschreiten.

ANMERKUNG

Die Gewalt des Pulvers beruhet, wie aus obigem zur Gnüge erhellet, auf diesen zwey Punckten: erstlich auf der Menge der subtilen elastischen Materie, so mit der Luft einerley zu seyn gewiesen worden, welche aus einer gegebenen Quantität Pulver durch die Entzündung erzeuget wird, und zweytens auf der Plötzlichkeit der Entzündung selbst. Je mehr Luft also in dem Pulver enthalten ist, je grösser ist auch die Dichtigkeit derselben, und folglich wird auch die Ausdehnungs-Kraft, worinne die Gewalt des Pulvers bestehet, um so viel grösser. Hierinne ist auch schon zugleich dasjenige enthalten, was oben von der gröberen Materie der Flamme, welche mit in Bewegung gesetzt werden muß, und weswegen die forttreibende Kraft des Pulvers vermindert wird, angeführet worden. Denn je mehr Luft aus einer gegebenen Quantität Pulver erzeuget wird, je kleiner muß nothwendig der Ueberrest, welcher die gröbere Materie ausmacht, seyn. Dahero hat man von einem solchen Pulver, worinne eine grössere Menge zusammen gedruckter Luft enthalten ist, einen doppelten Vortheil zu gewarten: indem daraus nicht nur eine stärkere Ausdehnungs-Kraft entstehet, sondern auch die Menge der gröberen Materie, welche zugleich in Bewegung gesetzt werden muß, um so viel geringer ist. Hiernechst kommt es aber insonderheit auf die Plötzlichkeit der Entzündung an, als wodurch die eingeschlossene Luft von ihren Banden befreyet, und in Stand gesetzet wird, ihre Kraft auszuüben. Je geschwinder sich also die Entzündung durch das gantze Wesen des Pulvers ausbreitet, je grösser wird auch die Kraft, so daraus entsteht, indem gleich im ersten Augenblick eine grössere Gewalt vorhanden ist, welche auf die Kugel würket, und auch nachgehends darauf zu würken fortfährt. Durch die Plötzlichkeit der Entzündung wird aber auch die ausbreitende Gewalt noch aus einem andern Grunde vermehret; denn je schneller das Pulver Feuer fängt, je grösser ist auch die Hitze, so dabey hervorgebracht wird. Da nun durch die Hitze, wie wir oben gesehen, die Elasticität der Luft sehr merklich vermehret wird, so entspringt daher auch ein sehr grosser Zuwachs in der Gewalt des Pulvers.

Um also von der Stärke einer jeglichen Art von Pulver eine vollkommene Kenntniß zu erlangen, so ist nöthig, daß man erstlich wisse, wie viel Luft in einer gegebenen Quantität Pulver enthalten sey, und denn zweytens, wie viel Zeit vorbey gehe, indem sich die Entzündung durch alles Pulver ausbreite. Das erstere läßt sich nun auf diejenige Art, welche der Autor in den ersten Sätzen

dieses Capitels ausgeführt, durch Versuche bestimmen; über das letztere aber kan man nicht wohl zu einer völligen Gewißheit gelangen, indem die Zeit, in welcher die gänzliche Entzündung geschieht, allzukurz, und auch auf solchen veränderlichen Umständen beruht, daß dieselbe allem Ansehen nach nicht immer einerley seyn wird. Wir wollen demnach dasjenige, was oben über den ersten Punkt durch Versuche ausgemacht worden, zusammen nehmen, und in Erwegung ziehen.

Der Verfasser hat seine Versuche über diejenige Art von Pulver, welche in Engelland zum Dienst der Regierung gemacht zu werden pflegt, angestellt, und die Menge der darinne eingeschlossenen Luft auf eine doppelte Art bestimmt: erstlich in Ansehung des Raums, und zweytens in Ansehung des Gewichts. Durch die erste Art hat er befunden, daß die in einem cubischen Zoll Pulver enthaltene Luft, nachdem sich dieselbe mit der natürlichen Luft auf einerley Grad der Dichtigkeit ausgebreitet, einen Raum von 244 cubischen Zollen auszufüllen vermögend sey. Da nun in einem cubischen Zoll Pulver 244 cubische Zoll natürliche Luft in einem sehr zusammen gepreßten Zustande enthalten, so ist klar, daß wenn in einer Canonen oder in einem Mußketen-Lauf die Länge des Raums AC (Fig. 9), welche mit Pulver angefüllet worden, $= b$ gesetzt wird, die darinne eingeschlossene Luft einem Cylinder von natürlicher Luft gleich sey, dessen Dicke mit der Weite des Laufes CC einerley, die Länge aber $= 244\,b$ ist. Nachdem aber der Verfasser das Gewicht dieser in dem Pulver enthaltenen Luft mit dem ganzen Gewicht des Pulvers verglichen, so hat er befunden, daß sich jenes zu diesem verhalte, wie 3 zu 10. Da nun in dem vorigen Fall das Gewicht der eingeschlossenen Luft dem Gewicht einer Luft-Säule gleich war, deren Höhe $= 244\,b$, so muß das Gewicht der ganzen Ladung von Pulver dem Gewicht einer natürlichen Luft-Säule gleichen, deren Höhe $= \frac{10}{3} \cdot 244\,b = 813\,b$. Folglich sind die gröbern Theile, woraus das Pulver besteht, dem Gewicht nach einer Luft-Säule gleich, deren Höhe $= 569\,b$. Da sich nun diese gröbern Theile bey der Entzündung nicht ausdehnen, wenn wir setzen, daß die Luft in den Pulverkörnern 800 mahl dichter sey, als die natürliche, und folglich anfänglich in dem Raum AC einen Theil eingenommen habe, dessen Länge $= \frac{244}{800} b$, so ist der Ueberrest $= \frac{556}{800} b$, welcher theils von der gröbern Materie der Pulverkörner, theils von der zwischen den Körnern befindlichen Luft eingenommen wird. Wenn wir also setzen, daß die Zwischenräumlein zwischen den Pulver-Körnern den fünften Theil des ganzen Raums austragen, so bleibt für die gröbere Materie des Pulvers allein ein Raum übrig, dessen Länge

$=\frac{396}{800}b$; und so viel Raum muß auch die gröbere Materie des Pulvers nach der Entzündung beständig einnehmen.

Um nun mit dieser Art von Pulver andere Arten zu vergleichen, so laßt uns setzen, daß die in einer andern Art von Pulver enthaltene Luft einer natürlichen Luft-Säule gleich sey, deren Länge $=mb$, wenn nehmlich b die Länge des Raums AC andeutet, und daß die Schwehre des sämtlichen Pulvers einer Luft-Säule gleiche, deren Höhe $=nb$. Wenn wir nun ferner annehmen, daß die in den Poris des Pulvers enthaltene Luft beständig 800 mahl dichter sey, als die natürliche, so muß dieselbe vor der Entzündung einen Raum einnehmen, dessen Länge $=\frac{m}{800}b$: folglich, wenn für die Zwischen-Räumlein wiederum der fünfte Theil angenommen wird, so bleibt für die gröbere Materie ein Raum übrig, dessen Länge $=\frac{640-m}{800}b$. Wenn wir nun wissen wollen, was die verschiedenen Werthe der Buchstaben m und n in der Geschwindigkeit der Kugel austragen können, so dürfen wir nur die Rechnung auf diesen Fall richten. Es sey demnach die Länge des ganzen Laufs $AB=a$; k die Höhe einer Luft-Säule, deren Gewicht dem Gewicht der Kugel gleich ist; und h die Höhe einer Luft-Säule, deren Gewicht der Elasticität der natürlichen Luft gleich ist. Man setze $AM=x$, und nachdem die Kugel von CC schon biß in MM fortgetrieben worden, so sey ihre Geschwindigkeit $=\sqrt{v}$; dergestalt, daß, indem die Kugel durch $Mm=dx$ fortgehet, die Höhe v um dv grösser werde. Um nun diese Vermehrung der Geschwindigkeit in der Kugel hervor zu bringen, so wird dazu eine Gewalt erfordert, welche dem Gewicht einer Luft-Säule, so $=\frac{k\,dv}{dx}$, gleichet. Da ferner die gröberen und subtilen Theile des Pulvers insgesammt ihrer Schwehre nach einer Luft-Säule gleichen, deren Höhe $=nb$, so wird zur Acceleration dieser Materie eine Kraft erfordert $=\frac{nb\,dv}{2\,dx}$, welche Formul Statt findet, die gröbere Materie mag durch den ganzen Raum AM gleich zerstreuet seyn, oder wie wir oben angenommen, die eine Hälfte davon mit der Kugel fortgestossen werden, die andere aber an dem Boden AA zurückbleiben. Wenn also inzwischen nichts von der sämtlichen Materie des Pulvers durch das Zündloch und Spielraum verlohren gegangen, so ist die Kraft, welche zur Acceleration sowohl der Kugel, als des Pulvers selbst erfordert wird,

$$=\left(k+\frac{1}{2}nb\right)\frac{dv}{dx},$$

das Pulver mag sich auf einmal plötzlich entzündet haben, oder nicht.

Wir wollen setzen, das Pulver habe sich anfänglich alles auf einmahl entzündet, so ist daraus ein Cylinder, dessen Höhe $= mb$, Luft entstanden, welche nebst der gröbern Materie im Raum AM enthalten ist. Da nun die gröbere Materie allein davon einen Platz

$$= \frac{640 - m}{800} b$$

einnimmt, so bleibt für die Luft über

$$x - \frac{(640 - m) b}{800}.$$

So vielmahl also diese Grösse $x - \frac{(640 - m) b}{800}$ kleiner ist, als mb, so vielmahl wird die Luft dichter seyn, als die natürliche. Man setze der Kürze halber

$$\frac{800\, mb}{800 x - (640 - m) b} = s,$$

so wird die Dichte der in AM zusammen gedruckten Luft s mahl grösser seyn, als der natürlichen: und folglich ihre Elasticität durch die Höhe einer natürlichen Luft-Säule ausgedruckt werden, deren Höhe

$$= h \left(s + \frac{ss}{6q} \right) = h \left(s + \frac{ss}{4800} \right),$$

wenn wir nehmlich für q, als den höchsten Grad der Dichte der Luft, 800 setzen. Diese Höhe muß aber noch wegen der Erhitzung durch den Buchstaben β multipliciret werden, dessen Werth ungefehr 4 ist. Hieraus entspringt also, wenn der Gegendruck und Wiederstand der äusseren Luft mit in Betrachtung gezogen wird, diese Vergleichung:

$$\left(k + \frac{1}{2} nb \right) \frac{dv}{dx} = \beta h \left(s + \frac{ss}{4800} \right) - h - \frac{1}{2} v,$$

welche, wenn man die kleinsten Terminos wegläßt, diese Integral-Aequation dargiebt:

$$\left(k + \frac{1}{2} nb \right) v = \beta mbh\, l \frac{800 x - 640 b + mb}{160 b + mb}$$

oder

$$v = \frac{\beta mbh}{k + \frac{1}{2} nb}\, l \frac{800 x - 640 b + mb}{160 b + mb}.$$

Hieraus sieht man also, daß die Geschwindigkeit um so viel grösser heraus komme und folglich das Pulver um so viel besser sey, je grösser die Zahl m, und je kleiner die Zahl n ist: das ist, je mehr Luft in einer gegebenen Quantität Pulver eingeschlossen, und je leichter zugleich das Pulver selbst ist. Was zwar den letzteren Umstand betrift, so trägt derselbe sehr wenig aus, und kan gar wohl völlig aus der Acht gelassen werden: weil das Pulver fast alle einerley Schwehre hat, und dieselbe nicht wohl vermindert werden kan. Wenn aber auch eine kleine Verringerung der Schwehre desselben möglich wäre, so würde doch dadurch keine merkliche Vermehrung in der Geschwindigkeit der Kugel entstehen: dahero es hierbey hauptsächlich auf die Größe der Zahl m, wodurch die Menge der in dem Pulver eingeschlossenen Luft angezeigt wird, ankommt. Wenn dahero bey allen Arten von Pulver die sämmtliche Entzündung in einem Augenblick, wie unser Verfasser behaupten will, geschähe. so würde die Güte des Pulvers nicht richtiger, als aus der Größe der Zahl m beurtheilet werden können. Da nun derselbe bey Untersuchung des Regierungs-Pulvers den Werth dieses Buchstabens $m = 244$ befunden, so muß man diejenigen Arten von Pulver, in welchen m noch grösser ist, als 244, für besser, diejenigen aber, wo m einen kleinern Werth hat, für schlechter halten. Hieraus könnte man also den richtigsten Weg, die Güte des Pulvers zu erforschen, herleiten, welcher in Anstellung derjenigen Versuche, welche der Autor zu Bestimmung dieser Zahl m vorgeschlagen, bestehen würde; allein die Probe würde wegen der vielen Umstände, welche dabey in Acht genommen werden müssen, allzu weitläuftig und beschwerlich fallen.

Wenn sich aber alles Pulver auf einmahl entzündete, wie hier mit dem Verfasser angenommen worden, so würde man noch viel leichter zu diesem Zweck gelangen können. Denn in diesem Fall würde es gnug seyn, auf die allererste Würkung, welche das Pulver nach der Entzündung ausübet, allein zu sehen: und zu diesem Ende würde man sich der gemeinen Pulver-Proben, vermittelst welcher die Güte des Pulvers aus der Höhe, worauf ein Gewicht durch die Gewalt des Pulvers getrieben wird, beurtheilt zu werden pflegt, mit dem grösten Vortheil bedienen können. Der Autor setzt auch selbst an dieser gemeinen Art das Pulver zu probiren nichts anders aus, als daß dadurch nur die erste Kraft desselben angezeigt werde. Wenn sich aber, wie der Autor selbst behauptet, alles Pulver auf einmahl entzündet, so beruhet die folgende Ausdehnungs-Kraft einig und allein auf der ersten, dergestalt, daß je grösser oder kleiner diese Kraft in dem ersten Augenblick befunden wird, auch die ganze Gewalt des Pulvers um so viel grösser oder kleiner seyn muß. Wenn dahero der Ver-

fasser diese gemeine Art der Pulver-Proben für unrichtig halten will, so wiederspricht er sich selbst, indem er dabey die plötzliche Entzündung des Pulvers, welche er doch vorher so hartnäckig behauptet, läugnet, oder zum wenigsten in Zweifel zieht. Ungeachtet wir aber in diesem Stücke das Gegentheil behauptet haben, so können wir doch dieser gemeinen Probirungs-Art, wenn die Maschinen mit gehörigem Fleiß verfertiget sind, nicht allen Nutzen absprechen. Denn, wenn sich auch nicht alles Pulver in dem ersten Augenblick auf einmahl entzündet, so beruht doch die ganze Gewalt meistentheils auf der Stärke des ersten Stosses, und wenn die Zeit, welche zur völligen Entzündung gleicher Quantitäten Pulver erfordert wird, einerley ist, so kann auch die ganze Gewalt richtig aus dem ersten Stoß beurtheilet werden. Wenn sich aber hierinne eine Ungleichheit befinden sollte, so müste man die gewöhnlichen Pulver-Proben dergestalt verändern, daß das Pulver einige Zeit auf den Körper, welcher in Bewegung gesetzt werden soll, würken könnte, und eine solche Verbesserung würde allem Ansehen nach nicht schwer ins Werk zu richten seyn.

Vielleicht bestehet auch die neue Manier des Verfassers, das Pulver zu probiren, welche er als ein Geheimniß verschweigt, in nichts anders, als in einer bequemen Verbesserung der gemeinen Pulverproben: und es dürfte ein tüchtiger Künstler dieselben nach einigen Versuchen leicht heraus bringen. Die ganze Sach würde nehmlich nur darauf ankommen, daß man das untere Gefäße, worein das Pulver gethan wird, etwas tiefer machte, und demselben die Gestalt eines kleinen Cylinders gäbe, damit das Pulver nicht die ganze Höhlung desselben ausfüllte. Ferner müste man das Gewicht, welches in die Höhe getrieben werden soll, in Gestalt eines Propfs verfertigen, daß dasselbe mit dem untern Ende genau in den Cylinder hinein paßte, und biß auf das Pulver hinein gesteckt werden könnte. Auf diese Art würde nicht nur die Gewalt des Pulvers im ersten Augenblick auf dieses Gewicht würken, sondern auch so lange fortdauren, biß dasselbe gänzlich aus dem Cylinder heraus getrieben worden. Und da dieses Gewicht in Ansehung der geringen Quantität Pulver, welche zu der Probe gebraucht wird, sehr groß ist, und folglich in keine so schnelle Bewegung gesetzt werden kann: so kann gnug seyn, wenn nur das unterste Ende sehr kurz in Gestalt eines Propfs formirt wird, indem, ehe dasselbe aus dem unteren Cylinder heraus getrieben wird, schon so viel Zeit vorbey geht, daß sich inzwischen alles Pulver, oder doch zum wenigsten nach Proportion so viel, als in Canonen zu geschehen pflegt, entzünden kann.

DAS ZWEYTE CAPITEL

VON DEM WIEDERSTANDE DER LUFT UND DEM WEGE WELCHEN EINE KUGEL ODER BOMBE IN DER LUFT BESCHREIBET

Ehe ich die Ausführung der Materie, wovon in diesem Capitel gehandelt werden soll, mit allem Fleiß unternehme, so wird nöthig seyn zu erinnern, daß fast alle Autores, welche hiervon geschrieben, als eine gewisse und unumstößliche Regel angenommen haben, daß, so lange sich ein Körper in eben derselben flüßigen Materie beweget, der Wiederstand, welchen derselbe antrift, beständig den Quadraten der Geschwindigkeit desselben proportional sey. Das ist, wenn die Geschwindigkeit eben desselben Körpers an einem Ort seines Laufs dreymahl so groß ist, als an einem andern, so müsse der Wiederstand an dem ersten Orte neun mahl grösser seyn, als an dem letztern. Wenn aber die Geschwindigkeit an einem Orte 4 mahl so groß wäre, als an einem andern, so müßte der Wiederstand der grösseren Geschwindigkeit 16 mahl grösser seyn, als der kleinern, und so weiter. Ob nun gleich diese Regel, wenn sie als allgemein angenommen wird, sehr stark von der Wahrheit abweicht, wie im folgenden deutlich dargethan werden soll, so ist dieselbe doch der Wahrheit gänzlich gemäß, wenn sie in gewisse Gränzen eingeschränket wird. Und dahero werden wir uns in unsern künftigen Untersuchungen derselben als einer richtigen Regel bedienen können, wenn der Unterscheid zwischen den verschiedenen Geschwindigkeiten des Cörpers, welcher dem Wiederstande ausgesetzt ist, sehr klein ist. Wenn wir also in dem folgenden sagen werden, daß der Wiederstand der flüßigen Materie je nach der Veränderung der Geschwindigkeit grösser oder kleiner werde, so muß hierunter nicht die Vermehrung oder Verminderung des Wiederstands, welche kraft dieser Regel Platz

findet, verstanden werden; sondern wir wollen alsdenn so viel sagen, daß der Wiederstand des Cörpers grösser oder kleiner sey, als derselbe nach dieser Regel seyn sollte: oder man muß hierunter eine Vermehrung oder Verminderung der wiederstehenden Kraft der flüßigen Materie selbst verstehen, dergleichen verursacht zu werden pflegt, wenn die Dichte derselben flüßigen Materie entweder vermehret oder vermindert wird. Denn die fürnehmste Absicht unsers gegenwärtigen Vorhabens bestehet darinne, daß wir unumstößlich beweisen wollen, daß je nach den verschiedenen Gründen sowohl der Zusammendrückung der flüßigen Materie, als der Geschwindigkeit des darinne bewegten Cörpers, solche Veränderungen in der wiederstehenden Kraft derselben entstehen können, dergleichen nach den insgemein angenommenen Grundsätzen kaum würden hervorgebracht werden können, wenn man auch die Dichte dreymahl grösser annehmen wollte. Und diesen Satz werden wir in der folgenden Abhandlung auf eine solche überzeugende Art behaupten, daß nicht der geringste Zweifel dagegen übrig bleiben soll.

ERSTER SATZ

Die allgemeinen Grundsätze des Wiederstands, welchen flüßige Materien auf harte Cörper, so sich darinne bewegen, ausüben, zu beschreiben und fest zu setzen.

Um sich von dem Wiederstande der flüßigen Materien, welchen die darinne bewegten Cörper leiden, einen deutlichen Begriff zu machen, so ist nöthig, daß man nachfolgende zwey Arten von flüßigen Materien wohl von einander unterscheide. Die erste Art begreifft in sich alle diejenigen flüßigen Materien, welche durch ein aufliegendes Gewicht dergestalt zusammen gedruckt sind, daß dieselben den Raum, welchen ein Cörper darinn verlässt, immer auf das schnellste ausfüllen, und keinen Augenblick leer lassen. Zu der andern Art gehören solche flüßige Materien, welche entweder gar nicht, oder nicht so stark zusammen gedruckt sind, daß der Raum, welchen ein darinne bewegter Cörper hinter sich zurück läßt, nicht einige Zeit solte leer bleiben können. Aus diesem Unterscheid zwischen den flüßigen Materien entstehen nun sehr merkwürdige Veränderungen in den Gesetzen, nach welchen der Wiederstand bestimmet wird; und es ist insonderheit unumgänglich nöthig, daß man den-

selben wohl in Betrachtung ziehe, wenn man die Würkung der Luft auf die Kugeln und Bomben ausfündig machen will. Denn es finden sich in der Luft die beyden vorher gemeldten Eigenschaften, je nachdem sich ein Cörper darinne geschwinder oder langsamer bewegt.

Wenn eine flüßige Materie also beschaffen wäre, daß sich alle Theilchen derselben in einer Entfernung von einander befänden, und keine Würkung auf einander ausübten, so würde man den Wiederstand, welchen ein Cörper in einer solchen flüßigen Materie anträffe, aus der Bewegung, so daher in den Theilchen derselben verursachet wird, leicht ausrechnen können. Denn, wenn sich, zum Exempel, ein Cylinder seiner Länge nach in einer solchen flüßigen Materie bewegte, so würde derselbe die Theilchen, welche er antrift, mit einer gleichen Bewegung gerade vor sich herstossen; wenn man nehmlich annimmt, daß weder der Cylinder, noch die Theilchen der flüßigen Materie, elastisch seyn. Derowegen, wenn sowohl die Geschwindigkeit, als der Diameter des Cylinders, als bekannt angenommen werden, und über dieses auch die Dichtigkeit der flüßigen Materie gegeben wird, so läßt sich daher die Größe der Bewegung, welche den Theilchen dieser flüßigen Materie mitgetheilet wird, bestimmen, welche, da eine jede Würkung der Gegenwürkung gleich ist, dem Verlust, welchen der Cörper inzwischen an seiner Bewegung leidet, gleich seyn muß: und folglich wird auf diese Art die Größe des Wiederstands, welchen ein Cylinder in dieser flüßigen Materie leidet, erkannt werden.

Wenn also die flüßige Materie solcher gestalt beschaffen ist, daß die Theilchen derselben unter sich nicht verbunden, sondern von einander abgesondert sind: so kann ein jegliches Theilchen die Bewegung, so demselben eingedruckt worden, zum wenigsten einige Zeit lang fortsetzen, ohne die übrigen um sich befindlichen Theilchen, in ihrem Zustand zu stören. Dahero, wenn an statt des Cylinders, welcher sich seiner Länge nach in der flüßigen Materie zu bewegen gesetzt worden, ein anderer Cörper angenommen wird, welcher auf die Theilchen dieser flüßigen Materie schief aufstösst, so wird die Richtung, nach welcher diese Theilchen in Bewegung gesetzet werden, mit derjenigen, nach welcher sich der Cörper selbst beweget, nicht einerley seyn, sondern die Direction eines jeglichen Theilchens wird auf die Oberfläche des Cörpers, von welcher dasselbe fortgestossen wird, perpendicular seyn. Und in diesem Fall muß also der Wiederstand des Cörpers nicht aus der gantzen Bewegung, welche den Theilchen der flüßigen Materie mitgetheilet wird, sondern nur aus demjenigen Theil derselben, welcher mit der Bewegung des Cörpers einerley Direction hat, geschätzet werden. In solchen flüßigen Materien also, wo die

Theilchen von einander abgesondert sind, beruhet die Grösse des Wiederstands hauptsächlich auf der Figur und Schiefe des vördersten Theils der Oberfläche des Cörpers, und ist dahero sehr großen Veränderungen, nach der verschiedenen Beschaffenheit dieser Oberfläche, unterworfen; wenn auch gleich der Durchschnitt des Cörpers, so auf seine Direction perpendicular gemacht wird, in allen Fällen einerley ist. Und der Herr Isaac Newton hat ins besondere dargethan, daß, wenn sich eine Kugel in einer solchen flüßigen Materie beweget, der Wiederstand derselben nur halb so groß seyn müsse, als eines Cylinders, welcher mit der Kugel einerley Diameter hat, und sich seiner Länge nach mit einer gleichen Geschwindigkeit in eben derselben flüßigen Materie beweget.[1])

Ob aber gleich die Betrachtung einer solchen flüßigen Materie zur Erklärung der Natur des Wiederstandes sehr nützlich ist, so ist uns doch keine einzige flüßige Materie von dieser Art, welche in der Welt würklich anzutreffen wäre, bekannt. Denn alle flüßige Materien, von welchen wir einige Kenntniß haben, sind so beschaffen, daß ihre Theilchen entweder einander würklich berühren, oder doch zum wenigsten dergestalt auf einander würken, als wenn sie sich in einer solchen Verknüpfung befänden. Bey solchen Umständen kann sich also kein Theilchen, auf welches ein Körper stößt, bewegen, ohne zugleich eine grosse Anzahl anderer Theilchen, deren einige ziemlich davon entfernet sind, in Bewegung zu setzen. Ferner kann auch die Bewegung, welche solchergestalt einem Theil der flüßigen Materie eingedruckt wird, keine bestimmte Direction haben, sondern dieselbe muß in einem jeglichen Theilchen anders beschaffen seyn, je nach der Verschiedenheit der Lage in Ansehung der übrigen Theilchen, von welchen die Bewegung herkömmt. Da sich nun eine grosse Anzahl solcher Theilchen nach sehr verschiedenen Directionen bewegen werden, so wird dadurch die Grösse des Wiederstandes, welchen ein darinne bewegter Körper leidet, und welcher aus der Grösse der der flüßigen Materie eingedruckten Bewegung, nur in so ferne dieselbe mit der Bewegung des Körpers einerley Direction hat, bestimmt werden muß, ganz anders heraus kommen, als in dem vorigen Fall, und die Berechnung des Wiederstands wird folglich auch bey diesen Umständen weit schwehrer und verworrener werden.

Wenn eine flüßige Materie durch das Gewicht der über sich befindlichen Theile zusammen gedruckt ist, in dergleichen Zustande sich alle uns bekannte

1) I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* Editio tertia, Londini 1726, p. 322. F. R. S.

flüssige Materien, nur allein ihre Oberfläche ausgenommen, befinden, und wenn ferner die Geschwindigkeit eines darinne bewegten Körpers kleiner ist, als diejenige, mit welcher die Theilchen der flüßigen Materie kraft ihrer Zusammendrückung in einen leeren Raum hinein zu dringen vermögend sind, so ist klar, daß in diesem Fall immer der Raum, welchen der bewegte Körper hinter sich verläßt, in einem Augenblick von der flüßigen Materie wiederum angefüllet werde, und daß die Theilchen derselben, auf welche der Körper mit seinem vordern Theil stößt, an statt daß dieselben vorwärts getrieben werden sollten, ihre Direction nach und nach verändern, und ihren Weg gegen den hintern Theil des Körpers nehmen, und solchergestalt das Gleichgewicht wiederum herstellen müssen, welches sonsten durch den beständigen Zufluß der flüßigen Materie in die von dem Körper verlassenen Oerter gestöret werden würde. In diesem Fall muß also die vorwärts gerichtete Bewegung der flüßigen Materie, und dahero auch der Wiederstand des Körpers, welcher darauf beruhet, viel kleiner seyn, als in dem erst angeführten Fall, in welchem allen Theilchen der flüßigen Materie eine gleiche Bewegung mit dem Körper selbst, und nach eben derselben Direction eingedruckt worden. Der Herr Isaac Newton hat nun bewiesen, daß der Wiederstand, welchen ein Cylinder, der sich seiner Länge nach in einer zusammen gedruckten flüßigen Materie beweget, dergleichen wir hier zuletzt betrachtet haben, viermal kleiner sey, als der Wiederstand, welchen eben dieser Cylinder leiden würde, wenn sich derselbe mit einer gleichen Geschwindigkeit in einer solchen flüßigen Materie bewegte, dergleichen wir anfänglich beschrieben haben: wenn nehmlich in beyden Fällen die Dichtigkeit der flüßigen Materie gleich groß angenommen wird.[1])

Ueber dieses ist der Wiederstand, welchen ein Körper in dergleichen zwey verschiedenen flüßigen Materien antrift, nicht nur der Grösse nach so sehr unterschieden, sondern es befindet sich auch ein grosser Unterscheid, nachdem die Figur der darinn bewegten Körper verschieden ist.

Wir haben gewiesen, daß in einer flüßigen Materie, deren Theilchen von einander abgesondert sind, dergleichen wir zu erst beschrieben haben, die Schiefe der vordersten Oberfläche des Körpers sehr viel zur Verminderung des Wiederstandes beytrage. Allein in zusammen gedrückten flüßigen Materien

1) I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Editio tertia, Londini 1726, p. 327. F. R. S.

findet diese Regel nicht mehr statt; zum wenigsten entstehet daher kein so beträchtlicher Unterscheid. Denn in zusammen gedrückten flüßigen Materien beruhet die Grösse des Wiederstands hauptsächlich auf der grösseren oder kleineren Leichtigkeit, mit welcher die flüßige Materie, welche durch den vordern Theil des Körpers fortgestossen wird, ihre Bewegung nach dem hintern Theil desselben umlenket. Da nun dieser Umstand, wenn derselbe ja etwas beyträgt, durch die Figur des bewegten Körpers sehr wenig verändert wird, und beynahe einerley bleibt, der Körper mag eine cylindrische, conische, oder Kugel-runde Figur haben, so folgt daraus, daß, woferne nur der Quer-Durchschnitt des Körpers, und folglich die Menge der flüßigen Materie, welche in Bewegung gesetzt werden muß, einerley bleibt, die Verschiedenheit der Figur keine merkliche Veränderung in der Grösse des Wiederstands verursachen könne.

Dieser Wiederstand nun, welchen ein in einer solchen zusammen gepreßten flüßigen Materie bewegter Körper leidet, wenn die Geschwindigkeit desselben viel kleiner ist, als diejenige, welche die Theilchen der flüßigen Materie, kraft ihrer Zusammendrückung, erlangen können; dieser Fall, sage ich, ist von dem Herrn ISAAC NEWTON sehr vollständig ausgeführet worden, als welcher die Grösse dieses Wiederstands nach der verschiedenen Grösse der darinn bewegten Körper, und nach der Dichtigkeit der flüßigen Materie, mit allem Fleiß bestimmet hat. Er erinnert aber dabey ganz ausdrücklich, daß die Regeln, welche er dazu angenommen, nicht allgemein wären, und ohne Einschränkung mit der Wahrheit nicht bestehen könnten: sondern, daß die Zusammendrückung der flüßigen Körper um so viel grösser gesetzt werden müsse, je grösser die Geschwindigkeit der darinn bewegten Körper wäre. Inzwischen haben doch einige unwissende Schriftsteller, welche diesem grossen Mann gefolget, und diese Erinnerung aus der Acht gelassen, seine Bestimmungen ohne Unterscheid auf alle Grade der Geschwindigkeit, welche ein harter Körper in einer flüßigen Materie immer haben kann, gezogen, ohne auf die verschiedenen Grade der Zusammendrückung der flüßigen Materien zu sehen, von welchen der Wiederstand herkommt: und auf diese Art haben sie den Wiederstand der Luft auf Mußketen- und Canonen-Kugeln dreymahl kleiner angegeben, als ich denselben durch die Erfahrung würklich zu seyn befunden habe.*

Es erhellet aber aus allem demjenigen, was bißher gesagt worden, deutlich genug, daß die wiederstehende Kraft einer flüßigen Materie vermehret werden müsse, wenn sich der Körper so geschwind bewegt, daß die flüßige Materie nicht geschwind genug die hinter dem Körper ledig gelassenen Plätze einnehmen, und ihren Druck auf denselben ausüben kann. Denn, wenn dieses

geschieht, so wird der Körper des Drucks von hinten, wodurch sonsten der Wiederstand einiger maassen im Gleichgewicht gehalten wird, beraubet, und er muß auf dem vordern Theil das ganze Gewicht der entgegen druckenden Gewalt noch ausser der Bewegung, welche den Theilen der flüßigen Materie mitgetheilet wird, ertragen. Und weil über dieses die Bewegung dieser Theile, welche vor dem Körper hergetrieben werden, von der zusammendrückenden Kraft der flüßigen Materie in diesem Fall nicht so stark hinterwärts gelenket werden kann, so weicht auch ihre Direction weniger ab von derjenigen, nach welcher sie unmittelbahr von dem Körper fortgestossen werden: und um dieser Ursache willen kommt diese Art des Wiederstands derjenigen, welche wir zuerst betrachtet haben, je länger je näher, wo die Theilchen der flüßigen Materie keine Verbindung untereinander hatten, sondern die ihnen eingedruckte Bewegung ohne Hinderniß fortsetzen könnten. Derohalben, da wir schon vorher angemerket haben, daß der Wiederstand einer solchen nicht zusammen gedrückten flüßigen Materie auf einen Cylinder, so sich seiner Länge nach darinn beweget, viermahl grösser sey, als der Wiederstand einer gleich dichten aber genugsam zusammen gedrückten flüßigen Materie, so folget daraus, daß der Wiederstand einer flüßigen Materie, wenn ein lediger Raum hinter dem Körper gelassen wird, bey nahe viermahl grösser werden könne, als von eben derselben flüßigen Materie entstehen würde, wenn kein solcher lediger Raum hinter dem Körper Statt fände. Denn wenn der Raum, welchen der Körper hinter sich verläßt, nicht sogleich wiederum angefüllt wird, so haben wir gewiesen, daß der Wiederstand fast von eben der Natur seyn müsse, als wenn die Theilchen der flüßigen Materie gänzlich von einander abgesondert wären.

In diesen Umständen scheinet sich nun ein Cylinder zu befinden, welcher sich mit sehr verschiedenen Graden der Geschwindigkeit in einer zusammen gedrückten flüßigen Materie beweget: dergestalt, daß wenn derselbe seine Bewegung mit einer sehr grossen Geschwindigkeit anfängt, und darinne so lange fortläuft, biß seine Geschwindigkeit fast gänzlich zernichtet worden, alsdenn die wiederstehende Kraft der flüßigen Materie bey dem Anfang der Bewegung beynahe viermahl grösser, als bey dem Ende seyn wird. In einer Kugel aber wird der Unterscheid nicht so groß seyn, weil wegen der Schiefe seiner Oberfläche, der Wiederstand in einer nicht zusammen gedrückten flüßigen Materie nur ungefehr zweymahl grösser ist, als in einer hinlänglich zusammen gedrückten; denn die Schiefe seiner Oberfläche vermindert den Wiederstand nur in einem Fall, und nicht in dem andern. Unterdessen da die zusammendrückende Kraft der flüßigen Materie, wenn auch hinter dem Körper ein leerer

Raum zurück bleibt, dennoch die schiefe Bewegung der Theilchen der flüßigen Materie, welche vor dem Körper her gestossen worden, einiger massen zurück lenken kann, und weil sich auch in diesen Theilchen, wenn die flüßige Materie elastisch ist, ein grösserer Grad der Dichtigkeit befindet: so ist sehr wahrscheinlich, daß der Wiederstand einer Kugel, welche sich mit einer sehr grossen Geschwindigkeit in einer zusammen gedrückten flüßigen Materie beweget, ungefehr ein Mittel seyn werde zwischen dem Wiederstand einer Kugel und eines Cylinders in einer nicht zusammen gedrückten flüßigen Materie. Wenn also die Geschwindigkeit groß genug ist, so können wir annehmen, daß die wiederstehende Kraft mehr als zweymahl, und doch weniger als viermahl grösser sey, als wenn sich eben dieselbe Kugel mit einem geringen Grad der Geschwindigkeit in eben derselben flüßigen Materie bewegte. Wir werden dahero vielleicht nicht viel fehlen, wenn wir annehmen, daß eine Kugel, wenn dieselbe mit der grösten Geschwindigkeit bewegt wird, bey nahe, in Ansehung der Geschwindigkeit, einen dreymahl grössern Wiederstand antreffe, als wenn dieselbe langsam fortgehet.

Weil also diese Vermehrung der wiederstehenden Kraft Platz findet, wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers so groß ist, daß derselbe einen vollkommen ledigen Raum hinter sich zurück läßt, so müssen bey kleineren Geschwindigkeiten einige Grade der Vermehrung sehr merklich werden. Denn wenn auch durch die zusammendrückende Kraft der flüßigen Materie der Raum, welchen der Körper hinter sich verläßt, in einem Augenblick aufgefüllet wird, so müssen dennoch, wenn die Geschwindigkeit, womit die flüßige Materie in den von dem Körper verlassenen Raum hinein dringet, nicht viel grösser ist, als diejenige, womit sich der Körper selbst beweget, die obgemeldten Gründe, welche wir auf den Fall eines vollkommen ledigen Raums angeführet haben, noch einiger maßen auch in diesem Fall, obgleich nicht in einem so hohen Grad, statt finden. Und derohalben können wir nicht setzen, daß dieser Zuwachs des Wiederstandes, dessen wir bisher Erwehnung gethan haben, plötzlich verschwinde, so bald die zusammen druckende Kraft der flüßigen Materie just vermögend ist, dem leeren Raum hinter dem bewegten Körper vorzubeugen: sondern wir müssen bedencken, daß in diesem Fall der gedachte Zuwachs nur vermindert werde, je nachdem die Geschwindigkeit, mit welcher die Theile der flüßigen Materie dem Körper nachfolgen, diejenige, womit der Körper fortgehet, mehr oder weniger übertrift.

Hieraus schließen wir nun, daß wenn eine Kugel in einer solchen flüßigen Materie mit einer weit grösseren Geschwindigkeit fortgetrieben wird, als die

Theilchen derselben kraft ihrer Zusammendrückung in einen leeren Raum hineinzudringen vermögend sind, dergestalt, daß hinter der Kugel in ihrer Bewegung nothwendig ein leerer Raum zurück gelaßen wird, daß, sage ich, alsdenn in diesem Fall der Wiederstand, welchen die Kugel antrift, beynahe dreymal grösser in Ansehung ihrer Geschwindigkeit seyn werde, als derselbe nach der von Herrn Isaak Newton für langsame Bewegungen gegebenen Regel gefunden wird. Wir können auch ferner sicher schließen, daß die wiederstehende Kraft der flüßigen Materie mit der Geschwindigkeit des Körpers nach und nach abnehme, biß dieselbe endlich, wenn die Bewegung allbereit so schwach worden, daß dieselbe in Ansehung der Geschwindigkeit, womit die flüßige Materie zu folgen vermögend ist, beynahe für nichts zu achten ist, sich völlig nach des Herrn Isaak Newtons Regel richte, welche er für zusammen gedruckte flüßige Materien gegeben hat.

Aus dieser Bestimmung ersehen wir also, wie sehr sich diejenigen betrügen, welche behaupten, daß der Wiederstand einer jeglichen flüßigen Materie auf alle darinne bewegte Körper allzeit den Quadraten der Geschwindigkeit proportional sey. Denn aus demjenigen, was hier angeführt worden, erhellet klärlich, daß diese Regel nur alsdenn der Wahrheit nahe komme, wenn die Veränderungen in der Geschwindigkeit des Körpers sehr klein sind, und daß dieselbe, ohne sehr gröblich zu fehlen, nimmer gebraucht werden könne, wenn für sehr verschiedene Grade der Geschwindigkeit der Wiederstand bestimmt werden soll.

Nachdem wir nun diese Gründe fest gesetzt haben, so wollen wir jetzt weiter fortschreiten, und den Wiederstand der Luft ins besondere durch Experimente zu bestimmen uns bemühen. Hieraus wird man überführet werden, wie genau diese Betrachtungen mit der vermittelst der Versuche würklich entdeckten Würkung der flüssigen Materien übereinstimmen; und man wird auch daraus erkennen, wie sehr sich alle diejenigen Lehrer[1]) betrogen haben, welche sich eingebildet, daß der Wiederstand der Luft, welchen aller Gattung Kugeln und Bomben darinn antreffen, kaum einiger Aufmerksamkeit werth sey.

1) Im englischen Original *theorists*. F. R. S.

ERSTE ANMERKUNG

Weil ein Körper, welcher sich in einer flüßigen Materie beweget, nicht fortgehen kann, ohne die ihm im Wege stehenden Theilchen derselben Materie in Bewegung zu setzen, so muß dadurch nothwendig die Geschwindigkeit desselben vermindert werden. Denn da keine Bewegung ohne Kraft hervor gebracht werden kann, so wird zu Fortstossung der Theilchen der flüßigen Materie eine Kraft erfordert. Eben diese Kraft würkt aber hinwiederum rückwärts auf den Körper selbst, und vermindert folglich seine Bewegung. Dieses folget auch aus dem bekannten Grundsatz der Mechanic, daß kein Körper einem andern eine Bewegung mittheilen könne, ohne zugleich selbst eben so viel von seiner eigenen Bewegung zu verliehren; und hierauf gründen sich die allgemeinen Regeln, nach welchen die Bewegungen zweyer auf einander stossenden Körper nach dem Stoß verändert werden.

Fragt man aber weiter nach der ersten Ursache dieser Veränderungen, so beruhet dieselbe auf dem Vermögen, welches alle Körper, in so ferne dieselben aus Materie bestehen, haben, in ihrem Zustande unverändert zu verharren. Dieses Vermögen ist nehmlich eine wesentliche Eigenschaft der Materie, und derselben eben so eigen, als die Ausdehnung selbst, dergestalt, daß gleichwie die Materie ohne Ausdehnung nicht bestehen kann, dieselbe eben so wenig ohne dieses Vermögen, in ihrem Zustande unverändert zu verharren, bestehen kann. Dieses Vermögen äußert sich eben so wohl in ruhenden, als bewegten Körpern. Denn ein ruhender Körper muß kraft dieses Vermögens beständig in Ruhe bleiben, und kann nimmer eine Bewegung erhalten, wofern keine äußerliche Kraft dazu kommt, wodurch derselbe in Bewegung gesetzt wird. Gleicher gestalt, wenn sich ein Körper in Bewegung befindet, so muß derselbe beständig eben diese Bewegung unverändert fortsetzen, wofern keine äußerliche Kraft darinne eine Veränderung verursachet. So oft nun entweder ein Körper, welcher vorher stille gestanden, in Bewegung gesetzt wird, oder ein bewegter Körper in seiner Bewegung eine Veränderung leidet: so kann man immer versichert seyn, daß eine äusserliche Kraft darauf gewürket habe.

Es kommen aber bey einer jeglichen Bewegung zwey Stücke zu betrachten vor, nehmlich die Geschwindigkeit, und die Richtung oder Direction derselben, und daher hat auch ein jeglicher Körper kraft seines Wesens das Vermögen, diese beyden Stücke, als wodurch sein Zustand bestimmet wird, unverändert zu erhalten. Wenn also ein Körper einmahl in Bewegung gesetzet worden,

und keine äußerliche Kraft auf denselben würket, so behält derselbe beständig so wohl einerley Geschwindigkeit, als auch einerley Richtung. Wenn man aber wahrnehmen solte, daß entweder die Geschwindigkeit oder die Richtung derselben, oder beide Stücke zugleich geändert würden: so kan man daraus den sichern Schluß ziehen, daß eine solche Veränderung von einer fremden Kraft verursachet worden. Da nun in der Welt alle Augenblicke dergleichen Veränderungen vorgehen, und darinnen weder eine beständige Ruhe, noch eine gleichförmige Bewegung angetroffen wird, so wird hier billig die Frage aufgeworfen, woher alle diejenigen Kräfte kommen, von welchen diese Veränderungen entspringen.

Um diese Frage zu beantworten, haben verschiedene Weltweise behauptet, daß die Körper noch außer dem Vermögen in ihrem Zustande unverändert zu verharren, mit einer Kraft begabet seyn, ihren Zustand immerfort zu verändern. Ausser dem aber, daß auf diese Weise der Materie zwey ganz wiederwärtige Eigenschaften zugeschrieben werden, so wird man dadurch auch nicht einmahl in Stand gesetzt, die geringste Veränderung, welche in der Welt vorgehet, zu erklären. Die Natur hat auch zu diesem Ende keine besondern Kräfte nöthig, sondern wie dieselbe in allen ihren Würkungen beständig den einfältigsten und kürzesten Weg erwehlet, also bedienet sich dieselbe zu Hervorbringung aller Veränderungen keiner andern Kräfte, als eben des vorhergemeldten Vermögens, womit alle Körper begabt sind, in ihrem Zustande zu verharren.

Dieses scheinet zwar dem ersten Anblick nach etwas wiedersprechendes in sich zu enthalten, indem man schwerlich begreifen kan, wie eine Kraft, welche die Körper in ihrem Zustande zu erhalten bestimmet ist, zugleich auch alle Veränderungen hervor bringen könne. Wenn man aber diese Sache in reifere Erwegung zieht, so sieht man bald, daß diese wesentliche Eigenschaft aller Körper, wodurch sie sich in ihrem Zustand zu erhalten bemühet sind, nicht nur vermögend seyn könne, Veränderungen zu verursachen, sondern daß auch in der That alle Veränderungen, welche wir zu erklären im Stande sind, von nichts anders, als dieser allgemeinen Eigenschaft herrühren.

Um diese Würkung begreiflich zu machen, so darf man sich nur zwey Körper vorstellen, deren einer stille steht, der andere aber mit einem gewissen Grad der Geschwindigkeit auf den erstern loßgehet. Wir wollen um der Deutlichkeit willen den erstern Körper, welcher stille steht, mit dem Buchstaben A, den andern aber, welcher gegen diesen läuft, mit dem Buchstaben B bemerken. Der erstere Körper A hat nun ein Vermögen, in seiner Ruhe unverändert zu verbleiben, der andere aber B hat ein

Vermögen, gleichfalls in seinem Zustande zu verharren, das ist, mit seiner Geschwindigkeit nach seiner Richtung oder nach einer geraden Linie fortzugehen. Wenn nun der Körper B würklich zu dem Körper A kömmt, so sieht man wohl, daß keiner von beyden in seinem Zustande verbleiben könne, ohne daß zugleich der Zustand des andern sehr merklich verändert werde. Denn solte der Körper A in seinem Stillstande verharren; weil der andere durch diesen nicht durchdringen kann, so müßte derselbe entweder auch plötzlich stille stehen, oder zurück prellen, oder seitwärts abweichen; in allen Fällen aber würde sein voriger Zustand gar sehr verändert. Solte aber der Körper B seine Bewegung unverändert fortsetzen, so müste derselbe den Körper A vor sich her stossen; und folglich würde der Körper A aus seinem vorigen Zustande gebracht werden. Da es nun nicht möglich ist, daß diese beyden Körper zugleich in ihrem vorigen Zustande verharren, und auch keine Ursache vorhanden ist, warum nur vielmehr in einem, als dem andern allein eine Veränderung vorgehen sollte, so folget nothwendig, daß beyde Körper zugleich eine Veränderung ihres Zustandes leiden müssen. Der Körper A wird nehmlich in Bewegung gesetzt, die Geschwindigkeit aber des Körpers B vermindert werden. Weil nun die Ursache, wodurch ein Körper in seinem Zustand verändert wird, eine Kraft genennet zu werden pflegt, so ist klar, daß die Kräfte, wodurch in dem erzehlten Fall der Zustand beyder Körper A und B verändert wird, in nichts anders bestehen, als in dem Vermögen, welches ein jeder Körper hat, in seinem Zustande zu verharren. Also ist das Vermögen, welches der Körper A hat, in seinem Zustande zu verharren, die Ursache und folglich die Kraft, welche in dem Zustand des Körpers B die Veränderung hervor bringt; und hinwiedrum ist das Vermögen, womit der Körper B begabet ist, in seinem Zustande zu verbleiben, die Ursache und also die Kraft, durch welche in dem Körper A eine Veränderung vorgehet.

So lange also ein Körper seinen Zustand unverändert erhalten, das ist entweder in seinem Ruhestand verbleiben, oder seine Bewegung unverrückt fortsetzen kann, so äußert sich darinne nichts anders, als das Vermögen in seinem Zustande zu verharren; so bald aber dieser Körper einen Wiederstand antrift, welcher verhindert, daß derselbe in seinem Zustand nicht verbleiben kann, so wiederstehet eben dieses Vermögen der Veränderung, so darinne vorgehen soll, und übet eine Kraft aus, die Hindernisse aus dem Weg zu räumen. Es entstehen demnach alle Kräfte, welche sich in der Welt befinden, aus nichts anders, als aus dem Vermögen, womit alle Körper begabet sind, in ihrem Zustand zu verharren, und welches sich in eine Kraft verwandelt, so bald der Zustand zweyer

oder mehrerer Körper dergestalt gegen einander läuft, daß keiner beybehalten werden kann, ohne zugleich die übrigen zu verändern. Weil nun dergleichen Zufälle in der Welt unaufhörlich vorkommen, da entweder auf einen ruhenden Körper andere stossen, oder verschiedene in Bewegung gesetzte Körper einander begegnen, so äussern sich auch beständig solche Kräfte, wodurch der Zustand eines jeglichen Körpers verändert wird. Und hieraus sieht man, daß alle Veränderungen, welche in der Welt geschehen, bloß allein von dem Vermögen, welches alle Körper haben, in ihrem Zustand unverändert zu verharren, hervorgebracht werden können. Wenn man diese Sache genauer untersucht, so wird man in der That finden, daß der Zustand eines jeglichen Körpers nur in so ferne verändert wird, als derselbe andere Körper antrift, welche ihren Zustand nicht erhalten können, ohne daß in demselben eine Veränderung vorgehe. Wie groß nun in einem jeglichen Fall, wenn zwey Körper dergestalt zusammen kommen, daß nicht beyde in ihrem Zustand verbleiben können, die Veränderung sey, welche in einem jeden ins besondere vorgeht, wird in der Mechanic bestimmet.

Auf diesem Grunde beruhet nun die ganze Lehre von dem Wiederstand der Körper, welche sich in einer flüßigen Materie, als Wasser oder Luft, bewegen. Denn wenn ein Körper in einer solchen flüßigen Materie seine Bewegung unverrückt fortsetzte, so müßte nothwendig eine ziemliche Menge Theilchen, woraus die flüßige Materie bestehet, fortgestossen und in Bewegung gebracht werden. Da nun diese Theilchen gleichfalls mit einem Vermögen, in ihrem Zustande zu verharren, begabet sind, so wiederstehen sie einer solchen Aenderung: und dahero muß in dem Zustande der Körper selbst auch eine Veränderung vorgehen, welche um so viel grösser seyn wird, je mehr Theilchen der flüßigen Materie in Bewegung gesetzt werden müssen, und je grösser die Veränderung ist, so darinne vorgehen muß. Wenn also die Veränderung, welche in der flüßigen Materie verursacht wird, bekannt wäre, so könte man nach den Grundsätzen der Mechanic ausrechnen, wie groß die Veränderung, welche in dem Körper selbst vorgeht, seyn müßte. Hierinne besteht nun der Wiederstand, welchen ein bewegter Körper in einer flüßigen Materie leidet, und muß folglich aus den mechanischen Grundsätzen bestimmet werden.

ZWEYTE ANMERKUNG

Der Autor betrachtet erstlich eine solche flüßige Materie, deren Theilchen dergestalt von einander abgesondert sind, daß ein jegliches davon die ihm eingedruckte Bewegung einige Zeit unverändert fortsetzen kann, ohne von den umliegenden darinnen gestöret zu werden. Ob nun gleich dieser Begrif der Natur aller flüßigen Materien entgegen ist, und in der ganzen Welt keine solche Materie gefunden wird, so dienet derselbe doch den Grund zur Erkenntnis des Wiederstandes zu legen. Wenn sich nun ein Körper in einer solchen flüßigen Materie beweget, so stösset derselbe beständig auf neue Theilchen; weil diejenigen, welche schon vorher den Stoß ausgehalten, die ihnen eingedruckte Bewegung fortsetzen, ohne den Zustand der übrigen zu verrücken: und wenn diese flüßige Materie für sich still zu stehen angenommen wird, so befinden sich alle Theilchen derselben, worauf der Körper in einem jeden Augenblick stößt, in einer vollkommenen Ruhe. Die Berechnung des Wiederstands, welchen der Körper in dieser flüßigen Materie leidet, beruhet also darauf, daß man bestimme, wie viel ein Körper in einem jeglichen Augenblick von seiner Bewegung verliere, wenn derselbe beständig auf eine gewisse Anzahl kleiner Theilchen stößt, welche stille stehen, und deren Dichte in Ansehung des Körpers bekannt ist. Dieses läßt sich dahero durch die bekannten Regeln, nach welchen die Bewegung zweyer aneinander stossenden Körper verändert wird, ausmachen, wenn man nur vorher weiß, ob diese Theilchen, nebst dem Körper, elastisch sind, und nach dem Stoß von einander prallen, oder nicht, in welchem Fall dieselben nach dem Stoß beisammen bleiben. Wir wollen hier diese beyden Fälle, als von welchen in dem Wiederstande ein sehr grosser Unterscheid entsteht, ins besondere in Betrachtung ziehen.

Es soll also für das erste keine elastische Kraft vorhanden seyn, dergestalt, daß die Theilchen, welche von dem Körper schon in Bewegung gesetzet worden, vor demselben hergehen, dennoch aber in den übrigen keine Veränderung verursachen. Damit man nun, um sich dieses deutlicher vorzustellen, keine Schwierigkeiten finde, so darf man sich nur einbilden, daß diejenigen Theilchen, welche schon den Stoß vom Körper ausgehalten, plötzlich verschwinden oder zernichtet werden, damit in dem Zustand der übrigen keine Veränderung vorgehe, ehe der Körper gleichfalls an dieselben stößt. Denn weil der ganze Begrif einer solchen flüßigen Materie bloß allein in der Einbildungs-Kraft besteht, so steht es uns frey auch noch diese Bedingung hin-

zusetzen: als wodurch der Endzweck, weswegen man eine solche flüßige Materie betrachtet, um so viel leichter erhalten wird. Wir wollen also setzen (Fig. 11), daß der Vordertheil des Körpers MM, mit welchem derselbe auf

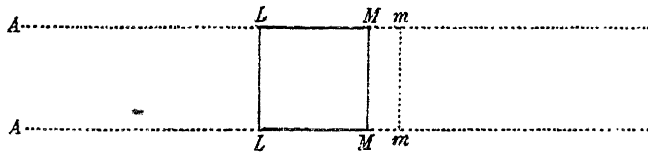


Fig. 11.

die Theilchen der flüßigen Materie stößt, flach, und zugleich auf die Richtung AM, nach welcher der Körper fortgehet, perpendicular sey. Es sey der Innhalt dieser vordern Fläche $MM = cc$, die Länge des Körpers, welcher als ein Cylinder betrachtet werden kan, $LM = a$; und die Geschwindigkeit, womit derselbe anjetzt würklich fortgehet, soll durch $\sqrt{v}$ ausgedruckt werden, oder v bedeutet die Höhe, aus welcher ein fallender Körper eine gleiche Geschwindigkeit erlangt. Die Dichte des Körpers werde ferner durch m, und die Dichte der flüßigen Materie durch n ausgedrückt. Hieraus wird die Massa des Körpers $= macc$. Indem nun der Körper durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortrücket, so muß derselbe die Theilchen der flüßigen Materie, welche in diesem Raum $MmmM$ enthalten sind, fortstossen; und da die Massa dieser Theilchen ist $= nccdx$, so kommt es hier auf die Auflösung dieser Frage an: um wie viel die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ eines Körpers, dessen Massa $= macc$, vermindert werde, wenn derselbe auf einen andern still stehenden Körper, dessen Massa ist $= nccdx$, stößt. Vor dem Stoß ist also die Größe der Bewegung

$$= macc\sqrt{v},$$

und da nach dem Stoß die Geschwindigkeit des Körpers ist

$$\sqrt{(v + dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}},$$

welche derselbe mit den Theilchen der flüßigen Materie $nccdx$, so inzwischen fortgestossen worden, gemein hat, so wird die Grösse der Bewegung beyder Cörper zugleich nach dem Stoß seyn

$$= (macc + nccdx)\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right),$$

welche nach den Gesetzen der Mechanic der vorigen Grösse der Bewegung $macc\sqrt{v}$ gleich seyn muß. Hieraus entspringt also diese Vergleichung

$$macc\sqrt{v} = (macc + nccdx)\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right),$$

welche in diese verwandelt wird:

$$0 = \frac{maccdv}{2\sqrt{v}} + nccdx\sqrt{v},^*$$

woraus man bekommt

$$dv = -\frac{2nccv}{macc}dx.$$

Hieraus erhellet, daß die Bewegung des Körpers eben so vermindert werde, als wenn das Gewicht eines aus der flüßigen Materie bestehenden Cylinders dagegen druckte, dessen Basis oder Dicke $= cc$, und dessen Höhe $= 2v$; denn die Massa, und folglich das Gewicht eines solchen Cylinders, wird seyn $= 2nccv$, und da die Massa des Körpers ist $macc$, so muß die Bewegung desselben, indem derselbe durch den Weg dx fortrücket, um so viel vermindert werden, als diese Aequation

$$dv = -\frac{2nccv}{macc}dx$$

anzeiget, welche mit der obigen vollkommen überein kommt. Wenn sich also ein solcher Körper in einer solchen flüßigen Materie beweget, so ist die Kraft des Wiederstands gleich dem Gewicht eines aus dieser flüßigen Materie bestehenden Cylinders, dessen Basis mit der Oberfläche des Körpers $MM = cc$ einerley, und dessen Höhe gleich ist der doppelten Höhe $2v$, wodurch die Geschwindigkeit des Körpers ausgedruckt wird. Da nun die Höhe v dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so siehet man, daß der Wiederstand einer solchen flüßigen Materie den Quadraten der Geschwindigkeit der darinn bewegten Körper proportional sey; wenn nehmlich die vordere Fläche des Körpers MM perpendicular auf die Theilchen der flüßigen Materie stösset.

Solchergestalt verhält sich also der Wiederstand einer solchen flüßigen Materie, wenn keine Elasticität vorhanden ist, und folglich keine Zurückprallung nach dem Stoß geschieht. Wenn aber so wohl der Körper, als die Theilchen der flüßigen Materie, mit einer vollkommenen Elasticität begabet sind, so muß die im vorigen Fall entstehende Würkung nach den Gesetzen der aneinander stossenden elastischen Körper berechnet werden. In diesem

Fall prellen nun die Theilchen der flüßigen Materie von dem Körper zurück, und bekommen folglich einen grösseren Grad der Geschwindigkeit, als der Körper selbst hat. Dahero sind in diesem Fall zwey Sachen unbekannt, erstlich die Geschwindigkeit des Körpers, und denn auch die Geschwindigkeit der Theilchen der flüßigen Materie nach dem Stoß. Um diese beyden Sachen zu bestimmen, so muß mit dem vorher gebrauchten Grundsatz, kraft welchem einerley Quantität der Bewegung vor und nach dem Stosse erhalten wird, noch dieser andere Grundsatz verknüpfet werden, daß bey vollkommenen elastischen Körpern auch einerley sogenannte lebendige Kraft vor und nach dem Stoß erhalten werde. Die lebendige Kraft eines Körpers aber wird gefunden, wenn man die Massam durch das Quadrat der Geschwindigkeit multipliciret. Wenn wir also, wie vorher, die Geschwindigkeit des Körpers, dessen Massa ist $= macc$, vor dem Stoß durch $\sqrt{v}$, nach dem Stoß aber durch

$$\sqrt{(v+dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

ausdrucken, die Geschwindigkeit der flüßigen Materie hingegen, deren Massa ist $= nccdx$, auf welche der Körper stößt, indem derselbe durch den Raum $Mm = dx$ fortgehet, nach dem Stoß durch $\sqrt{u}$ angezeigt wird, als welche vor dem Stoß $= 0$ gewesen: so wird die Grösse der Bewegung vor dem Stoß seyn

$$= macc\sqrt{v},$$

nach dem Stoß aber

$$= macc\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right) + nccdx\sqrt{u}.$$

Woraus diese Gleichheit nach dem erstern Grund-Satz entspringet:

$$0 = \frac{maccdv}{2\sqrt{v}} + nccdx\sqrt{u}.$$

Die lebendige Kraft vor dem Stoße wird seyn

$$= maccv,$$

nach dem Stoß aber

$$= macc(v+dv) + nccudx,$$

aus deren Vergleichung man erhält

$$0 = maccdv + nccudx.$$

Da nun aus der erstern Aequation gefunden wird

$$\sqrt{u} = \frac{-madv}{2ndx\sqrt{v}}$$

und allso

$$u = \frac{m^2a^2dv^2}{4nndx^2v},$$

die andere Aequation aber giebt

$$u = \frac{-madv}{ndx},$$

so bekommt man

$$\frac{madv}{4nvdx} = -1 \quad \text{oder} \quad dv = \frac{-4nccvdx}{macc}.$$

Dahero ist in diesem Fall der Wiederstand eben so groß, als wenn gegen den Körper das Gewicht eines aus der flüßigen Materie bestehenden Cylinders druckte, dessen Basis der Dicke des Körpers $MM = cc$ gleich ist, und dessen Höhe viermahl so groß, als diejenige v, wodurch die Geschwindigkeit des Körpers ausgedruckt wird. Da nun in dem vorigen Fall die Höhe des entgegen druckenden Cylinders nur $= 2v$ gefunden worden, so siehet man, daß in dem gegenwärtigen Fall wegen der Elasticität der Wiederstand zweymahl so groß sey, als in dem vorigen, wo keine Elasticität vorhanden gewesen. In beyden Fällen aber, wenn sich eben derselbe Körper mit verschiedenen Graden der Geschwindigkeit in eben derselben flüßigen Materie beweget, so ist der Wiederstand immer den Quadraten der Geschwindigkeit proportional. Wenn aber die Dichtigkeit der flüssigen Materie grösser oder kleiner wird: so wird auch der Wiederstand um eben so viel grösser oder kleiner. Weil nun auf diese Art die Veränderung der Geschwindigkeit des Körpers leicht gefunden wird, so kann auch daher die ganze Bewegung desselben, so wie selbige nach und nach abnimmt, ohne Schwierigkeit bestimmet werden.

Wir haben aber hier nur den Fall betrachtet, wenn der vordere Theil des Körpers, welcher auf die Theilchen der flüßigen Materie stoßt, nicht nur eine Fläche, sondern auch auf die Direction der Bewegung perpendicular ist. In diesem Fall ist die Gewalt des Wiederstands der Bewegung des Körpers schnurstracks entgegen, und vermindert folglich nur die Geschwindigkeit derselben, ohne seine Direction zu verändern. Dahero ein solcher Körper seine Bewegung nach einer graden Linie fortsetzt, und sein Zustand nur allein in Ansehung der Geschwindigkeit verändert wird. Es ist also noch übrig, daß

wir den Wiederstand bestimmen, wenn die vordere Fläche des Körpers mit seiner Direction einen schiefen Winkel macht, als woraus nachgehends auch der Wiederstand für alle so wohl gerade, als krummlinichte Figuren, ausgefunden werden kann.

Wir wollen also setzen, die Figur des Körpers sey also beschaffen, wie die Fig. 12 ausweiset, dergestalt, daß der Körper $LLMM$, welcher sich nach

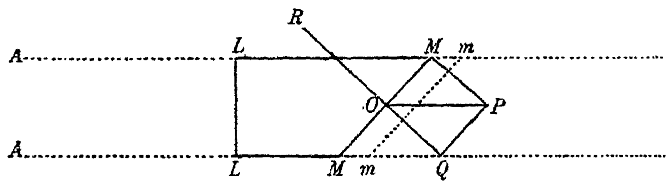


Fig. 12.

der Direction OP in der flüßigen Materie beweget, mit seiner schiefen Fläche MM auf die Theilchen der flüßigen Materie stosse. Indem also dieser Körper durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortgehet, so muß derselbe die in dem Raum $MMmm$ enthaltene flüßige Materie fortstossen. Wenn nun wie vorher die vordere Fläche des Körpers $MM = cc$ gesetzt wird, so ist die Menge der flüßigen Materien nicht mehr wie vorher $= ccdx$: sondern dieselbe muß nach der Verhältniß des Radii zum Sinu des Winkels MOP, unter welchem der Vordertheil des Körpers auf die flüßige Materie stösset, vermindert werden. Wenn also der Radius $= 1$, und der Sinus des Winkels $MOP = q$ gesetzt wird, so wird die Menge der flüßigen Materie, welche in Bewegung gesetzt werden muß, indem der Körper durch den Weg $Mm = dx$ fortrücket, durch $ccqdx$ ausgedrücket, und müßte der vorher gefundene Wiederstand noch mit q multipliciret werden, wenn nehmlich sonsten die Würkung einerley wäre. Allein da der Körper nicht gerade, sondern schief auf diese flüßige Materie stösset, so ist auch der Wiederstand nicht so groß, als in dem vorhergehenden Fall, und muß folglich noch aus diesem Grunde nach den Regeln der Mechanic durch q multipliciret werden. Dahero verhält sich der Wiederstand der Fläche cc, wenn dieselbe perpendicular auf die flüßige Materie stößt, zu dem Wiederstand, wenn eben dieselbe unter einem schiefen Winkel, dessen Sinus $= q$, fortgehet, wie das Quadrat des Radii 1 zum Quadrat des Sinus qq. Da aber ferner die flüßige Materie nur in so fern wiedersteht, als die Bewegung des Körpers gerade auf MM gerichtet ist, so ist die Direction der wiederstehenden Kraft perpendicular auf die Fläche MM. Wenn also die Ge-

schwindigkeit des Körpers durch die Höhe v ausgedruckt wird, so ist die wiederstehende Kraft, deren Direction OR perpendicular ist auf MM, gleich dem Gewicht eines aus eben dieser flüßigen Materie bestehenden Cylinders, dessen Basis $= cc$, und die Höhe entweder $= 2qqv$ oder $= 4qqv$, je nach dem sich der Stoß nach den Regeln der nicht elastischen, oder vollkommen elastischen Körper richtet. Weil nun in dem gegenwärtigen Fall der Körper nach der Linie OR, welche auf die vordere Fläche MM perpendicular ist, zurück gestossen wird, diese Direction aber mit der Direction der Bewegung einen schiefen Winkel macht, so wird dadurch nicht nur die Geschwindigkeit des Körpers vermindert, sondern es wird auch seine Direction verändert. Denn wenn wir diese Kraft, welche entweder durch $2nccqqv$ oder durch $4nccqqv$ ausgedruckt wird, wenn nehmlich wie vorher n die Dichte der flüßigen Materie anzeigt, nach zwey Directionen auflösen, davon eine der Direction der Bewegung gerade entgegen gesetzt, die andere aber auf dieselbe perpendicular ist, so wird die erstere

$$= {}^{2}_{4}\, nccq^3 v,$$

die letztere aber

$$= {}^{2}_{4}\, nccqqv\sqrt{(1 - qq)}.$$

Durch jene wird die Geschwindigkeit des Körpers vermindert, durch diese aber, die Direction der Bewegung verändert. Wir wollen für die zwey Zahlen ${}^{2}_{4}$ den Buchstaben μ setzen, welcher folglich, wenn die Körper keine Elasticität haben, durch 2, wenn aber eine vollkommene Elasticität vorhanden ist, durch 4 ausgedruckt wird, und P soll die Massam, oder das Gewicht des bewegten Körpers anzeigen. Hieraus ist nun klar, daß, indem der Körper durch $Mm = dx$ fortgehet, erstlich seine Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ dergestalt vermindert werde, daß

$$dv = \frac{-\mu nccq^3 v dx}{P}.$$

Hernach wird auch inzwischen die Direction dergestalt verändert werden, daß der Körper nach der Krümmung eines Zirkelbogens fortgehen wird, wovon der Radius

$$= \frac{2P}{\mu nccqq\sqrt{(1 - qq)}}.$$

So bald aber der Körper seine Direction verändert, so wird auch die Schiefe, womit derselbe auf die Theilchen der flüßigen Materie stößt, verändert, und

bekömmt folglich der Sinus q einen anderen Werth. Ueber dieses wird sich auch der Körper selbst umkehren, und also bald mit einem andern Theil seiner Oberfläche an die Theilchen der flüßigen Materie anstossen. Solchergestalt, da der Wiederstand alle Augenblicke verändert wird, so wird der Körper daher auch eine sehr verwirrte Bewegung bekommen.

Aus dem Wiederstand, welchen eine schief bewegte Fläche in einer flüßigen Materie leidet, kann nun der Wiederstand eines jeglichen Körpers, was für eine Figur derselbe immer haben mag, berechnet werden. Allhier sind aber insonderheit die runden Körper, welche sich nach der Direction ihrer Axe bewegen, vor andern merkwürdig, weil in denselben nur allein die Geschwindigkeit vermindert wird, die Direction aber unverändert bleibet. Denn da ein solcher Körper rings herum gleich stark auf alle Seiten getrieben wird, so zernichten sich alle diese Kräfte unter einander, daß daher gar keine Würkung in der Bewegung des Körpers entstehen kann.

Ein runder Körper entstehet nun, wenn eine beliebige Figur um eine Axe herum gedrehet wird. Es sey dahero (Fig. 13) ADB die Figur, aus deren Herumdrehung um die Linie AB der Körper entsteht, dessen Wiederstand wir hier untersuchen wollen, wenn sich derselbe nach der Direction seiner Axe BAE in einer flüßigen Materie bewegt. Man siehet also leicht, daß wenn die Figur ADB ein halber Zirkul ist, der daher entstehende Körper eine Kugel seyn werde. Wir wollen aber erstlich die Rechnung insgemein auf eine jegliche krumme Linie, welche für ADB angenommen werden kan, richten. Vor allen Dingen muß man nun denjenigen Theil des Umfangs, welcher auf die flüßige Materie stößt, von dem übrigen Theil wohl unterscheiden. Dieser Theil des Umfangs, auf welchen der Wiederstand geschieht, entsteht aber aus dem Theil AMD der angenommenen krummen Linie, und erstreckt sich von A bis D, wo sich der Umfang rückwärts zu schwingen anfängt, das ist gemeiniglich, wo die Tangens der Axe AB parallel wird. Man nehme nun nach Belieben eine Perpendicular-Linie MP auf die Axe AB, und setze $AP = x$, $PM = y$; ferner sey mp der vorigen MP unendlich nahe, und zugleich parallel, und ziehe Mn der Axe parallel, so wird

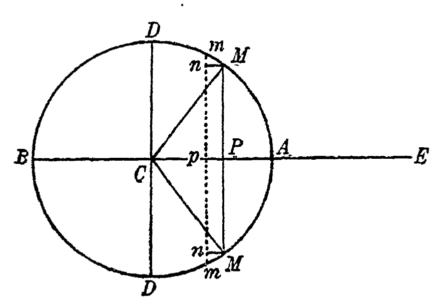


Fig. 13.

$$Pp = Mn = dx, \quad mn = dy \quad \text{und} \quad Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)};$$

man setze aber Kürze halber

$$Mm = ds.$$

Durch die Herumdrehung dieses Linichens Mm um die Axe AB entstehet ein Ring, dessen äussere Fläche seyn wird

$$= 2\pi y ds,$$

wenn $1:\pi$ die Verhältniß andeutet zwischen dem Diameter eines Zirkuls und seinem Umkreiß. Dieser Ring stößt nun allenthalben auf die Theilchen der flüßigen Materie gleich schief auf, nehmlich unter einem Winkel $= mMn$, dessen Sinus folglich ist $= \frac{dy}{ds}$, und Cosinus $= \frac{dx}{ds}$. Wenn also die Geschwindigkeit des Körpers durch $\sqrt{v}$, und die Dichte der flüßigen Materie durch n ausgedruckt wird: so ist der Wiederstand des obgedachten Rings (wenn man nehmlich $2\pi y ds$ für cc und $\frac{dy}{ds}$ für q setzet)

$$= \mu n \cdot 2\pi y ds \cdot \frac{dy^2}{ds^2} \cdot v = \frac{2\mu\pi n v y dy^2}{ds},$$

dessen Direction nach der Linie MC, so auf Mm perpendicular ist, gerichtet ist. Hieraus erwächst also der Wiederstand nach der Direction der Bewegung

$$= \frac{2\mu\pi n v y dy^3}{ds^2};$$

und das Integrale hiervon

$$2\mu\pi n v \int \frac{y dy^3}{ds^2}$$

giebt den ganzen Wiederstand, welchen der Theil des Umfangs, so aus dem Bogen AM erzeuget wird, leidet: und wenn man das Punkt M bis in D fortrücket, so kommt der gesuchte Wiederstand heraus, wodurch die Bewegung des Körpers vermindert wird.

Um nun hieraus den Wiederstand einer Kugel zu finden, so darf man nur für die krumme Linie AMD den vierten Theil eines Zirkuls setzen. Es sey der Radius der Kugel $AC = CD = a$; so wird $CP = \sqrt{(aa - yy)}$ und

$$Mm = ds = \frac{a dy}{\sqrt{(aa - yy)}}.$$

Folglich ist

$$ds^2 = \frac{aady^2}{aa-yy},$$

und der oben gefundene Wiederstand wird

$$= 2\mu\pi nv\int\frac{ydy(aa-yy)}{aa} = 2\mu\pi nv\left(\frac{1}{2}yy - \frac{y^4}{4aa}\right).$$

Man setze nun, um den völligen Wiederstand zu finden, $y = a$, so bekommt man

$$2\mu\pi nv\cdot\frac{1}{4}aa = \frac{1}{2}\mu\pi naav.$$

Nun aber drückt πaa den Inhalt eines grossen Zirkuls dieser Kugel, oder die Dicke derselben aus, für welchen wenn man setzt cc, so kommt der Wiederstand

$$= \frac{1}{2}\mu nccv.$$

Wenn aber ein solcher Zirkul, oder ein gleich dicker Cylinder, sich seiner Länge nach in eben dieser flüßigen Materie bewegte, so würde sein Wiederstand seyn

$$= \mu nccv;$$

woraus erhellet, daß der Wiederstand einer Kugel nur halb so groß ist, als der Wiederstand eines gleich dicken Cylinders, so sich mit einer gleichen Geschwindigkeit in eben derselben flüßigen Materie seiner Länge nach beweget

DRITTE ANMERKUNG

Eine solche flüßige Materie aber, dergleichen wir hier betrachtet haben, findet sich nicht nur nicht in der Welt, sondern ist auch nicht einmahl möglich: dahero auch der Wiederstand, welchen ein Körper in solchen flüßigen Materien, die in der Welt würklich angetroffen werden, findet, anders beschaffen seyn muß, als in der vorigen Anmerkung gefunden worden. Wir wollen unsere Betrachtung hauptsächlich auf die Luft richten, als deren Wiederstand allhier gesuchet wird. Hierbey ist nun vor allen Dingen zu merken, daß die Luft nicht nur eine flüßige Materie ist, sondern sich auch

in einem zusammen gedruckten Zustand befindet, dergestalt, daß ein jeglicher Körper, so mit Luft umgeben ist, rings herum von der Luft zusammen gedruckt wird; weil aber diese zusammendruckende Kraft allenthalben gleich groß ist, so wird der Körper davon nicht in Bewegung gesetzt, wenn derselbe vorher stille gestanden. Wenn aber der Körper schon eine Bewegung hat, so leidet derselbe nicht nur die vorige zusammendruckende Kraft, sondern er ist noch über dieses der Kraft, welche aus dem Stoß desselben auf die Theilchen der Luft entstehet, ausgesetzt. Wenn zwar die vorigen Kräfte sich im Gleichgewicht halten, so kommt die Verminderung der Bewegung gantz allein auf die letztere an; welches geschieht, wenn die Bewegung des Körpers nicht allzu schnell ist. Wenn sich aber der Körper sehr geschwind bewegt, so wird die Luft um denselben in eine merkliche Bewegung gesetzt, wodurch der Druck derselben ziemlich verändert, und rings um den Körper herum nicht mehr einerley ist. In diesem Fall wird also der Zustand des Körpers nicht nur von der wiederstehenden Kraft der Luft, sondern auch von dem ungleichen Druck derselben, verändert. Insonderheit hat man hier auf den hintern Theil des Körpers zu sehen, welcher, so lange der Körper still steht, von dem Druck der Luft so stark vorwärts, als der vordere Theil hinterwärts, gedruckt wird. Wenn sich aber der Körper so geschwind bewegt, daß die Luft demselben nicht einmahl zu folgen vermögend ist, so kann auf den hintern Theil desselben gar kein Druck geschehen: dahero in diesem Fall der Druck von vornen nicht aufgehoben wird, und also den Wiederstand sehr merklich vermehret. Hieraus sieht man also leicht, daß wenn gleich die Geschwindigkeit des Körpers kleiner ist, der Druck von hinten dennoch kleiner seyn müsse, als von vornen: weswegen in diesem Fall die Bewegung des Körpers nicht nur von dem eigentlichen Wiederstand, so von dem Stoß auf die Theilchen der Luft herrühret, vermindert wird, sondern auch von dem Druck der Luft, welchen dieselbe auf das Vordertheil ausübet, in so fern derselbe von dem Gegen-Druck von hinten nicht im Gleichgewicht gehalten wird.

Hernach kommt bey der Luft noch ein besonderer Umstand zu betrachten vor, welcher sich bey dem Wasser und anderen flüßigen Körpern nicht ereignet. Dieser bestehet darinne, daß sich die Luft so wohl in einen kleineren Raum zusammen drucken, als in einen größeren ausdehnen läßt, und dahero in Ansehung ihrer Dichte sehr verschieden seyn kann. Wenn sich also ein Cörper sehr schnell durch die Luft beweget, und dieselbe vor sich her wegstößt, so ist klar, daß die Luft vor dem Körper immer etwas

dichter, hinter demselben aber etwas dünner seyn müsse; und um dieser Ursache willen findet der Körper von vornen so wohl einen stärkern Gegendruck, als auch einen stärkeren Wiederstand: hingegen aber wird der Druck von hinten etwas schwächer. Da nun alle diese Umstände die Geschwindigkeit des Körpers vermindern, und um so viel beträchtlicher werden, je schneller sich der Körper beweget, so wird dadurch die Meynung des Verfassers auf das nachdrücklichste bekräftiget, daß der Wiederstand der Luft auf sehr geschwinde Bewegungen weit grösser sey, als alle bißherigen Theorien anzeigen.

Aus diesem allem erhellet also, daß ein jeder Körper, so sich in der Luft beweget, einer doppelten Kraft ausgesetzt sey, wovon eine aus dem Stoß desselben gegen die Theilchen der Luft entspringet, und den eigentlichen Wiederstand oder die Resistenz ausmachet; die andere Kraft aber kommt von dem ungleichen Druck der Luft auf den Körper her. Ob nun gleich diese beyden Kräfte zusammen in Erwegung gezogen werden müssen, wenn man die Bewegung des Körpers bestimmen will, so muß doch die Grösse einer jeden, da dieselben aus gantz verschiedenen Ursachen herrühren, ins besondere untersuchet werden.

Wir wollen zu diesem Ende erstlich die erstere von diesen beiden Kräften betrachten, welche aus dem Stosse des Körpers auf die Theilchen der Luft entsteht. Aus diesem Grunde leidet der Körper in so fern einen Abgang an seiner Geschwindigkeit, als in den umliegenden Theilen der Luft eine Bewegung hervor gebracht werden muß: denn so viel Kraft zu dieser Bewegung in der Luft erfordert wird, eben so viel Kraft würket hinwiederum auf den Körper zurück. Hier sieht man nun leicht, daß dieser Wiederstand der Luft kleiner seyn müsse, als in beiden Fällen der vorigen Anmerkung. Im letzteren Fall, da die Theilchen der flüßigen Materie zurück springen, war der Wiederstand dem Gewicht eines Cylinders gleich, dessen Höhe $=4v$, im erstern aber, da die Theilchen mit dem Körper einerley Geschwindigkeit bekommen, war der Wiederstand gleich dem Gewichte eines Cylinders, dessen Höhe $=2v$. Wenn aber ein Körper auf die Theilchen der Luft stößt, so springen dieselben weder von dem Körper zurück, noch werden dieselben vor dem Körper her getrieben; sondern sie weichen seitwärts aus, und erhalten keine merkliche Bewegung, wenn sich der Körper nicht sehr schnell bewegt. Weil also den Theilchen der Luft eine weit kleinere Bewegung mitgetheilt wird, als in den beyden vorher erklärten Fällen, so muß auch der Wiederstand kleiner seyn, als ein Cylinder, dessen Höhe entweder $4v$, oder nur $2v$; und um dieser Ursache willen hat man angenommen, daß der Wiederstand

der Luft, welchen eine Fläche $=cc$ leidet, so sich mit einer Geschwindigkeit $=\sqrt{v}$ perpendicular gegen die Luft beweget, dem Gewicht einer Luft-Säule gleiche, deren Basis $=cc$, und deren Höhe $=v$. Man hat auch durch die Erfahrung befunden, daß ein Körper in dem Wasser einen gleichen Wiederstand leide, welcher durch das Gewicht einer Wasser-Säule deren Höhe $=v$, ausgedruckt werde: und da die Theilchen des Wassers und der Luft einem darinn bewegten Körper auf eine gleiche Art ausweichen, so hat man geschlossen, daß der Wiederstand auf eine ähnliche Art in diesen beyden flüßigen Materien beschaffen sey.

Um dieses deutlicher darzuthun, so ist zu merken, daß der Wiederstand, welchen ein Körper, der mit einer gegebenen Geschwindigkeit sich in einer stillstehenden flüßigen Materie beweget, antrift, beständig derjenigen Kraft gleich seyn müsse, welche eben derselbe Körper leiden würde, wenn derselbe stille stünde, hingegen aber die flüßige Materie mit einer gleichen Geschwindigkeit gegen denselben beweget würde. Man stelle sich nun ein Gefäß voll Wasser vor, an dessen Boden ein Loch befindlich, welches mit einem Finger zugehalten wird. In diesem Fall wird der Finger von einer Kraft gedrucket werden, welche dem Gewicht einer Wasser-Säule gleich ist, deren Basis der Weite des Lochs, und deren Höhe der Höhe des Wassers in dem Gefässe gleich ist. Wenn man nun den Finger vor dem Loch etwas zurück ziehet, und das Wasser darauf sprützen läßt, so scheinet der Wahrheit gemäß zu seyn, daß der Finger eine eben so grosse Kraft, als vorhin ausstehen werde. Das Wasser sprützet aber mit einer solchen Geschwindigkeit heraus, welche durch die Höhe desselben in dem Gefäße ausgedruckt wird: und also ist die Kraft des auf den Finger heraus sprützenden Wassers gleich dem Gewichte einer Wasser-Säule, deren Basis gleich dem Loch, und deren Höhe mit der Höhe, wodurch die Geschwindigkeit ausgedruckt wird, einerley ist. Auf diese Art wird also die vorher erwehnte Meynung bekräftiget, daß der Wiederstand so wohl der Luft, als des Wassers, dem Gewicht eines Cylinders gleiche, dessen Höhe der Höhe v, wodurch die Geschwindigkeit ausgedruckt wird, selbst gleich sey.

Um aber dieses aus den vorher fest gesetzten Gründen, nach welchen der Wiederstand derjenigen Kraft gleich seyn muß, welche zur Hervorbringung der in der flüßigen Materie entstehenden Bewegung erfordert wird, deutlicher auszuführen, so wollen wir betrachten, daß ein Körper in CD (Fig. 14) still stehe, und die flüßige Materie auf denselben nach der Direction AB mit einer Geschwindigkeit $=\sqrt{b}$, oder welche durch den Fall aus der Höhe b er-

langt wird, beweget werde. Es ist nun erstlich klar, daß wenn alle Theile der flüßigen Materie ihre Bewegung ungehindert fortsetzen könnten, der Körper keine Kraft empfinden würde. Weil aber alle Theile der flüßigen Materie, so bald sich dieselben dem Körper nahen, genöthiget werden auszuweichen, und so wohl ihre Geschwindigkeit, als ihre Richtung zu verändern, so muß der Körper eine eben so große Kraft empfinden, als zu dieser Veränderung so wohl in der Geschwindigkeit, als der Richtung der Theilchen, erfordert wird. Wir wollen setzen, daß die flüßige Materie, welche bey Aa mit ihrer Geschwindigkeit $= \sqrt{b}$ gegen den Körper beweget wird, genöthiget werde, seitwärts nach $AaMm$ auszuweichen, und wir wollen uns zu diesem Ende einbilden, als wenn dieselbe durch den krummen Canal $AaMm$ fortgienge. In diesem Zustande wird nun nicht nur die Direction derselben beständig verändert, sondern nachdem dieser Canal weiter oder enger wird, so wird auch die Geschwindigkeit grösser oder kleiner. Es sey die erste Weite $Aa = a$, welche als unendlich klein angesehen werden muß, indem man sich für eine jede Reihe einen besonderen Canal vorstellen kann. Ferner sey die Weite $Mm = z$; und die Geschwindigkeit der flüßigen Materie bey Mm sey $= \sqrt{v}$. Da sich nun die Geschwindigkeiten einer durch einen Canal bewegten flüßigen Materie umgekehrt verhalten, wie die Weite des Canals, so ist

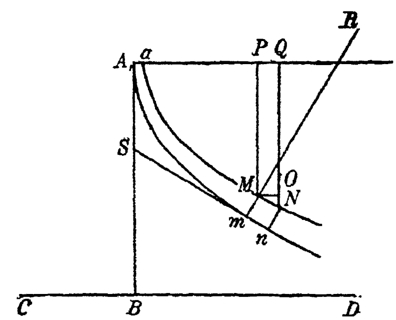


Fig. 14.

$$a : z = \sqrt{v} : \sqrt{b};$$

und folglich

$$z\sqrt{v} = a\sqrt{b}.$$

Man ziehe eine Axe AP perpendicular auf AB, und nenne die Coordinaten $AP = x$, $PM = y$; hernach werde QN mit PM parallel und unendlich nah gezogen; so wird

$$PQ = MO = dx, \quad ON = dy, \quad MN = \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

und das Theilchen der flüßigen Materie $MNnm$ durch

$$z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

ausgedrückt werden. Man setze ferner

$$dy = p\,dx,$$

so wird

$$MN = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1 + pp)},$$

und wenn R für das Centrum der Krümmung des Canals in MN angenommen wird, so bekommt man

$$MR = \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Um nun den Lauf dieses Theilchens $MNnm$ nach dieser Krümmung zu beugen, dazu wird eine Kraft nach der Direction MR erfordert, welche sich verhält zum Gewicht desselben Theilchens, wie

$$2v \quad \text{zu} \quad \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Wenn also das Gewicht dieses Theilchens durch seine Grösse $z\,dx\sqrt{(1+pp)}$ ausgedruckt wird, so ist die Kraft [nach] MR

$$= \frac{-2vz\,dp}{1+pp}.$$

Ferner wenn die Weite des Canals in Mm grösser wird, so nimmt die Geschwindigkeit ab. Hierzu wird eine Kraft nach der Direction mS, welche den Canal in m berührt, erfordert, und wenn diese Kraft $= T$ gesetzt wird, so bekommt man

$$z\,dx\sqrt{(1+pp)}\cdot dv = -T\,dx\sqrt{(1+pp)} \quad \text{oder} \quad T = -z\,dv.$$

Diese zwey Kräfte MR und mS werden also zu Veränderung des Laufs der flüßigen Materie durch den Canal $AaMm$ in einem jeglichen Punkt M erfordert. Dahero, um die sämtliche Kraft zu bekommen, so wollen wir diese beyden Kräfte nach den beständigen Directionen BA und AP auflösen. Die erstere Kraft MR, welche war

$$= \frac{-2vz\,dp}{1+pp}.$$

giebt nach der Direction BA diese Kraft

$$= \frac{-2vz\,dp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}},$$

nach der Direction AP aber diese

$$= \frac{-2vzpdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}.$$

Die andere Kraft mS, welche war

$$= -zdv,$$

giebt nach der Direction BA diese Kraft

$$= \frac{-zpdv}{\sqrt{(1+pp)}},$$

nach der Direction AP aber diese

$$= \frac{zdv}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Für das Theilchen $MNnm$ wird also nach der Direction BA diese Kraft

$$-\frac{2vzdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} - \frac{zpdv}{\sqrt{(1+pp)}},$$

nach der Direction AP aber diese

$$-\frac{2vzpdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{zdv}{\sqrt{(1+pp)}}$$

erfordert. Es ist aber, wie wir vorher gewiesen,

$$z = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{v}};$$

und folglich ist die aus der Bewegung des Theilchens $MNnm$ entstandene Kraft nach der Direction BA

$$= -\frac{2adp\sqrt{bv}}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} - \frac{apdv\sqrt{b}}{\sqrt{v}(1+pp)}.$$

Hiervon ist das Integrale

$$= -\frac{2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{(1+pp)}} + C;$$

und giebt die Kraft nach der Direction BA, welche zur Veränderung der Bewegung aller flüßigen Materie, so in dem Canal $AaMm$ enthalten ist, erfordert wird, wenn nur die Quantität C recht bestimmet wird. Um aber diese Quantität recht zu bestimmen, so ist zu merken, daß, wenn $AP = 0$ genommen wird, in welchem Fall p unendlich groß wird, und $v = b$, die ganze Kraft verschwinden müsse: man setze also $p = \infty$, so wird $C - 2ab = 0$, und folglich $C = 2ab$. Dahero wird zur Veränderung der Bewegung der im Canal $AaMm$ enthaltenen flüßigen Materie eine Kraft nach der Direction BA erfordert, welche ist

$$= 2ab - \frac{2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{(1+pp)}} = 2ab\left(1 - \frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{b(1+pp)}}\right).$$

Es deutet aber $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ den Cosinum des Winkels MNO oder des Winkels mSB an, wenn der Radius durch 1 angedeutet wird: und hieraus wird die obige Kraft

$$= 2ab\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}\cos. mSB\right),$$

und mit eben dieser Kraft wird der Körper CD nach der Direction AB fortgestossen. Es bedeutet aber $2ab$ das Gewicht eines Cylinders flüßiger Materie, dessen Basis ist $= Aa = a$, und dessen Höhe $= 2b$; wenn $\sqrt{b}$ die Geschwindigkeit, womit die flüßige Materie gegen den Körper, oder welches gleich viel ist, womit der Körper gegen die flüßige Materie stößt, anzeigt. Diese Kraft, und folglich der Wiederstand, beruhet also theils auf der Direction Sm, nach welcher die flüßige Materie seitwärts abgelenket wird, theils auch auf der Geschwindigkeit, welche dieselbe nach dem Stoß behält.

Hieraus erhellet, daß wenn die flüßige Materie, um dem Körper auszuweichen, bis auf einen rechten Winkel von ihrer natürlichen Direction AB abgelenket wird, dergestalt, daß der Winkel $mSB = 90^0$ wird, so kommt die gefundene Kraft $= 2ab$: und wenn dieses bey aller flüßigen Materie, welcher der Körper CD im Wege steht, geschieht, so kommt eben der einige Wiederstand heraus, welchen wir in der vorigen Anmerkung im erstern Fall gefunden haben. Eben dieses geschiehet auch, wenn die flüßige Materie alle ihre Bewegung durch den Stoß verlieret. Solte aber die flüßige Materie nach dem Stoß nach der vorigen Direction mit gleicher Geschwindigkeit zurück prellen, so wird der Winkel $mSB = 180^0$, und $\sqrt{v} = \sqrt{b}$: dahero die Gewalt seyn wird $= 4ab$, wie im andern Fall der vorhergehenden Anmerkung gefunden worden.

Wenn man also wissen könnte, auf was Art ein jeglicher Strahl der flüßigen Materie Aa, welcher gegen den Körper CD fährt, sowohl in Ansehung der Geschwindigkeit, als der Direction, dem Körper ausweiche, so könnte man auch hieraus die Kraft bestimmen, welche auf den Körper würkt. Man hat aber zu diesem Ende nicht nöthig, die Weite und die Krümmung des Canals $AaMm$, in welchem sich der Strahl Aa gegen den Körper zu bewegen gesetzt worden, allenthalben zu wissen; sondern es ist genug, wenn diese Sachen in dem letzten Punkt des Canals bekannt sind: indem die aus dem Stück $AaMm$ entstehende Kraft nach der Direction AB durch diese Formul

$$2ab\left(1-\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}\cos.mSB\right),$$

oder da

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{a}{z},$$

durch diese

$$2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.mSB\right)$$

ausgedruckt wird, allwo z die Weite des Canals im letzten Punkt M andeutet, und der Winkel mSB durch die Lage des letzten Stückleins $MNnm$ bestimmt wird. Hier kömmt es also nur darauf an, wo das Ende des Canals angenommen werden soll. Geht man so weit, biß die flüßige Materie um den Körper völlig vorbey geflossen, und ihren vorigen Lauf wiederum erlanget hat, so wird $z=a$, und der Winkel mSB verschwindet, dahero der Cosinus desselben $=1$ wird. In diesem Fall würde also die auf den Körper nach der Direction AB würkende Kraft

$$=2ab(1-1)=0,$$

und der Körper litte gar keinen Wiederstand; woraus erhellet, daß man für Wasser und Luft nicht denjenigen Punkt des Canals, wo die Bewegung hinter dem Körper mit der ersten wiederum völlig übereinkommt, für den letzten annehmen könne. Um nun hiervon die Ursache zu untersuchen, so dürfen wir nur den Ursprung dieser Kraft, welche auf den Körper würket, genauer betrachten. Wenn wir nur auf den Theil des Canals $AaMm$ Acht haben, so ist die Kraft, welche daraus auf den Körper nach der Direction AB entspringet,

$$=2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.mSB\right),$$

und diese wird folglich immer grösser, so lang der Winkel mSB grösser wird, je weiter man von dem Anfang Aa fortgehet. Das ist, so lange sich dieser Canal von dem Körper abwärts krümmet, so lange nimmt die daher entstehende Kraft, welche den Körper nach der Direction AB fortstösset, zu. Wenn aber dieser Canal, wie in Fig. 15, seine Krümmung umschwinget, und von M biß D gegen den Körper zu wendet, so nimmt von M biß D der Winkel MSB immer ab, und hierdurch wird die Kraft wiederum vermindert; dergestalt, daß wenn der Canal in Dd mit Aa parallel läuft, und auch daselbst gleich weit ist, die ganze Kraft zernichtet wird. Wenn nun der Canal eine solche Figur hat, so muß man denselben nach seinen beyden Theilen AM und MD ins besondere betrachten, wovon jener AM seine Krümmung von dem Körper BD abwärts, dieser aber MD gegen den Körper zugekehret hat. Aus dem ersteren Theil AM entstehet eine Kraft, welche den Körper nach der Direction AB fortstößt, und durch $2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.MSB\right)$ ausgedruckt wird. Aus dem andern Theil DM aber entstehet eine Kraft, welche jener entgegen ist, und von welcher der Körper nach der Direction BA zurück gezogen werden sollte. Da nun kein Körper anders, als durch einen würklichen Druck in Bewegung gesetzt werden kann, so kann auch diese letztere Kraft nur in so ferne auf den Körper würken, als der Druck der flüßigen Materie von hinten stark genug ist, den Körper vorwärts zu stossen. Da nun in Luft und Wasser der Druck von vornen nicht nur dem Druck von hinten gleich, sondern noch gemeiniglich grösser ist, so sieht man wohl, daß die aus dem Theil des Canals MD entstehende Kraft auf den Körper gar keine oder zum wenigsten nur eine sehr geringe Würkung haben könne. Und also wird die aus dem ganzen Canal AMD entstehende Kraft, welche auf den Körper in der That würket, beynahe derjenigen gleich seyn, welche aus dem Theil AM entspringt, und folglich durch $2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.MSB\right)$ ausgedruckt werden. Man siehet aber hieraus auch zugleich, daß wenn eine flüßige Materie also beschaffen wäre, daß die aus dem Theil MD entstehende und den Körper zurück ziehende Kraft, ihre völlige Würkung ausüben könnte, der Körper von dem Anstosse einer solchen flüßigen Materie ganz und gar keine Gewalt ausstehen, und folglich auch keinen Wiederstand in derselben antreffen würde. Dieser Fall könnte Platz finden, wenn die flüßige Materie unendlich flüßig, und zugleich von einer unendlichen Kraft zusammen gedruckt wäre. Viel-

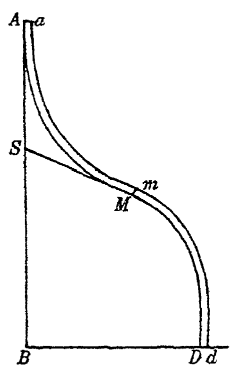


Fig. 15.

leicht ist die subtile Himmels-Materie, in welcher sich die Planeten und Cometen bewegen, von einer solchen Eigenschaft, und dahero dieses die Ursache, daß man in diesen Körpern keinen Abgang in ihrer Bewegung verspühren kann. Daß aber diese Eigenschaft in der Luft, dem Wasser und andern bekannten flüßigen Materien, nicht stattfinde, bezeuget der sehr beträchtliche Wiederstand derselben: und da dieselben wegen ihrer gegen den Körper gewandten Krümmung MD denselben an sich zu ziehen nicht vermögend sind, so übet die aus der wiederwärtigen Krümmung AM entstehende Kraft ihre völlige Würkung aus, und eben daher entspringt auch der grosse Wiederstand derselben.

Um nun von der Grösse dieses Wiederstands gründlicher urtheilen zu können, so wollen wir einen Cylinder betrachten, auf welchen eine solche flüßige Materie mit einer gegebenen Geschwindigkeit fliesset. Es sey dahero (Fig. 16) $OP\alpha Q$ die Helfte dieses Cylinders, und AOQ die Axe desselben; weil, was von einer Helfte gesagt wird, zugleich auch von der andern gilt. Man stelle sich diesen Cylinder in einem Canal eingeschlossen vor, dessen halbe Weite durch AH angedeutet wird, und durch diesen Canal soll Luft oder Wasser mit einer gegebenen Geschwindigkeit gegen den Körper zufliessen. Man zertheile in Gedanken diese zufliessende Materie in unendlich viel kleine Strahlen AB, BC, CD, DE etc. und erwege, was ein jeglicher derselben für einen Weg um den Körper nehmen werde; so wird man leicht sehen, daß sich dieselben ungefehr, wie die Figur anzeiget, krümmen müssen. Ferner bemerke man in denselben die Punkte a, b, c, d, e, f etc., wo sich dieselben wiederum gegen den Körper zu krümmen anfangen, und berechne die Kräfte nach der Direction AO, welche aus der Krümmung dieser Strahlen, bis zu den Punkten a, b, c, d, e etc. entspringen; so werden alle diese Kräfte zusammen genommen, den Wiederstand geben. Man siehet aber leicht, daß sich der erste Strahl $ABab$ bis auf einen rechten Winkel beugen müsse, und dahero wird der daraus entstehende Wiederstand seyn $= 2ab$, wenn nehmlich a die Dicke des Strahls AB, und b die Höhe, woraus die Geschwindigkeit desselben erzeuget wird, andeutet. Der folgende Strahl $BCbc$ leidet schon keine so grosse Beugung, und folglich entsteht daraus eine kleinere Kraft: und solchergestalt werden die aus den nachfolgenden Strahlen

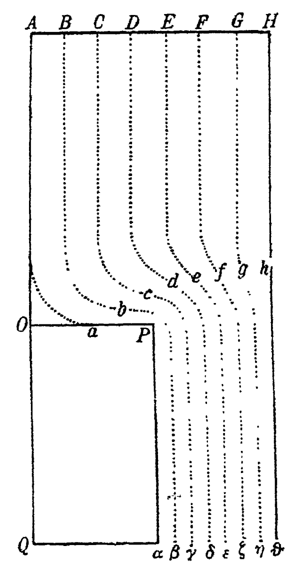


Fig. 16.

CD, *DE*, *EF* etc. entstehenden Kräfte immer kleiner, und zuletzt gar nicht mehr merklich. Woraus erhellet, daß der sämtliche Wiederstand weit kleiner seyn müsse, als das Gewicht eines Cylinders flüßiger Materie, dessen Weite mit dem Körper einerley, und dessen Höhe der doppelten Höhe *b*, wodurch die Geschwindigkeit ausgedruckt wird, gleich ist.

Was hier von einem Cylinder, oder einem solchen Körper, dessen Vorder-Theil flach ist, und gerade auf die flüßige Materie stößt, gesagt worden, läßt sich leicht auch auf andere Figuren ziehen. Man sieht aber alsobald, daß wenn der Vorder-Theil des Körpers nicht flach, sondern entweder erhaben, oder gar zugespitzt ist, der Wiederstand kleiner seyn müsse, als in dem vorigen Fall. Denn da wird nicht einmahl der erste Strahl *AB* bis auf einen rechten Winkel gebogen, und die Beugung der folgenden wird noch geringer, als vorher. Dahero wir in diesem Stück dem Autori nicht beypflichten können, wenn er sagt, daß in solchen zusammen gedrückten flüßigen Materien der Wiederstand nicht von der Figur des Körpers, sondern nur von der Dicke desselben, abhange. Um dieser Ursache willen, ist es sehr wahrscheinlich, daß der Wiederstand, welchen Körper von verschiedenen Figuren auch in zusammen gedrückten flüßigen Materien leiden, nach eben der Regel, welche vorher ist gegeben worden, bestimmet werden könne: und daß der Unterscheid nur darinne bestehe, daß in dem gegenwärtigen Fall der Wiederstand viel kleiner sey, als in dem vorigen. Man hat auch Ursache zu vermuten, daß der Wiederstand einer Kugel in diesem Fall nur halb so groß sey, als eines gleich dicken Cylinders. Man ist aber im Stande, die meisten über den Wiederstand sowohl der Luft, als des Wassers, angestellten Experimente zu erklären, wenn man annimmt, daß der Wiederstand eines Cylinders, so sich seiner Länge nach beweget, gleich sey dem Gewicht eines gleich dicken und aus der flüßigen Materie bestehenden Cylinders, dessen Höhe gleich ist derjenigen, wodurch die Geschwindigkeit ausgedruckt wird.

VIERTE ANMERKUNG

Dieses muß aber nur von demjenigen Theil des Wiederstandes verstanden werden, welcher aus dem würklichen Anstoß des Körpers an die Theilchen der flüßigen Materie entspringt, und von welchem bisher allein die Rede gewesen. Es kann aber, wie schon bemerket worden, dieser Wiederstand noch durch einen besondern Zufall vermehret werden, wenn nehmlich der Körper

von vorne stärker von der flüßigen Materie gedruckt wird, als von hinten. So lange aber der Druck rings um den Körper herum gleich groß ist, wie bey allen nicht allzuschnellen Bewegungen geschieht, so leidet der Körper keinen andern Wiederstand, als welcher von dem würklichen Stoß des Körpers gegen die Theilchen der flüßigen Materie entstehet, und vorher bestimmt worden ist. Wenn sich aber der Körper zum Exempel in der Luft so geschwind bewegt, daß dieselbe nicht vermögend ist zu folgen, und die von dem Körper verlassenen Plätze gleich wieder einzunehmen, so wird der Körper von hinten gantz und gar nicht gedruckt, und folglich der Druck von vorne dadurch nicht aufgehoben; dahero denn der vorige Wiederstand noch mit dem Druck von vorne vermehret werden muß.

Es kömmt also hier darauf an, wie geschwind die Luft einem Körper nachfolgen könne, oder mit was für einem Grad der Geschwindigkeit die Luft in einen Luft-leeren Raum hineindringe. Diese Geschwindigkeit beruht auf der Elasticität der Luft, welche wir oben durch das Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe $= 29100$ Rheinländische Schuh, ausgedruckt haben; folglich dringt die Luft in einen Luft-leeren Raum mit einer Geschwindigkeit, welche ein fallender Körper aus der Höhe von 29100 Schuhen erlangt, und also in einer Secunde 1348 Schuh beträgt. Wenn sich dahero ein Cylinder seiner Länge nach mit einer Geschwindigkeit von 1348 Schuhen in einer Secunde bewegt, so kann demselben die Luft just nachfolgen, daß kein Raum hinter demselben ledig gelassen wird. In diesem Fall übet aber die Luft von hinten auf den Cylinder gar keinen Druck aus. Da nun derselbe von vorne erstlich den Wiederstand, welcher dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule, deren Höhe $= 29100$, als wodurch die Geschwindigkeit desselben ausgedruckt wird, gleich ist, und noch ausser dem den Gegendruck der Atmosphäre, welcher eben so groß ist, zu überwinden hat, so ist die sämtliche Resistenz zweymahl so groß, als der Wiederstand allein, welcher aus dem Anstoß dieses Körpers an die Lufttheilchen entstehet. Solte sich aber der Cylinder mit einer noch grössern Geschwindigkeit bewegen, so würde derselbe von hinten nicht nur gleichfals keinen Druck empfinden, sondern es würde so gar immer hinter demselben ein Luft-leerer Raum bleiben. Wenn man also die obige Höhe von 29100 Schuhen, wodurch die Geschwindigkeit der nachfolgenden Luft ausgedrückt wird, durch h, und die Höhe der würklichen Geschwindigkeit des Cylinders durch v andeutet, dergestalt daß v grösser ist als h, so ist der Wiederstand dem Gewicht einer Luft-Säule gleich, deren Höhe $= v$, wie vorher angezeiget worden; der Gegendruck aber ist einer Luft-

Säule gleich, deren Höhe $= h$. Da nun dieser Cylinder von hinten gar keinen Druck empfindet, so ist der völlige Wiederstand gleich einer Luft-Säule, deren Höhe $= h + v$; dahingegen, wenn dieser Körper von vorne und von hinten gleich starck gedrückt würde, der Wiederstand nur durch die Höhe v ausgedrückt werden würde. Dahero in diesem Fall, wie der Autor angemerket, die Resistenz weit grösser ist, als nach den gemeinen Regeln gefunden wird.

Wenn aber die Geschwindigkeit des Cylinders kleiner ist, als die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft nachzufolgen vermögend ist, das ist, wenn v kleiner als h, so wird derselbe von hinten noch einen Druck empfinden, welcher um so viel grösser seyn wird, je kleiner die Höhe v ist, als h. Um diesen Druck zu finden, so kann man die Geschwindigkeit betrachten, mit welcher die nachfolgende Luft den Körper einhohlet, und welche gleich ist dem Unterscheid zwischen der Geschwindigkeit der Luft $\sqrt{h}$, und des Körpers $\sqrt{v}$. Es ist also eben so viel, als wenn die Luft von hinten auf den Cörper mit einer Geschwindigkeit

$$\sqrt{h} - \sqrt{v}$$

stiesse: und da die Höhe, aus welcher diese Geschwindigkeit erzeuget wird, ist $= h - 2\sqrt{hv} + v$, so scheinet auch der Druck von hinten dem Gewicht einer Luft-Säule gleich zu seyn, deren Höhe

$$= h - 2\sqrt{hv} + v.$$

Von vorne wird aber dieser Körper, wie vorher zurück getrieben, mit einer Kraft, welche dem Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe $= h + v$, gleich ist. Wenn wir also hiervon die forttreibende Kraft, welche der Körper von hinten empfindet, abziehen, so bleibt für den Wiederstand das Gewicht einer Luft-Säule übrig, deren Höhe $= 2\sqrt{hv}$[1]). Wenn also dieser Schluß richtig wäre, so würde der Wiederstand nicht, wie wir vorher gefunden haben, den Quadraten der Geschwindigkeit des Körpers, sondern nur der Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ selbst proportional seyn; so lange nehmlich der Körper mit einer geringeren Geschwindigkeit fortgehet, als die Luft zu folgen vermögend ist. Der Grund dieses Schlusses aber beruhet darauf, daß die Stärke des Drucks immer dem Quadrat der Geschwindigkeit, womit die Theilchen der Luft auf den Körper stossen, proportional sey, wenn man annimmt, daß sich die Theilchen würklich mit der Geschwindigkeit bewegen, welche sie erlangen würden, wenn sie

1) Im Original fehlt der Faktor 2. F. R. S.

in einen leeren Raum hineindringen. Denn da der Druck der Luft auf einen Körper eben so stark ist, als wenn dieselbe mit einer so grossen Geschwindigkeit, als aus dem Druck entstehen kann, auf den Körper stiesse, so scheinet das obige Raisonnement nicht ungegründet zu seyn.

Zum wenigsten, da dieNatur der flüßigen Materien noch nicht so vollkommen bekannt ist, daß man darinne ohne Versuche bloß allein aus der Theorie alle Umstände bestimmen könnte, so wird es nicht undienlich seyn, diesen Begriff von der Würkung der Luft und anderer flüßigen Materien auf harte Körper weiter auszuführen, ungeachtet derselbe, wie bald gezeigt werden soll, mit der Erfahrung unmöglich bestehen kann. Auf diese Art wird aber auch der Druck von vorne auf einen Cylinder,*welcher sich seiner Länge nach mit einer Geschwindigkeit $=\sqrt{v}$ in der Luft bewegt, anders heraus kommen, als vorher. Denn wenn wir setzen, daß sich die Luft statt des Drucks mit einer Geschwindigkeit, so dem Druck gemäß ist, nehmlich mit $\sqrt{h}$ gegen den Cylinder bewege, so ist die relative Geschwindigkeit, womit der Cylinder von vorne auf die Theilchen der Luft stößt,

$$=\sqrt{h}+\sqrt{v},$$

und die Höhe, woraus diese Geschwindigkeit erzeuget wird, $=h+2\sqrt{hv}+v$. Also wird der Druck von vorne dem Gewicht einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$=h+2\sqrt{hv}+v.$$

Wenn nun die Geschwindigkeit des Cylinders grösser ist, als die Geschwindigkeit der nachfolgenden Luft, das ist, wenn $v>h$, so leidet der Körper von hinten gar keinen Druck, und folglich wird der Wiederstand dem Gewicht einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe $=h+2\sqrt{hv}+v$. Wenn aber die Geschwindigkeit des Cylinders $\sqrt{v}$ kleiner ist, als $\sqrt{h}$, so ist der Druck von hinten, wie wir gesehen, $=h-2\sqrt{hv}+v$, welcher von dem vorigen Druck abgezogen den Wiederstand giebt $=4\sqrt{hv}$, also daß in diesem Fall der Wiederstand der Geschwindigkeit des Körpers $\sqrt{v}$ selbst proportional seyn würde. Man siehet auch hieraus, daß der Wiederstand um so viel grösser seyn müsse, je stärker die flüßige Materie zusammen gedruckt ist. Dahero wenn der Wiederstand des Wassers solchergestalt beschaffen wäre, so würde der Wiederstand eben desselben Cylinders, wenn derselbe mit einerley Geschwindigkeit in verschiedenen Tiefen unter dem Wasser bewegt würde, um so viel grösser seyn, je tiefer der Cylinder unter das Wasser getauchet würde. Der Wiederstand würde nehmlich

nach den Quadrat-Wurzeln der Tiefe unter dem Wasser zunehmen, dergestalt, daß in einer viermahl grössern Tiefe der Wiederstand zweymahl so groß seyn müßte. Also würde ein Fisch, welcher 40 Schuh tief unter dem Wasser schwimmet, eine zweymahl grössere Resistenz antreffen, als wenn sich eben derselbe nur 10 Schuh tief mit eben derselben Geschwindigkeit unter dem Wasser bewegte; wofern nur seine Geschwindigkeit kleiner wäre, als diejenige, welche ein fallender Körper aus der Höhe von 10 Schuhen erlangt. Es wäre dahero zu wünschen, daß man sich die Mühe gäbe, dergleichen Experimente über den Wiederstand der Körper in verschiedenen Tiefen unter dem Wasser anzustellen.

Diese Art des Wiederstandes verändert sich auch nach ganz andern Gesetzen, wenn die Figur des Körpers nicht cylindrisch ist; und hierbey kömmt es nicht allein auf den Vordertheil des Körpers, welcher eigentlich nur auf die Theilchen der flüßigen Materie stößt, an, sondern die Figur des Hintertheils muß dabey auch insonderheit in Betrachtung gezogen werden. Wir wollen also, um die Beschaffenheit dieses Wiederstands genauer zu untersuchen, einen runden Körper betrachten, welcher durch die Herumdrehung der krummen Linie $AMSB$ um die Axe AB (Fig. 17) entstehet, und welcher sich nach

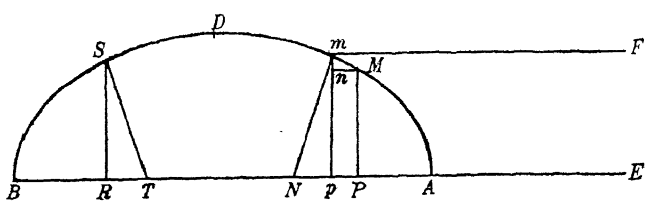


Fig. 17.

der Direction der Axe AB, in der Luft, oder einer andern zusammen gedrückten flüßigen Materie, bewegen soll. Es sey also $\sqrt{b}$ die Geschwindigkeit, mit welcher dieser Körper anjetzo nach der Direction AE fortgehet, und $\sqrt{h}$ sey die Geschwindigkeit, mit welcher die flüßige Materie in einen leeren Raum hineindringen würde, und welche wir nach diesem Begriff von dem Wiederstande an statt des würklichen Drucks betrachten. Weil nun dieser Druck auf den Körper allenthalben perpendicular ist, so ziehe man auf das Element Mm die Perpendicular-Linie mN, so wird dasselbe nach dieser Direction eben so gedruckt werden, als wenn die Luft auf dasselbe gerade mit einer Geschwindigkeit $= \sqrt{h}$ stiesse. Da aber ferner der Körper nach der Direction mF mit der Geschwindigkeit $= \sqrt{b}$ fortzugehen gesetzt wird, und der Druck davon gleich-

fals auf Mm perpendicular ist, so muß dieselbe Geschwindigkeit nach dieser Perpendicular-Direction aufgelöset werden, da denn für dieselbe heraus kommt

$$\frac{mn}{Mm}\sqrt{b};$$

wenn man nehmlich aus M und m auf die Axe AB die Perpendicular-Linien MP, mp und Mn der Axe parallel zieht. Es sey nun $AP = x$, $PM = y$, so wird

$$Pp = Mn = dx, \quad mn = dy \quad \text{und} \quad Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Man setze

$$dy = p\,dx,$$

so wird $Mm = dx\sqrt{(1+pp)}$ und

$$\frac{mn}{Mm}\sqrt{b} = \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Dahero leidet das Element Mm theils von dem Druck, theils von dem Stoß eben die Kraft, als wenn die Luft nach der Direction mN mit einer Geschwindigkeit

$$= \sqrt{h} + \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}$$

auf dasselbe stiesse: und folglich, als wenn auf dasselbe eine Luft-Säule, deren Höhe

$$= h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{bpp}{1+pp},$$

druckte. Weil aber die Direction dieser Kraft nach mN gehet, so muß daraus derjenige Theil genommen werden, welcher mit der Bewegung des Körpers einerley Direction hat, und dieser wird

$$= \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\left(h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{bpp}{1+pp}\right).$$

Da nun der ganze Ring, welcher aus dem Element $Mm = dx\sqrt{(1+pp)}$ durch die Herumdrehung um die Axe AB entstehet, eben diese Gewalt leidet, die Oberfläche dieses Rings aber ist

$$= 2\pi y\,dx\sqrt{(1+pp)},$$

wenn man $1:\pi$ für die Verhältniß des Diameters zur Peripherie annimmt, so wird die aus dem Ring entstehende Kraft, wodurch die Bewegung des Körpers vermindert wird, seyn

$$= 2\pi y p dx\left(h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{bpp}{1+pp}\right).$$

Und hiervon das Integrale genommen, wird die Grösse des Wiederstands, welcher aus dem Stück AM um die Axe gedreht, entspringet, anzeigen. Um also den ganzen Wiederstand zu finden, so muß man dasselbe Integrale auf den ganzen Körper ausdehnen, wofern nehmlich die Luft auf den ganzen Körper würket, welches geschieht, wenn die Geschwindigkeit des Körpers $\sqrt{b}$ kleiner ist, als $\sqrt{h}$. Es ist aber hierbey zu merken, daß der Werth des gedachten Integralis, von A an weiter zu gehen, so lange zunehme, als die Applicatae y wachsen, welches bis in D geschiehet. Wenn man aber von D weiter gegen B fortgehet, weil alsdenn der Buchstabe $p = \frac{dy}{dx}$ negativ wird, so wird die vorige Kraft des Wiederstands dadurch vermindert, indem in diesen Gegenden der Körper von dem Druck der Luft vorwärts gestossen wird. In diesem Fall bekömmt also auch in der Expression

$$h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{bpp}{1+pp}$$

das andere Glied

$$\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}$$

das Zeichen —. Wenn dahero $b < h$, so bekömmt man den ganzen Wiederstand, wenn man das obige Integrale

$$2\pi\int y p dx\left(h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{bpp}{1+pp}\right)$$

auf die ganze krumme Linie ADB ausdehnet.

Wenn aber die Geschwindigkeit des Körpers $\sqrt{b}$ grösser ist, als $\sqrt{h}$, und folglich die Luft von hinten nicht gänzlich nachfolgen kann, so findet sich von hinten ein Theil BS, auf welchen die Luft gar nicht drucket. Um diesen Theil zu finden, so darf man nur das Punkt S suchen, wo der Druck der Luft gänzlich aufhöret, welches geschiehet, wenn

$$\sqrt{h} + \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}} = 0;$$

das ist, wenn man in S die Perpendicular-Linie ST auf die krumme Linie ziehet, weil alsdenn ist

$$\frac{RT}{ST} = \frac{-p}{\sqrt{(1+pp)}},$$

so muß das Punkt S gefunden werden, wo

$$\sqrt{h} = \frac{RT}{ST}\sqrt{b}, \quad \text{oder wo} \quad \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}} = \frac{RT}{ST}.$$

Hat man nun dieses Punkt S gefunden, so muß das obige Integrale nicht weiter, als bis dahin genommen werden. Hieraus erhellet, daß wenn die krumme Linie bey B dergestalt zugespitzt ist, daß bis in B der Bruch $\frac{RT}{ST}$ beständig grösser ist, als $\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$, alsdenn das Integrale auch durch die ganze krumme Linie genommen werden müsse. Weil nun der Wiederstand durch den Druck, so von hinten geschieht, vermindert wird, so sieht man leicht, daß je mehr der Körper von hinten zugespitzt ist, der Wiederstand um so viel kleiner werde, wenn nehmlich $\sqrt{b} > \sqrt{h}$. Verschiedene Autores wollen diesen Umstand würklich durch die Erfahrung wahrgenommen haben, und behaupten, daß der Wiederstand eines Schiffs nicht allein auf der Figur des Vordertheils beruhe, sondern daß die Figur des Hintertheils, wenn dasselbe wohl zugespitzt wird, sehr viel zur Verminderung der Resistenz beytrage. Ob nun gleich hierüber keine Experimente mit allem Fleiß angestellet worden, so würde doch diese neue Lehre von dem Wiederstande der flüßigen Materien dadurch nicht wenig bekräftiget werden, wenn dieser Umstand nur einiger massen richtig wäre.

Wir wollen inzwischen nach der obigen Regel den Wiederstand, welchen eine Kugel in der Luft antrift, ausrechnen. Es sey also der Diameter der Kugel $AB = 2a$, so wird

$$yy = 2ax - xx \quad \text{und} \quad Mm = \frac{ady}{\sqrt{(aa-yy)}}.$$

Weil nun $pdx = dy$, so ist

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\sqrt{(aa-yy)}}{a},$$

und die Integral-Formul wird

$$\pi\int ydy\left(h + \frac{2\sqrt{bh(aa-yy)}}{a} + \frac{b(aa-yy)}{aa}\right),$$

wovon das Integrale gefunden wird:

$$\pi hyy - \frac{4\pi(aa-yy)\sqrt{bh(aa-yy)}}{3a} + \frac{4\pi aa\sqrt{bh}}{3} + \pi byy - \frac{\pi by^4}{2aa}.$$

Wenn nun $b < h$, so muß man dieses Integrale biß auf B ausdehnen, und folglich setzen $y = 0$, wobey zu merken, daß wenn die Abscissa x grösser, als der Radius a genommen wird, die Expression $\sqrt{(aa-yy)}$ das Zeichen — bekomme. Derohalben wenn man das Zeichen des andern Glieds umkehrt, und $y = 0$ setzt, so kömmt der Widerstand

$$= \frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}.$$

Es ist aber πaa die Fläche eines grossen Zirkels dieser Kugel. Wenn man also diese Fläche durch cc andeutet, so wird der Wiederstand

$$= \frac{8}{3}cc\sqrt{bh}.$$

Wir haben aber oben gesehen, daß wenn sich ein Cylinder, dessen Dicke $= cc$, mit einer gleichen Geschwindigkeit in der Luft beweget, sein Wiederstand seyn würde

$$= 4cc\sqrt{bh};$$

dahero sich der Wiederstand einer Kugel zum Wiederstand eines gleich dicken Cylinders verhalten wird, wie 2 zu 3.

Dieses ist aber nur wahr, wenn $b < h$; wenn aber $b > h$, so muß das Integrale nicht bis zum Punkt B, sondern nur bis S genommen werden, wo

$$\sqrt{h} = \frac{-p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}$$

oder

$$\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}} = \frac{-\sqrt{(aa-yy)}}{a}.$$

Da aber dieses Punkt S hinter D fällt, so wird $\sqrt{(aa-yy)}$ negativ, und das Integrale wird also ausgedrückt:

$$\pi hyy + \frac{4\pi(aa-yy)\sqrt{bh(aa-yy)}}{3a} + \frac{4\pi aa\sqrt{bh}}{3} + \pi byy - \frac{\pi by^4}{2aa}.$$

Alhier setze man also

$$\sqrt{(aa-yy)} = \frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{b}} \quad \text{und} \quad aa - yy = \frac{aah}{b},$$

folglich

$$yy = \frac{aa(b-h)}{b} \quad \text{und} \quad y^4 = \frac{a^4(b-h)^2}{bb},$$

so kommt der verlangte Wiederstand heraus

$$= \pi aa\left(\frac{1}{2}b + \frac{4}{3}\sqrt{bh} + h - \frac{hh}{6b}\right)$$

oder

$$= \frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh} + \frac{\pi aa}{6b}(\sqrt{b}-\sqrt{h})^3(3\sqrt{b}+\sqrt{h}).$$

Woraus erhellet, daß, wenn $\sqrt{b} = \sqrt{h}$, der Wiederstand wie in dem vorigen Fall gefunden werde

$$= \frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}.$$

Es sey, um noch ein Exempel anzuführen, der runde Körper, welcher sich nach der Direction seiner Axe BAE mit der Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ in der Luft beweget (Fig. 18), aus zween Kegeln zusammen gesetzt, dergleichen Figur

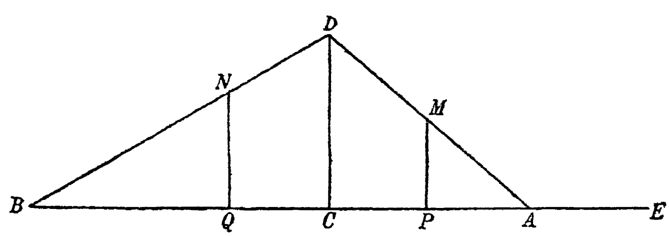


Fig 18.

entsteht, wenn das Triangulum ADB um die Axe AB herum gedrehet wird. Man nenne die Höhe $DC = a$, die Seiten $AD = m$ und $BD = n$, so wird für den Vordertheil ACD seyn

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{a}{m},$$

und der Wiederstand des Vordertheils

$$= 2\pi\int y\,dy\left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right) = \pi aa\left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right).$$

Der Druck der Luft aber auf den Hintertheil, wenn $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$, wird den Körper vorwärts stossen mit einer Kraft

$$= \pi aa\left(h - \frac{2a\sqrt{bh}}{n} + \frac{aab}{nn}\right).$$

Diese Kraft von der vorigen abgezogen, läßt den würklichen Wiederstand dieses Körpers über, welcher seyn wird

$$= \pi a^2\left(\frac{2a(m+n)\sqrt{bh}}{mn} + \frac{aab(nn-mm)}{mmnn}\right) = \frac{\pi a^3(m+n)}{mn}\left(2\sqrt{bh} + \frac{ab(n-m)}{mn}\right).$$

Wenn aber $\sqrt{h} < \frac{a\sqrt{b}}{n}$, so empfindet der Hintertheil gar keinen Druck, und ist also der Wiederstand

$$= \pi aa\left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right).$$

Wenn $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$, so ist die Resistenz um so viel kleiner, je länger das Hintertheil ist, und wenn dasselbe unendlich lang wird, so wird die Resistenz

$$= \pi aa\left(\frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right).$$

Wenn aber eben dieser Körper umgekehrt würde, und sich mit dem Theil DBC in der Luft mit eben der Geschwindigkeit bewegte, so würde der Wiederstand desselben seyn

$$= \frac{\pi a^3(m+n)}{mn}\left(2\sqrt{bh} + \frac{ab(m-n)}{mn}\right),$$

wenn nehmlich $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{m}$. Woraus erhellet, daß wenn die beyden Kegel ungleich spitzig, der Wiederstand des Körpers am kleinsten seyn werde, wenn der spitzigere Theil voraus geht.

Es könten aus diesem Begrif von dem Wiederstand der flüßigen Materien noch viele andere schöne Folgen hergeleitet werden, welche wir aber billig übergehen, da es noch sehr ungewiß ist, ob derselbe mit der Erfahrung auch nur einiger massen überein kömmt oder nicht. Inzwischen wird auch hierdurch der Satz des Verfassers bestätiget, daß wenn sich eine Kugel mit einer grössern Geschwindigkeit, als die Luft zu folgen vermögend ist, beweget, der Wiederstand weit grösser werde, als man sonsten glaubt. Denn, wenn $\sqrt{b} > \sqrt{h}$, so

muß zu dem Wiederstand $\frac{8}{3}\pi aa\sqrt{b}h$, welcher herauskommt, wenn $\sqrt{b}$ nicht grösser ist als $\sqrt{h}$, noch diese Quantität $\frac{\pi aa}{6b}(\sqrt{b}-\sqrt{h})^3(3\sqrt{b}+\sqrt{h})$ hinzugethan werden.

Es mag aber für die Luft diese oder eine andere Erklärung des Wiederstands gelten, so kommt doch dabey noch ein anderer Umstand zu betrachten vor, wodurch der Wiederstand noch mehr vergrössert wird. Dieser beruhet darauf, daß sich die Luft so wohl in einen kleinern Raum einschränken, als in einen grössern ausdehnen läßt. Dadurch geschieht, daß wenn sich ein Körper in der Luft sehr schnell beweget, die Luft vor demselben mehr zusammen gedruckt, und folglich dichter, hinter demselben aber weniger zusammen gedruckt, und folglich dünner wird. Wegen des ersteren Umstands wird also die wiederstehende Kraft von vorne stärker, wegen des andern aber die forttreibende Kraft von hinten schwächer; dahero der Wiederstand der Luft auch aus diesem Grunde bey schnellen Bewegungen weit grösser wird, als bey langsamen.

ZWEYTER SATZ

Wie man den Wiederstand der Luft, welchen ein darinn bewegter Körper leidet, durch Versuche bestimmen soll?

Vermittelst der Maschine, welche oben in dem 8ten Satz beschrieben worden, bin ich immer im Stande, die Geschwindigkeit einer Kugel in einem jeglichen Punkt des Weges, durch welchen sich dieselbe beweget, zu bestimmen. Die ganze Sache kommt nur auf die Richtung des Laufs an, welche so beschaffen seyn muß, daß die Kugel an dem gegebenen Ort ihres Weges auf das Pendulum stosse. Ich nahm also einen Mußketen-Lauf, welcher eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter schoß, und ladete denselben ungefehr mit dem halben Gewicht Pulver, wobey ich die Vorsichtigkeit gebrauchte, daß ich das Pulver immer auf das genaueste abwog, und in allen Stücken also verfuhr, daß ich durch sehr viel vorher angestellte Proben versichert seyn konnte, daß die Geschwindigkeit der Kugel in allen Schüssen biß auf 20 Schuh in einer Secunde einerley war. Hierauf schoß ich diesen Lauf zu dreyen verschiedenen mahlen gegen das Pendulum loß, welches das erste mal 25 Schuh,

das andere mahl 75 Schuh, und das dritte mahl 125 Schuh weit von der Mündung des Laufs entfernet worden: und befand, daß die Kugel in dem ersten Fall mit einer Geschwindigkeit von 1670 Schuhen in einer Secunde auf das Pendulum gestossen, in dem zweyten Fall mit einer Geschwindigkeit von 1550 Schuhen, und in dem dritten mit einer Geschwindigkeit von 1425 Schuhen in einer Secunde. Also hatte diese Kugel, indem dieselbe 50 Schuh weiter in einer Secunde fortgegangen, an ihrer Geschwindigkeit ungefehr 120 bis 125 Schuh in einer Secunde verlohren; und die Zeit, in welcher dieselbe durch diesen Raum von 50 Schuhen gefahren, war ungefehr $\frac{1}{32}$ oder $\frac{1}{30}$ einer Secunde. Woraus folget, daß die mittlere Grösse des Wiederstands der Luft in diesen Versuchen ungefehr 120 mahl grösser gewesen, als das Gewicht der Kugel; und es hat also der Wiederstand, da die Kugel bey nahe $\frac{1}{12}$ ℔ gewogen, ungefehr 10 ℔ Avoirdupoise betragen. Wenn wir nun hierüber die Rechnung nach des Hrn. Newtons Methode für zusammengepreßte flüßige Materien, welche in der 38ten Propos. des 2ten Buchs ausgeführet ist, anstellen, und dabey annehmen, daß die Luft 850 mahl leichter ist, als Wasser, so werden wir finden, daß der Wiederstand einer Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, welche sich mit einer Geschwindigkeit von ungefehr 1600 Schuhen in einer Secunde bewegt, nicht mehr als $4\frac{1}{6}$ ℔ Avoirdupoise austrage. Da wir nun wissen, daß diese Regeln, welche in der angeführten Proposition des Hrn. Newtons enthalten, bey langsamen Bewegungen sehr genau eintreffen, so können wir hieraus sicher schließen, daß die wiederstehende Kraft der Luft in langsamen Bewegungen kleiner sey, als in geschwinden, und dieses in der Verhältnis von $4\frac{1}{6}$ zu 10, welche Verhältniß zwischen diesen 1 zu 2 und 1 zu 3 enthalten ist.

Ich habe ferner den vorigen Lauf wiederum mit gleichen Ladungen von Pulver, und gleich schwehren Kugeln, zu verschiedenen mahlen geladen, und alle mögliche Sorgfalt angewandt, daß alle Schüsse mit gleicher Geschwindigkeit geschehen. Auf diese Art habe ich dreymahl gegen das Pendulum, welches 25 Schuh von der Mündung des Laufs entfernet war, geschossen, und befunden, daß die mittlere Geschwindigkeit der Kugel ungefehr 1690 Schuh in einer Secunde betragen. Hernach habe ich den Lauf 175 Schuh weit von dem Pendulo gesetzt, und nachdem ich verschiedene mahl geschossen, befunden, daß die mittlere Geschwindigkeit von 5 Schüssen, mit welcher die Kugel auf das Pendulum in dieser Entfernung gestossen, in einer Secunde 1300 Schuh betragen. Indem also diese Kugel durch einen Raum von 150 Schuhen fortgegangen, so hatte dieselbe ungefehr 390 Schuh in einer Secunde von ihrer Geschwindigkeit

verlohren. In diesen Versuchen war also der Wiederstand etwas grösser, als in den vorigen, und betrug hier zwischen 10 und 12 Pfund Avoirdupoise. Nach diesen Versuchen kommt also die Verhältniß der wiederstehenden Kraft der Luft für sehr schnelle Bewegungen zu sehr langsamen der Verhältniß 3 zu 1 näher, als in den vorigen.

Nachdem ich also auf diese Art den Wiederstand der Luft auf eine Geschwindigkeit bey nahe von 1700 Schuhen in 1″ erkannt hatte, welche groß genug ist, um hinter der Kugel einen Luft-leeren Raum zu lassen, so habe ich auch den Wiederstand für kleinere Grade der Geschwindigkeit untersuchet. Zu diesem Ende habe ich den vorigen Lauf zwar mit eben so grossen Kugeln als vorher, aber mit weniger Pulver geladen, und nachdem ich das Pendulum 25 Schuh weit von dem Lauf gesetzet, habe ich fünfmahl nach einander mit einerley Ladung gegen dasselbe geschossen, und die mittlere Geschwindigkeit der Kugel, mit welcher dieselbe auf das Pendulum gefahren, von 1180 Schuhen in 1″ befunden. Alsdenn habe ich das Pendulum auf eine Weite von 250 Schuhen von dem Lauf entfernet, und wiederum zu 5 mahlen nacheinander dagegen geschossen; so war, nachdem ich dazwischen ein Mittel genommen, die Geschwindigkeit der Kugel noch 950 Schuh in der Secunde. Indem also die Kugel in der Luft durch einen Weg von 225 fortgegangen, so hat dieselbe 230 Schuh in 1″ in ihrer Geschwindigkeit verlohren. Da nun dieselbe diesen Weg in ungefehr $\frac{3}{14}$ einer Secunde zurück gelegt, so mußte der Wiederstand der Luft auf einen mittlern Grad der Geschwindigkeit bey nahe $33\frac{1}{2}$ mahl grösser gewesen seyn, als das Gewicht der Kugel, und folglich 2 ℔ 10 Untzen Avoirdupoise betragen haben. Nun aber kommt nach den Regeln des Wiederstands für langsame Bewegungen, für diesen Fall nur $\frac{7}{11}$ des gefundenen Gewichts heraus: dahero die wiederstehende Kraft der Luft auf eine Geschwindigkeit von 1065 Schuhen in einer Secunde nicht mehr, als nach der Verhältniß wie 7 zu 11 vermehret wird, da wir doch bey den vorigen Versuchen gesehen, daß für einen höhern Grad der Geschwindigkeit diese Vermehrung der Verhältniß von 1 zu 3 sehr nahe gekommen.

Ferner habe ich drey Schüsse von der vorgemeldeten Grösse und Gewicht über ein stillstehendes Wasser dergestalt gethan, daß man den Ort, wo die Kugel das Wasser zu berühren anfieng, deutlich bemerken, und so wohl die Zeit, als den Weg, welchen die Kugel von dem Lauf an bis in das Wasser durchgelaufen, genau bestimmen könnte. Ein jeder Schuß geschahe mit einer Geschwindigkeit von 400 Schuhen in einer Secunde, und ich war durch viele

Versuche von eben dieser Ladung versichert, daß ich mich auf diese Geschwindigkeit bey 10 Schuhen in einer Secunde verlassen konnte. Der erste Schuß reichte 313 Yards, ehe die Kugel das Wasser berührte, und solches geschahe in $4\frac{1}{4}$ Secunde: also daß die Kugel 313 Yards in $4\frac{1}{4}$ Secunde durchgelaufen. Die zweyte gieng 319 Yards in 4 Secunden, und die dritte 373 Yards in $5\frac{1}{2}''$. Nach der für langsame Bewegungen fest gesetzten Lehre des Wiederstands hätte der erste Schuß nur in $3'',2$, der zweyte in $3'',28$ und der dritte in $4''$ geschehen müssen. Woraus erhellet, daß in einem jeglichen dieser Schüsse die Bewegung merklich mehr durch den Wiederstand der Luft ist gehemmet worden, als solches nach der Theorie hätte geschehen sollen. Folglich ist auch noch bey solchen ziemlich langsamen Bewegungen, als von 400 Schuhen in $1''$, die wiederstehende Kraft der Luft um ein merkliches grösser, als bey langsamen Bewegungen.

Aus allem diesen nun, was hier angeführet worden, erhellet also, daß die Lehre von dem Wiederstand der Luft, so wie derselbe von dem Hrn. Newton für langsame Bewegungen fest gesetzet, und durch mancherley Versuche bestätiget worden, ganz und gar von der Wahrheit abweicht, wenn man dieselbe auf sehr schnelle Bewegungen, dergleichen eine Mußketen-Kugel hat, ziehen will; dergestalt daß in diesem Fall die wiederstehende Kraft der Luft bey nahe dreymahl grösser wird, als dieselbe nach der gedachten Lehre seyn sollte. Gleichwohl aber nimmt diese Vermehrung der wiederstehenden Kraft der Luft um so vielmehr ab, je kleiner die Geschwindigkeit der Kugel wird, biß endlich, wenn diese Geschwindigkeit schon klein genug worden, die Größe des Wiederstands mit der Theorie völlig überein kommt. Dahero wächst der Wiederstand nicht nach den Quadraten der Geschwindigkeit, wie man gemeiniglich anzunehmen pflegt, sondern derselbe weichet von dieser Verhältniß um so vielmehr ab, je grösser die Geschwindigkeit der Kugel, nebst der Zusammendrückung der Luft vor derselben wird. Wir dürfen also in Erwegung dieser Umstände fest behaupten, daß, da man sich bißher von dem Wiederstand der Luft solche unvollkommene und irrige Begriffe gemachet, der Weg, welchen eine Kugel durch die Luft beschreibet, auch keinesweges mit Gewißheit hat bestimmet werden können, und daß folglich die Kunst der Artillerie in diesem Stück bißher noch sehr unvollkommen geblieben ist. Inzwischen ist es nicht genug, daß wir hier diese Vermehrung des Wiederstands der Luft in sehr schnellen Bewegungen, welche alles dasjenige, was man bisher davon gemuthmaßet, weit übersteiget, dargethan, und außer Zweifel gesetzet haben: sondern

wenn wir in den Stand gesetzt werden sollen, die Bewegung der geschossenen Körper in der Luft zu bestimmen, so ist es nöthig, daß wir noch über dieses die wahre Verhältniß, nach welcher der Wiederstand für einen jeglichen Grad der Geschwindigkeit bestimmet wird, ergründen. Dieses wird uns also die Materie zum folgenden Satz geben.

ERSTE ANMERKUNG

Der Verfasser liefert uns hier einige sehr merkwürdige Versuche, wodurch der würkliche Wiederstand der Luft für schnelle Bewegungen erkannt werden kann. Ob man nun gleich wegen der oben angeführten Ursachen die Geschwindigkeit der Kugel, welche der Autor heraus gebracht, einiger maßen in Zweifel ziehen könnte, indem derselbe nicht auf alle nöthige Umstände gesehen zu haben scheint, und noch über dieses seine Rechnung nach einer unrichtigen Regel angestellet: so sind wir doch genöthiget, dieselben, weil der Fehler nicht sonderlich groß seyn kann, um so vielmehr als richtig anzunehmen, da aus Ermangelung einer vollständigen Beschreibung dieser Versuche mit dem Pendulo nicht möglich ist, den etwa im rechnen begangenen Fehler zu verbessern. Um nun vor allen Dingen zu sehen, wie viel die gemeine Lehre von dem Wiederstand der Luft in diesen von dem Verfasser angestellten Versuchen von der Wahrheit abweiche, so wollen wir nach derselben berechnen, wie viel die Kugel, welche mit einer gegebenen Geschwindigkeit sich zu bewegen anfängt, indem dieselbe durch einen gegebenen Weg fortgehet, von ihrer Geschwindigkeit verlieren müsse. Ob aber gleich dieser Weg, welchen die Kugel beschrieben, in der That eine Krümmung gehabt, so war doch dieselbe sehr geringe, und man siehet leicht, daß man dieselbe bey der gegenwärtigen Untersuchung gänzlich aus der Acht laßen könne. Wir wollen also setzen (Fig. 19),

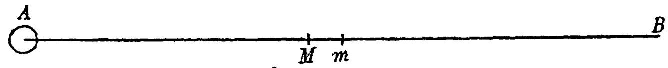


Fig. 19.

es bewege sich eine Kugel in der Luft nach der geraden Linie AB; und die Schwehre derselben verhalte sich zu der Schwehre der Luft, wie n zu 1. Wenn man nun annimmt, daß das Wasser 850 mahl schwehrer sey, als die Luft, so

bekömmt der Buchstabe n nach den verschiedenen Materien, woraus die Kugel bestehen kann, nachfolgende Werthe:

Materie der Kugel	Schwehrer als Regen-Wasser	Der Werth des Buchstabens n
Gold fein	19,080	16218
Silber fein	10,480	8908
Bley	11,350	9647
Kupfer	8,840	7514
Eisen	7,820	6647
Meßing	8,412	7150
Helfenbein	1,826	1552
Marmel	2,710	2303

Es sey nun c der Diameter der Kugel, so wird die Kugel so viel wägen, als ein gleich dicker Cylinder Luft, dessen Höhe $= \frac{2}{3}nc$. Die Geschwindigkeit der Kugel in A sey ferner $= \sqrt{b}$, oder b soll die Höhe bedeuten, aus welcher ein fallender Körper mit der Kugel einerley Geschwindigkeit erhält; und nachdem die Kugel durch den Weg $AM = x$ fortgelaufen, so soll $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit derselben in M anzeigen. Wenn nun die Kugel einen eben so grossen Wiederstand litte, als ein gleich dicker Cylinder, so würde der Wiederstand dem Gewicht einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe $= v$; da aber der Wiederstand einer Kugel nur halb so groß seyn soll nach der gewöhnlichen Lehre, so wird derselbe durch das Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule ausgedruckt werden, deren Höhe $= \frac{1}{2}v$; folglich wird sich der Wiederstand zur Schwehre der Kugel verhalten, wie $\frac{1}{2}v$ zu $\frac{2}{3}nc$, oder wie $\frac{3v}{4nc}$ zu 1. Indem also die Kugel durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortrücket, so wird man diese Aequation bekommen:

$$dv = \frac{-3vdx}{4nc},$$

oder wenn man integrirt, diese

$$\frac{3x}{4nc} = l\frac{b}{v},$$

wo $l\frac{b}{v}$ den hyperbolischen Logarithmum von $\frac{b}{v}$ andeutet. Oder es ist

$$\frac{3x}{4nc} = 2l\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}};$$

wenn aber e für die Zahl gesetzt wird, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$, so hat man

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}} = e^{3x:8nc} \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = e^{-3x:8nc}.$$

Weil nun in den gegenwärtigen Exempeln $\frac{3x}{8nc}$ ein ziemlich kleiner Bruch ist, so wird beynahe sein:

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = 1 - \frac{3x}{8nc} + \frac{9xx}{128nncc},$$

folglich

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{3x}{8nc} - \frac{9xx}{128nncc}.$$

Aus diesen Formuln wollen wir also erstlich die ersten Exempel des Autoris berechnen. Die Kugel war von Bley, und also $n = 9647$. Ferner war der Diameter der Kugel $c = \frac{3}{4}$ Zoll und die Geschwindigkeit derselben in A betrug 1670 Schuh in einer Secunde, welche Zahl wir hier für $\sqrt{b}$ annehmen können, da es nur auf die Verhältniß zwischen $\sqrt{b}$ und $\sqrt{v}$ ankommt. Ferner lief die Kugel in dem ersten Versuche durch 50 Schuh, und behielt eine Geschwindigkeit von 1550 Schuhen in einer Secunde. Also war $x = 50$ Schuh, und $\frac{x}{c} = 800$, folglich

$$\frac{3x}{8c} = 300 \quad \text{und} \quad \frac{3x}{8nc} = \frac{300}{9647} = 0{,}03109.$$

Dahero der Terminus

$$\frac{9xx}{128nncc} = 0{,}00048.$$

Da nun

$$\sqrt{b} = 1670 \quad \text{und} \quad \sqrt{v} = 1550,$$

so wird

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{120}{1670} = 0{,}07185,$$

welche Zahl gleich seyn solte der vorigen 0,03061.[1]) Da aber jene mehr als zweymal grösser ist, als diese, so folget daraus, daß der Wiederstand mehr als zweymahl grösser gewesen, als angenommen worden, welches fast mit des

1) Nämlich $\frac{3x}{8nc} - \frac{9x^2}{128n^2c^2} = 0{,}03109 - 0{,}00048 = 0{,}03061.$ F. R. S.

Autoris Anmerkung gänzlich übereinkommt. Wir haben hierbey gesetzt, daß der Wiederstand einer Kugel nur halb so groß sey, als eines gleich dicken Cylinders; der Autor aber will, daß beyde Körper einen gleichen Wiederstand leiden. Wenn wir also den Wiederstand dieser Körper zweymahl so groß angenommen hätten, so würden wir an statt der Zahl 0,03061 diese 0,06026[1]) gefunden haben, welche der andern 0,07185 weit näher kommt; folglich würde die gemeine Lehre nicht mehr so viel von der Wahrheit abgehen, und die Verdickerung der Luft vor der Kugel könnte hinreichend scheinen, diese Vermehrung des Wiederstands zu verursachen. Inzwischen scheinet aber doch die Meynung des Autoris, daß eine Kugel mit einem gleich dicken Cylinder einerley Wiederstand leide, der Wahrheit nicht gemäß zu seyn, und wir wollen dahero lieber mit dem Autore diese Vermehrung des Wiederstands einer andern Ursache zuschreiben, als dieser. Wir werden aber hernach auch langsame Bewegungen nach dieser Methode berechnen, um zu sehen, ob der Wiederstand einer Kugel aus der gantzen Höhe v, oder nur aus der Helfte derselben, bestimmet werden müsse.

Das zweyte Experiment des Autoris geht auf die vorige Kugel, welche, nachdem dieselbe 100 Schuh weit gelaufen, eine Geschwindigkeit von 1425 Schuhen in einer Secunde behalten. Es war also nach der obigen Regel $\sqrt{b} = 1670$, $\sqrt{v} = 1425$, folglich

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{245}{1670} = 0{,}14670.$$

Ferner war $\frac{3x}{8nc} = 0{,}06220$[2]), und müßte also seyn $0{,}14670 = 0{,}06030$[2]), woraus wiederum erhellet, daß der Wiederstand allzuklein angenommen worden. Aus diesen beyden Exempeln kommt fast einerley Verhältniß zwischen dem wahren Wiederstand, und dem angenommenen heraus; denn beyde geben, daß sich der angenommene Wiederstand zu dem wahren verhalte, wie 1 zu 2,40.[3])

Das dritte Exempel ist mit eben der vorigen Kugel gemacht worden, welche anfänglich in A eine Geschwindigkeit von 1690 Schuhen in 1″ hatte, und nachdem dieselbe durch einen Raum von 150 Schuhen fortgelaufen, noch eine Geschwindigkeit von 1300 Schuhen in einer Secunde behalten. Es war also $\sqrt{b} = 1690$ und $\sqrt{v} = 1300$ folglich

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{390}{1690} = 0{,}23077.$$

1) Im Original 0,06029. 2) Im Original 0,06218. 3) Das Verhältnis $(1-e^{-3x:8nc}):\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$ ist beim ersten Experiment 1 : 2,35 und beim zweiten 1 : 2,43. F. R. S.

Ferner war $\frac{3x}{8nc} = 0{,}09329$[1]), und müßte also seyn $0{,}23077 = 0{,}08907$[2]); woraus folgt, daß sich der angenommene Wiederstand zu dem wahren verhalten, wie 1 zu 2,59.[3]) Dieses Experiment stimmet also mit den vorigen nicht recht überein, und da in diesem die Kugel weiter gelaufen, so hätte, nach des Autoris eigener Meynung, der Unterscheid kleiner seyn sollen, als vorher, indem je mehr die Geschwindigkeit der Kugel abnimmt, auch der Wiederstand mit der Theorie näher übereintreffen sollte.

Das vierte Experiment war mit einer gleichen Kugel angestellt; dieselbe hatte aber in A nur eine Geschwindigkeit von 1180 Schuhen in einer Secunde; nachdem nun dieselbe 225 Schuh weit gelaufen, so betrug ihre Geschwindigkeit noch 950 Schuh in 1″. Also war

$$\frac{x}{c} = 3600 \quad \text{und} \quad \frac{3x}{8nc} = 0{,}13994.^{4)}$$

Ferner war $\sqrt{b} = 1180$ und $\sqrt{v} = 950$, folglich müßte nach der Theorie seyn

$$0{,}13994 = l\frac{1180}{950} = l\frac{118}{95} = 0{,}21681.$$

In diesem Fall ist also auch der angenommene Wiederstand zu klein, und verhält sich zu dem wahren, wie 1 zu 1,493[5]), welches mit des Autoris Verhältniß wie 7 zu 11 ziemlich genau übereintrift. Da nun der Unterscheid um so viel kleiner gefunden wird, je kleiner die Geschwindigkeit der Kugel wird, so erhellet hieraus, daß man nicht fehle, wenn man für sehr langsame Bewegungen den Wiederstand einer Kugel nur halb so groß annimmt, als eines gleich dicken Cylinders.

Die Untersuchung der folgenden Exempel erfordert eine andere Art der Rechnung; denn in denselben wird außer der Geschwindigkeit, so die Kugel im Anfange der Bewegung in A gehabt, die Zeit gegeben, innerhalb welcher dieselbe einen gegebenen Weg durchgelaufen. Wenn also wie vorher die Geschwindigkeit in $A = \sqrt{b}$, in $M = \sqrt{v}$ und der Weg $AM = x$ gesetzt wird, so haben wir diese Aequation gefunden

$$\sqrt{v} = e^{-3x:8nc}\sqrt{b}.$$

1) Im Original 0,09327. 2) Im Original 0,23077 = 0,08905. 3) Im Original 1 zu 2,92. 4) Im Original 0,13993. 5) Im Original 1,549. Berichtigt von F. R. S.

Man setze nun die Zeit, in welcher die Kugel von A biß M gekommen, $= t$, so wird

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{e^{3x:8nc}\,dx}{\sqrt{b}},$$

wovon das Integrale gefunden wird:

$$t = \frac{8nc(e^{3x:8nc} - 1)}{3\sqrt{b}} = \frac{8nc}{3b}(e^{3x:8nc} - 1)\sqrt{b}.$$

Welche Formul also zu gebrauchen ist: man drücke b in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhes aus, und dividire alsdenn die herauskommende Zahl durch 250; so wird der Quotient die Anzahl der Secunden, aus welchen die Zeit t bestehet, anzeigen.[1]) Wir haben aber oben[2]) gesehen, daß wenn man $\sqrt{b}$, nachdem man b in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhes ausgedruckt hat, durch 4 dividirt, der Quotient anzeige, wie viel Schuh die Kugel mit der Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ in einer Sekunde durchzulaufen vermögend ist. Wenn also die Kugel mit ihrer ersten Geschwindigkeit in A m Rheinländische Schuhe in 1″ hätte zurück legen können, so wird $\frac{\sqrt{b}}{4} = m$ und $b = \frac{16mm}{1000}$ Rheinländische, oder $\frac{16mm}{970}$ Englische Schuh, und die gesuchte Zeit wird

$$t = \frac{8nc}{3b}(e^{3x:8nc} - 1)\frac{m}{62,5}$$

Secunden. Wenn also die Zeit t in Secunden ausgedruckt wird, so hat man

$$e^{3x:8nc} = 1 + \frac{1875bt}{80mnc}$$

oder

$$\frac{3x}{8nc} = l\left(1 + \frac{1875bt}{80mnc}\right).$$

Wenn demnach diese Aequation bey einem Experiment statt findet, so ist es ein Zeichen, daß der Wiederstand recht angenommen worden; wo aber nicht,

1) Weil EULER $\frac{1}{1000}$ des rheinländischen Fußes als Längen- und $\frac{1}{250}$ Sekunde als Zeiteinheit wählt, erhält die Beschleunigung der Schwere die Maßzahl $\frac{31,25 \,.\, 1000}{250^2} = \frac{1}{2}$, daher die Endgeschwindigkeit für die Fallhöhe v die Maßzahl $\sqrt{v}$, jedoch bezogen auf rheinländische Fuß und Sekunden die Maßzahl $\frac{\sqrt{v}}{1000} \cdot 250 = \frac{1}{4}\sqrt{v}$. F. R. S.

2) Siehe p. 78. F. R. S.

so wird man bald sehen, ob der angenommene Wiederstand zu groß oder zu klein, und dieses auch um wie viel. Wenn $\frac{3x}{8nc}$ eine sehr kleine Zahl ist, so läßt sich die erstere Aequation auf diese bringen:

$$t = \frac{mx}{62{,}5b}\left(1 + \frac{3x}{16nc} + \frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2} + \text{etc.}\right),$$

oder da $b = \frac{16mm}{970}$ Englische Schuh, so wird

$$t = \frac{97x}{100m}\left(1 + \frac{3x}{16nc} + \frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2} + \text{etc.}\right).$$

Oder wenn die erste Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ auch in englischen Schuhen gegeben wird, und dieselbe m solche Schuhe in einer Secunde beträgt, so kommt

$$t = \frac{x}{m}\left(1 + \frac{3x}{16nc} + \frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2} + \text{etc.}\right)$$

Secunden, in welcher Formul es gleich viel ist, wenn nur die Grössen x, m und c nach einerley Maaß-Stab genommen worden, indem es nur auf die Verhältniß derselben ankömmt. Ferner ist hier zu merken, daß die absolute Größe des Wiederstands durch $\frac{3}{8n}$ angedeutet wird. Wenn also der angenommene Wiederstand zu klein gefunden wird, so darf man nur sehen, was für einen grössern Bruch man für $\frac{3}{8n}$ annehmen müsse, damit die Gleichheit erhalten würde, und alsdenn wird derselbe die wahre Größe des Wiederstands anzeigen.

In diesen letztern von dem Verfasser angeführten Versuchen war nun wie vorher $c = \frac{3}{4}$ Zoll, und $n = 9647$. Ferner war die anfängliche Geschwindigkeit 400 Schuh in einer Secunde: wenn wir also setzen $m = 400$, so müssen wir auch die übrigen Grössen nach diesem Maaß ausdrucken. Der erstere Schuß gieng 313 Yards in $4\frac{1}{4}''$; es hält aber ein Yard 3 englische Schuh, folglich wird $x = 939$ Schuh und $\frac{x}{m} = 2{,}3475$, ferner

$$\frac{x}{c} = 15024 \quad \text{und} \quad \frac{3x}{8nc} = 0{,}58401.$$

Wenn man nun diese Werthe in der obigen Vergleichung setzt, so kommt

$$4{,}25 = 3{,}18643\,^{1)},$$

1) Im Original 3,18839. Berichtigt von F. R. S.

woraus erhellet, daß die angenommene Resistenz zu klein ist. Der Autor findet für diesen Fall aus eben der Theorie 3,2″, welche Zeit mit der unsrigen sehr genau überein kommt. Um nun eine völlige Gleichheit zu erhalten, so müßte man den Wiederstand beynahe noch so groß setzen. Es scheinet aber, daß man sich auf dieses Experiment nicht allzuwohl verlassen könne, da in dem folgenden Experiment die Kugel um 6 Yards weiter in einer kürzern Zeit, nehmlich in 4″ gegangen, woraus folglich der Zuwachs des Wiederstands kleiner heraus kommen muß. Wir wollen also dieses Experiment genauer erwegen. Hier wird nun $x = 957$ Schuh, und folglich $\frac{x}{m} = 2{,}3925$, ferner

$$\frac{x}{c} = 15312 \quad \text{und} \quad \frac{3x}{8nc} = 0{,}59521.$$

Woraus man bekommt

$$4 = 3{,}2696.$$

Wenn also auch hier eine Gleichheit heraus kommen soll, so muß der Wiederstand, und folglich der Terminus $\frac{3x}{8nc}$ grösser angenommen werden. Man setze $\frac{3x}{8nc} = z$, so muß seyn

$$\frac{4}{2{,}3925} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} + \text{etc.} = 1{,}6719\,^{1)}$$

oder

$$\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2\cdot 3} + \frac{z^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.} = 0{,}6719.^{2)}$$

Hieraus findet man

$$z = 0{,}9528^{3)},$$

und verhält sich also die angenommene Resistentz zu der wahren, wie 0,59521 zu 0,9528[3]) das ist wie 1 zu 1,6008.[4]) Welcher Unterscheid doch noch viel zu groß scheint, weil oben in dem 4ten Experiment, da die Geschwindigkeit der Kugel im Anfang fast fünfmahl grösser, als hier gewesen, die Verhältniß wie 1 zu 1,493[5]) heraus gebracht worden. Es kömmt aber hierinne auf eine solche genaue Bestimmung in allen Stücken an, da die geringste Unrichtigkeit einen sehr merklichen Unterscheid verursachen kann. Dahero können diese

1) Im Original 1,6718. 2) Im Original 0,6718. 3) Im Original 0,9556. 4) Im Original 1,6055. 5) Im Original 1,549. Berichtigt von F. R. S.

Experimente nicht anders gebraucht werden, als nur überhaupt zu zeigen, daß der wahre Wiederstand, welchen eine schnell bewegte Kugel in der Luft leidet, viel grösser sey, als die hier gebrauchte Theorie anzeigt, und daß, je grösser die Geschwindigkeit der Kugel ist, diese Theorie um so viel mehr von der Wahrheit abweiche.

ZWEYTE ANMERKUNG

Um diese Abhandlung von dem Wiederstand der Körper in der Luft vollständig zu machen, so wollen wir auch langsamere Bewegungen untersuchen, dergleichen in fallenden Körpern beobachtet werden. In solchen Fällen läßt sich die Größe des Wiederstands bestimmen, wenn man die Zeit bemerkt, in welcher ein gegebener Körper durch eine gegebene Höhe herunter fällt. Denn da man weiß, in wie langer Zeit ein Körper in einem Luft-leeren Raum durch eine jegliche Höhe kraft seiner Schwehre fällt, so wird diese Zeit in der Luft grösser: und aus dem Unterscheid ist man im Stande, die Größe des Wiederstands herzuleiten. Die Luft hat aber hiebey eine doppelte Würkung; denn außer dem Wiederstand wird auch das Gewicht des Körpers um so viel vermindert, als eine mit demselben gleich grosse Masse Luft wiegt.

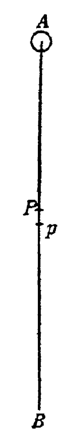


Fig. 20.

Es sey A (Fig. 20) eine Kugel, welche aus dem Punkt A nach der senkelrechten Linie AB herunter fällt; der Diameter derselben sey $=c$, und ihre Schwehre verhalte sich zu der Schwehre der Luft, wie n zu 1: folglich wird das Gewicht derselben um $\frac{1}{n}$ Theil vermindert. Wir wollen setzen, die Kugel sey schon biß in P herunter gefallen, die Höhe AP sey $=x$, und die Geschwindigkeit in P sey $=\sqrt{v}$. Hieraus wird nun in P die Kraft der Schwehre durch $1-\frac{1}{n}$, die Kraft des Wiederstands aber durch $\frac{3v}{4nc}$ ausgedruckt werden: dahero die Acceleration in folgender Aequation enthalten seyn wird:

$$dv=\left(1-\frac{1}{n}-\frac{3v}{4nc}\right)dx.$$

Hieraus bekommt man:

$$\frac{3dx}{4nc}=\frac{3dv}{4nc-4c-3v},$$

wovon das Integrale ist

$$\frac{3x}{4nc}=l\frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v}.$$

Wenn nun e für die Zahl angenommen wird, deren hyperbolischer Logarithmus $=1$, oder wenn $e=2{,}718281828459$, so wird

$$e^{3x:4nc}=\frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v}$$

oder

$$1-\frac{3v}{4(n-1)c}=e^{-3x:4nc},$$

und hieraus bekommt man

$$v=\frac{4(n-1)c}{3}(1-e^{-3x:4nc}),$$

und folglich

$$\sqrt{v}=\sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}(1-e^{-3x:4nc})}.$$

Wenn ferner die Zeit, in welcher die Kugel aus A bis zu P herunter gefallen, durch t angedeutet wird, dergestalt, daß t in Secunden ausgedruckt werden soll, so wird

$$dt=\frac{dx}{250\sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}(1-e^{-3x:4nc})}}$$

und

$$t=\frac{\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}.$$

Die Integration aber giebt

$$t=\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l\,\frac{1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}{1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$$

oder

$$t=\frac{2n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l(1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})})+\frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}.$$

Wenn der Bruch $\frac{3x}{4nc}$ sehr klein ist, so setze man Kürze halber $\frac{4nc}{3}=m$, und da wird

$$e^{-\frac{x}{m}}=1-\frac{x}{m}+\frac{x^2}{2m^2}-\frac{x^3}{6m^3}+\frac{x^4}{24m^4}-\text{etc.}$$

folglich

$$l\left(1+\sqrt{\left(1-e^{\frac{-x}{m}}\right)}\right)=l\left(1+\sqrt{\left(\frac{x}{m}-\frac{x^2}{2m^2}+\frac{x^3}{6m^3}-\frac{x^4}{24m^4}+\text{etc.}\right)}\right).$$

Wenn man nun diesen Logarithmum durch die Näherung ausdrücket[1]), und in obiger Aequation anbringt, so kommt

$$t = \frac{2n\sqrt{cx}}{125\sqrt{3}(n-1)m}\left(1 + \frac{x}{12m} + \frac{xx}{480m^2} - \frac{x^3}{2688m^3} - \text{etc.}\right)$$

oder

$$t = \left(1 + \frac{x}{12m} + \frac{xx}{480m^2} - \frac{x^3}{2688m^3} - \frac{x^4}{92160m^4} - \text{etc.}\right)\cdot\frac{1}{125}\sqrt{\frac{nx}{n-1}},$$

allwo in dem Glied $\sqrt{\frac{nx}{n-1}}$ die Höhe x in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhs ausgedrucket werden muß.

Um nun diese Formul durch ein Exempel zu erläutern, und zugleich zu sehen, wie genau dieselbe mit der Erfahrung überein stimmt, so wollen wir zu diesem Ende aus den *Princ. Phil. Nat.* des Hrn. NEWTONS eines nehmen, wo derselbe eine gläserne Kugel in der St. Paul-Kirche durch eine Höhe von 220 Englischen Schuhen hat herunterfallen lassen.[2]) Die Kugel hielt in ihrem Diameter 5 Zoll, und wog 483 Gran. Eine gleich grosse Kugel von Wasser würde gewogen haben 16600 Gran; wenn also die Luft 850 mahl leichter gesetzt wird, als Wasser, so müste eine gleich grosse Kugel von Luft gewogen haben $\frac{16600}{850}$, das ist 19,53 Gran. Also war $c = 5$ Zoll, und da diese Kugel in einem Luftleeren Raum würde 502,53 Gran gewogen haben, so wird $n = \frac{502,53}{19,53} = 25,73$ und $x = 220$ Schuh. Ferner wird $m = 171,5$ Zoll, und da $x = 2640$ Zoll, so wird

$$\frac{x}{m} = \frac{26400}{1715} = 15,3935.$$

Da nun hier $\frac{x}{m}$ keine so kleine Zahl ist, daß die obige Näherung Statt finden könnte, so müssen wir die erst gefundene Aequation gebrauchen:

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3}(n-1)}\, l\,\frac{1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}{1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}},$$

wo c in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhes ausgedruckt

1) Man entwickle zunächst die Quadratwurzel nach steigenden Potenzen von $\sqrt{\frac{x}{m}}$ und setze dann das Resultat (es werde mit u bezeichnet) ein in $l(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}\cdots$ F. R. S.

2) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* Editio tertia, Londini 1726, p. 351. F. R. S.

werden muß. Es wird also $c = 404{,}166$ und folglich

$$\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} = 0{,}48044.$$

Man setze Kürze halber

$$\frac{x}{m} = 15{,}3935 = \alpha,$$

so hat man

$$t = 0{,}48044\, l\, \frac{1+\sqrt{(1-e^{-\alpha})}}{1-\sqrt{(1-e^{-\alpha})}}$$

Secunden. Es sey $e^{-\alpha} = z$, so wird $lz = -\alpha le$; da nun $e = 2{,}718281828$, so ist nach den gemeinen Logarithmis $le = 0{,}43429448$, und also

$$lz = -15{,}3935 \cdot 0{,}43429448 = -6{,}6853,$$

folglich

$$z = \frac{1}{4\,845\,100}.$$

Da nun $z = e^{-\alpha}$ eine so sehr kleine Zahl ist, so wird

$$\sqrt{(1-z)} = 1 - \frac{1}{9\,690\,200}$$

und

$$t = 0{,}48044\, l\, 19380400$$

Secunden. Der gemeine log. von 19380400 ist 7,287363, welcher mit 2,30258509 multiplicirt den hyperbolischen Logarithmum giebt: dieser wird also seyn $= 16{,}7797$, und da kommt heraus

$$t = 8{,}0616$$

Secunden. Newton hat aber diese Zeit auf das genaueste beobachtet, und dieselbe befunden 8,2″. Die Kugel hat also etwas mehr Zeit gebraucht, um aus der Höhe von 220 Schuhen herunter zu fallen, als durch die Theorie gefunden wird, folglich hat dieselbe einen etwas grösseren Wiederstand angetroffen, als nach der Theorie angenommen worden. Inzwischen ist der Unterscheid so geringe, daß, da in der Observation leicht ein so kleiner Fehler könnte eingeschlichen seyn, die wahre Grösse des Wiederstands daraus nicht wohl bestimmt werden kann. Newton hat dieses und noch mehr dergleichen Experimente auf eine andere Art ausgerechnet, in-

dem er aus der gegebenen Zeit die Höhe gesuchet, durch welche der Körper nach der Theorie hätte herunter fallen müssen. Er findet aber diese Höhe immer etwas grösser, als dieselbe in der That gewesen, woraus folglich genugsam erhellet, daß der Wiederstand in der That etwas grösser gewesen seyn müsse, als solcher nach der Theorie gesetzt worden. Hierdurch wird also die Meynung des Verfassers noch um so viel mehr bekräftiget, daß bey schnellen Bewegungen die Theorie den Wiederstand zu klein angebe; denn auch in diesen Versuchen war gegen das Ende des Falls die Geschwindigkeit nicht mehr klein, und betrug ungefehr 29 Schuh in einer Secunde, welche Geschwindigkeit schon einen etwas grössern Wiederstand leiden muß.

Die Berechnung dieses und anderer dergleichen Exempel, wo $e^{-3x:4nc}$ eine so sehr kleine Zahl ist, kan folgender gestalt bequemer angestellt werden. Denn da ohne Fehler ist

$$\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})} = 1-\frac{1}{2}e^{-3x:4nc},$$

so wird

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l\,\frac{2-\frac{1}{2}e^{-3x:4nc}}{\frac{1}{2}e^{-3x:4nc}} = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l\,4e^{3x:4nc}$$

oder

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l4 + \frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}.$$

Da nun $l4 = 1{,}38629436$, so wird

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{(n-1)}}\left(0{,}0064030 + 0{,}0034641\,\frac{x}{nc}\right)$$

Secunden. Will man aber in diesen Fällen aus der gegebenen Zeit t die Höhe x finden, so kommt

$$0{,}0034641\,\frac{x}{nc} = \frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}} - 0{,}0064030$$

und also

$$x = 288{,}675\,t\sqrt{c(n-1)} - 1{,}8484\,nc,$$

oder

$$\frac{x}{nc} = 288{,}675\cdot\frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}} - 1{,}8484,$$

wo in dem Glied $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}}$ die Zeit t in Secunden, und der Diameter c in tausendsten Theilen eines Rheinl. Schuhes ausgedruckt werden muß. Da nun

in dem vorher berechneten Exempel war $t = 8{,}2''$, $c = 404{,}166$ und $n = 25{,}73$, so wird $nc = 128{,}65$ Engl. Zoll, oder 10,72 Engl. Schuhe. Hieraus bekommt man:

$$\frac{x}{10{,}72} = 20{,}9086 \quad \text{oder} \quad x = 224{,}14$$

Engl. Schuhe, und ist dahero grösser als die Höhe 220 Schuhe, welche diese Kugel in dieser Zeit in der That beschrieben. Der Unterscheid ist aber nur 4 Schuh, welche die Kugel in $\frac{1}{7}''$ durchlaufen könnte. Da nun ein so geringer Theil der Zeit nicht genau bemerket werden kann, so sieht man hieraus, daß die gewöhnliche Theorie des Herrn NEWTONS bey nicht allzu schnellen Bewegungen sehr genau übereintreffe, bey schnellen Bewegungen aber den Wiederstand allzuklein anzeige.

DRITTE ANMERKUNG

Hieraus erhellet also zur Gnüge, und es könnte auch noch durch andere Experimente dargethan werden, daß für nicht allzu schnelle Bewegungen die bekannte Lehre von dem Wiederstand der Luft, so wie dieselbe von dem grossen NEWTON vorgetragen, und bißher von den Gelehrten gebrauchet worden, mit der Wahrheit sehr genau übereinstimme. In solchen Fällen ist also ausgemacht: erstlich, daß der Wiederstand eines Körpers den Quadraten der Geschwindigkeit desselben proportional sey, und daß zweytens der Wiederstand eines Cylinders, welcher sich seiner Länge nach in der Luft beweget, dem Gewicht eines gleich dicken Cylinders Luft gleich sey, dessen Höhe so groß ist, daß ein schwehrer Körper, so aus derselben herunter fällt, mit dem bewegten Cylinder einerley Geschwindigkeit erhält. Drittens ist auch gewiß, daß der Wiederstand einer Kugel nur halb so groß sey, als eines gleich dicken Cylinders. Hieraus kan man nun auch ziemlich sicher schliessen, daß bey Körpern von andern Figuren der Wiederstand so beschaffen seyn werde, wie die oben gelehrte Art, den Wiederstand zu berechnen, anzeigt; ob es gleich sehr schwehr ist, mit solchen Körpern richtige Experimente anzustellen, um derselben Bewegung mit der Rechnung vergleichen zu können. Weil nun in dieser Rechnung bloß allein die vordere Figur des Körpers in Betrachtung gezogen wird, so folgt hieraus, daß die hintere Figur desselben nicht viel zur Grösse des Wiederstands beytrage: dahero die, in den dem vorigen Satz bey-

gefügten Anmerkungen, angeführten Gründe alle Kraft fast gänzlich zu verlieren scheinen. Insonderheit fällt die letztere daselbst gegebene Art den Wiederstand zu bestimmen, wo derselbe der Geschwindigkeit selbst proportional gefunden worden, gänzlich weg: indem der Wiederstand nicht zugleich den Geschwindigkeiten des Körpers selbst, und auch ihren Quadraten, proportional seyn kann. Denn ungeachtet es bey einem jeden Körper einen solchen Grad der Geschwindigkeit giebt, für welchen nach beyden Proportionen einerley Wiederstand heraus kommt, so muß derselbe doch bey allen übrigen Graden der Geschwindigkeit verschieden seyn. Wenn sich nehmlich der Körper geschwinder bewegt, so geben die Quadrata der Geschwindigkeit einen grösseren Wiederstand, als die Geschwindigkeiten selber: und umgekehrt, wenn sich der Körper mit einem geringeren Grad der Geschwindigkeit beweget, so geben die Geschwindigkeiten selbst einen grössern Wiederstand, als ihre Quadrata. Aus dieser Betrachtung könnte man also einwenden, daß sich öfters diese beyden Unterscheide ersetzen, und also beyde Theorien der Wahrheit gemäß gefunden werden könnten. Insonderheit scheinet die letztere Meynung noch dadurch eine neue Kraft zu erhalten, daß in sehr langsamen Bewegungen der Wiederstand grösser befunden wird, als die Theorie anzeigt: ungeachtet man gemeiniglich diesen Umstand einer Zähigkeit der flüßigen Materie zuschreiben will.

Damit man aber hiervon desto gründlicher urtheilen könne, so wollen wir nach dieser Theorie einige Exempel[1]) berechnen. Es sey also c der Diameter der Kugel, und $\sqrt{b}$ ihre Geschwindigkeit, $\sqrt{h}$ aber die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft in einen leeren Raum hinein zu dringen vermögend ist; so wird der Wiederstand eines gleich dicken Cylinders dem Gewicht eines Cylinders von Luft gleich seyn, dessen Höhe $=4\sqrt{bh}$. Der Wiederstand der Kugel wird aber dem Gewicht eines gleich dicken Cylinders Luft gleich seyn, dessen Höhe $=\frac{8}{3}\sqrt{bh}$, wenn nehmlich $b<h$. Wenn aber $b>h$, so muß die Höhe eines gleich schweren Cylinders genommen werden

$$=\frac{8}{3}\sqrt{bh}+\frac{1}{6b}(\sqrt{b}-\sqrt{h})^3(3\sqrt{b}+\sqrt{h});$$

es ist aber $h=29100$ Rheinl. Schuhe, und dieser letztere Fall findet statt, wenn die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde mehr, als 1348 beträgt. Nach der gemeinen Lehre würde der Wiederstand dieser Kugel dem Gewicht einer Luft-Säule gleichen, deren Höhe $=\frac{1}{2}b$. Um also zu sehen, wenn die Kugel

1) Siehe hierzu EULERS Vierte Anmerkung zum Ersten Satze dieses Capitels. F. R. S.

nach diesen beyden Theorien einerley Wiederstand leiden müßte, so darf man nur setzen $\frac{1}{2}b = \frac{8}{3}\sqrt{bh}$, und da kömmt $\sqrt{b} = \frac{16}{3}\sqrt{h}$; oder die Kugel müßte sich mit einer Geschwindigkeit von 7189 Schuhen in einer Secunde bewegen; bey kleinern Geschwindigkeiten würde also $\frac{8}{3}\sqrt{bh}$ immer grösser seyn, als $\frac{1}{2}b$, und das um $\frac{16\sqrt{h}}{3\sqrt{b}}$. Bey einer Geschwindigkeit also von 30 Schuhen in einer Secunde, würde der Wiederstand nach diesem neuen Begrif 239 mahl grösser heraus kommen, als nach der gewöhnlichen Art. Da nun dieser mit der Wahrheit sehr genau überein kommt, so ist klar, daß der neue Begrif gar entsetzlich von der Wahrheit abweichen müsse. Wenn man auch sagen wolte, daß die Geschwindigkeit der Luft, womit dieselbe in einen leeren Raum hinnein dringt, wegen anderer uns verborgenen Umstände nicht so groß wäre, als wir hier angenommen, so würde doch immer noch etwas sehr ungereimtes heraus kommen. Denn wenn auch $\sqrt{h} = 100$ oder noch weniger angenommen würde, so würde nicht nur bey sehr langsamen Bewegungen der Wiederstand noch weit zu groß gefunden werden, sondern man würde auch bey sehr geschwinden Bewegungen den Wiederstand immer viel kleiner finden, als nach der üblichen Lehre, da doch nach dieser in solchen Fällen der Wiederstand viel zu klein gefunden wird. Es würde derowegen unnöthig seyn, diesen letztern Begrif von dem Wiederstand durch mehr Exempel zu wiederlegen, da die Unrichtigkeit desselben Sonnen-klar dargethan worden. Man kan hieraus den Schluß ziehen, daß man bey dergleichen Untersuchungen jederzeit die äusserste Behutsamkeit gebrauchen müße: da es nicht so leicht in die Augen fält, wie in der daselbst gebrauchten Methode gefehlet worden. Inzwischen dienet aber dieses, die gebräuchliche Lehre von dem Wiederstand der flüßigen Körper auf langsame Bewegungen um so viel mehr zu bekräftigen, und ausser allen Zweifel zu setzen. Wie aber dieselbe für sehr schnelle Bewegungen verbessert, und zur Vollkommenheit gebracht werden müsse, solches wird im folgenden dargethan werden.

DRITTER SATZ

Wie man die verschiedenen Vermehrungen der wiederstehenden Kraft der Luft nach den verschiedenen Geschwindigkeiten der darinn bewegten Körper bestimmen soll?

Da in der Praxi nicht bald solche Schüsse vorkommen, in welchen die Kugel eine grössere Geschwindigkeit, als von 1700 Schuhen erhält, so habe ich auch noch keine Versuche angestellt, um die wiederstehende Kraft der Luft zu bestimmen, wenn sich die Kugel mit einer grössern Geschwindigkeit bewegt. Es wird aber auch zu unserem gegenwärtigen Vorhaben genug seyn, wenn wir nur die Veränderungen des Wiederstands für alle geringere Grade der Geschwindigkeit anzeigen können.

Nach den Versuchen, welche ich über diese Materie angestellt, wird die wiederstehende Kraft der Luft für alle Geschwindigkeiten, welche kleiner sind, als von 1700 Schuhen in einer Secunde, vermittelst der folgenden Regel immer sehr genau bestimmt werden können.

Man nehme (Fig. 21) AB zu AC, wie sich verhält die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde, zu der vorgegebenen Geschwindigkeit, für

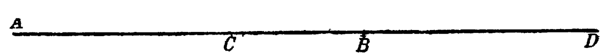


Fig. 21.

welche die wiederstehende Kraft der Luft gesuchet wird. Ferner verlängere man die Linie AB biß in D, dergestalt, daß sich verhalte BD zu AD, wie sich verhält die wiederstehende Kraft der Luft für sehr langsame Bewegungen, zu der wiederstehenden Kraft für die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1″. Wenn dieses geschehen, so wird sich CD zu AD verhalten, wie die wiederstehende Kraft der Luft für langsame Bewegungen zu der wiederstehenden Kraft für den vorgegebenen Grad der Geschwindigkeit, welche durch die Linie AC vorgestellet worden.

ERSTE ANMERKUNG

Nachdem also die gemeine Lehre von dem Wiederstand der Luft auf mittelmäßige Bewegungen fest gesetzt, und zugleich dargethan worden, daß für sehr schnelle Bewegungen nach derselben der Wiederstand zu klein heraus komme, so muß man in diesen Fällen den Wiederstand vermehren, um diese Lehre der Wahrheit völlig gemäß einzurichten. Wir haben auch oben schon die Ursache dieser Vermehrung deutlich genug eingesehen, welche auf diesen zweyen Gründen beruhet, daß erstlich bey sehr schnellen Bewegungen, die Luft nicht vermögend ist, der Kugel zu folgen, wodurch folglich der Wiederstand noch mit dem Druck der Luft von vorne vermehret wird. Hernach wird auch in diesen Fällen die Luft vor der Kugel viel dicker, wodurch so wohl der Gegendruck, als der Wiederstand vermehret wird. Wenn sich nun diese beyden Umstände aus der Natur der Luft genau bestimmen liessen, so wäre man im Stande, die Lehre von dem Wiederstand derselben zur Vollkommenheit zu bringen. Da aber unsere Erkenntniß hierzu keineswegs hinreichend ist, so muß man sich begnügen, aus der Erfahrung diese nöthige Verbesserung, so viel als möglich, genau und der Wahrheit gemäß herzuleiten. Diesen Weg hat auch der Verfasser erwehlet, um den Wiederstand der Luft auf sehr schnelle Bewegungen in diesem Satz zu bestimmen: und da seine Versuche auf keine grössere Geschwindigkeiten, als von 1700 Schuhen in 1″ gerichtet sind, so hat er sich begnüget, eine solche Regel zu geben, welche für alle geringere Grade der Geschwindigkeit den Wiederstand eben so, wie er solchen durch die Erfahrung befunden hatte, anzeigte.

Um nun den Grund dieser Regel deutlicher zu erklären, so wollen wir erstlich die langsamen Bewegungen, mit welchen die Theorie gänzlich übereinzustimmen gezeigt worden, in Betrachtung ziehen. Wenn sich also eine Kugel in der Luft mit einer solchen Geschwindigkeit, welche durch den Fall aus einer Höhe $= v$ erlangt wird, beweget, so ist der Wiederstand dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleich, deren Höhe $= \frac{1}{2}v$: und auf diese Art bekömmt man immer die wahre Grösse des Wiederstands, wenn die Höhe v nicht sehr groß ist. Ist aber die Höhe v so groß, daß daraus eine Geschwindigkeit von 1000 und mehr Schuhen in 1″ entspringt, so haben wir gesehen, daß der Wiederstand in der That weit grösser sey, als $\frac{1}{2}v$; und daß derselbe, wenn die Geschwindigkeit 1700 Schuh in 1″ beträgt, ungefehr durch eine Luft-Säule, deren

Höhe $= \frac{3}{2}v$, ausgedruckt worden. Wir wollen also, um unsere Ausdrückung allgemein zu machen, setzen, daß der wahre Wiederstand einer Kugel dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleiche, deren Höhe $= \theta v$: und da ist klar, daß θ eine solche veränderliche Grösse seyn müsse, daß dieselbe, wenn v nicht sehr groß ist, immer $= \frac{1}{2}$ sey: wenn aber v sehr groß wird, einen grössern Werth bekomme, und endlich gar $= \frac{3}{2}$ werde, wenn die Geschwindigkeit der Kugel auf 1700 Schuh in 1″ anwächst, das ist, wenn v ungefehr 46400[1]) Englische Schuh groß wird. Die ganze Sache kommt also darauf an, daß man für θ eine solche Ausdrückung finde, welche, wenn v nicht merklich groß ist, allezeit $\frac{1}{2}$, wenn aber $v = 46400$, als denn $\frac{3}{2}$ gebe. Dieser Buchstabe θ ist also dasjenige, was der Autor die wiederstehende Kraft der Luft nennet, und welche er in diesem Satz für einen jeglichen Fall bestimmet. Um nun aus seiner gegebenen Regel den Werth dieses Buchstabens θ heraus zu bringen, so sey f die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde erlangt wird, oder es sey $\sqrt{f} = 1700$, und $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit, für welche die wiederstehende Kraft oder der Werth des θ gesucht wird. Es bedeute ferner α den Werth für θ, wenn $\sqrt{v} = \sqrt{f}$, dergestalt, daß in diesem Fall α ungefehr $\frac{3}{2}$ seyn muß; wenn aber $\sqrt{v}$ sehr klein, so muß seyn $\theta = \frac{1}{2}$. Man nenne nun die Linie $AB = a$, so macht der Verfasser erstlich diese Proportion

$$AB\,(a) : AC = \sqrt{f} : \sqrt{v},$$

hieraus wird

$$AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}.$$

Die zweyte Proportion des Autoris verhält sich also:

$$BD : AD = \tfrac{1}{2} : \alpha,$$

welche in diese verwandelt wird:

$$AB : AD = \alpha - \tfrac{1}{2} : \alpha;$$

hieraus wird

$$AD = \frac{2\alpha a}{2\alpha - 1}.$$

---

1) Euler ersetzt hier 17^2 durch 290 und nimmt die Beschleunigung der Schwere zu 31,25 englische Fuß an, was übrigens für die folgende numerische Rechnung belanglos ist. F. R. S

Da nun $AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}$, so wird

$$CD = \frac{2\alpha a\sqrt{f} - (2\alpha - 1)a\sqrt{v}}{(2\alpha - 1)\sqrt{f}}.$$

Endlich sagt er, werde seyn

$$CD : AD = \tfrac{1}{2} : \theta$$

und folglich

$$\theta = \frac{AD}{2CD}.$$

Hieraus wird

$$\theta = \frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}};$$

und der Wiederstand einer Kugel, welche sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ in der Luft beweget, wird dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$= \frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}}\, v.$$

Dieser gefundene Werth für θ hat nun die erforderten Eigenschaften. Denn wenn die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ sehr klein ist, so verschwindet der Terminus $(2\alpha - 1)\sqrt{v}$ vor $2\alpha\sqrt{f}$, und wird also $\theta = \frac{1}{2}$; wenn aber die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$, 1700 Schuhe in 1″ beträgt, oder dem $\sqrt{f}$ gleich wird, so kömmt $\theta = \alpha$, wie erfordert worden. Für kleinere Geschwindigkeiten bekommt θ kleinere Werthe, wie aus beygefügter Tabelle, wo wir $\alpha = \frac{3}{2}$ angenommen haben, erhellet.

Wenn die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde so viel Englische Schuhe beträgt:	So ist die wiederstehende Kraft der Luft, oder der Werth des Buchstabens θ:
0	0,5000
100	0,5204
200	0,5425
300	0,5667
400	0,5930
500	0,6219
600	0,6538
700	0,6892
800	0,7286
900	0,7727
1000	0,8226
1100	0,8793
1200	0,9444
1300	1,0200
1400	1,1087
1500	1,2143
1600	1,3421
1700	1,5000

Man siehet aber leicht, daß man diesen Werth des Buchstabens θ nicht für grössere Geschwindigkeiten gebrauchen könne. Denn wenn $\sqrt{v} = \frac{2\alpha\sqrt{f}}{2\alpha - 1}$, das ist, wenn die Geschwindigkeit 2550 Schuh in einer Secunde austragen solte so würde θ unendlich groß, und müßte in diesem Fall der Wiederstand unendlich groß seyn, welches ganz und gar ungereimt wäre. Ob nun gleich der Verfasser dieses wohl eingesehen, und seine Regel nur für kleinere Grade der Geschwindigkeit, als von 1700 Schuhen in 1″ ausdrücklich einschränket, so siehet man doch, daß, da dieselbe von der Wahrheit bey grössern Geschwindigkeiten so sehr abweicht, dieselbe auch bey etwas kleineren der Wahrheit nicht völlig gemäß seyn könne. Und da man mit leichter Mühe unendlich viel dergleichen Formuln für θ finden kann, welche eben diese zwey Eigenschaften besitzen, daß erstlich für ganz kleine Geschwindigkeiten $\theta = \frac{1}{2}$, und für die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1″ heraus komme $\theta = \frac{3}{2}$, so wird man der Wahrheit näher kommen, wenn man aus denselben eine solche

erwehlet, welche dieser Ungereimtheit nicht unterworfen ist. Es scheinet also vielmehr, daß man den wahren Wiederstand durch eine solche Formul

$$\frac{1}{2}v + pv^n$$

ausdrücken solte, wo p eine sehr kleine Zahl, und n grösser ist, als 1. Denn auf diese Art kann man gleichfals die nöthigen Bedingungen erhalten, daß wenn v sehr klein ist, der terminus pv^n in Ansehung des $\frac{1}{2}v$ verschwinde, und wenn v sehr groß, nehmlich 46400 Schuh, daß alsdenn der terminus pv^n zwey mahl so groß werde, als der erste $\frac{1}{2}v$. Um der ersten Bedingung ein Genügen zu leisten, wird unumgänglich erfordert, daß die Zahl n grösser sey, als 1. Es kommt also nur darauf an, ob man für dieselbe $\frac{3}{2}$ oder 2 annehmen wolle: im erstern Fall würde dieser Zusatz pv^n den Cubis der Geschwindigkeit, im andern aber den Quadrato-quadratis proportional seyn. Wolte man das erstere erwehlen, so findet sich diese Schwierigkeit, daß wenn der Cörper zurück gienge, und man folglich die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ negativ annähme, der Wiederstand $= \frac{1}{2}v - pv\sqrt{v}$ heraus kommen würde, da derselbe doch eben sowohl, als im ersteren Fall $= \frac{1}{2}v + pv\sqrt{v}$ seyn müßte.

Diese Schwierigkeit fällt nun weg, wenn wir für n die Zahl 2 annehmen, dergestalt, daß der Wiederstand durch

$$\frac{1}{2}v + pv^2$$

ausgedrückt wird. Denn hier ist es gleich viel, ob die Geschwindigkeit selbst, $\sqrt{v}$, affirmative oder negative angenommen wird; ferner kommt auch auf diese Art die obige Schwierigkeit nicht zum Vorschein, daß für einen endlichen Grad der Geschwindigkeit der Wiederstand unendlich groß wird. Diese Form erhält auch daher keine geringe Bekräftigung, daß bey sehr langsamen Bewegungen der Wiederstand etwas grösser, als $\frac{1}{2}v$ werde, welche Würkung der Zähigkeit der Luft zugeschrieben wird. Es ist aber, wie der grosse Newton gewiesen, die Kraft der Zähigkeit weder den Geschwindigkeiten, noch ihren Quadraten, proportional, sondern sie bleibt immer einerley.[1]) Wenn also diese Zähigkeit durch δ angedeutet wird, so kömmt nach der ordentlichen Lehre der ganze Wieder-

1) I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Editio tertia, Londini 1726, p. 274. F. R. S.

stand also ausgedrückt $\delta + \frac{1}{2}v$ heraus, wo δ eine so kleine Grösse ist, daß wenn v nicht über die massen klein ist, dieselbe in Ansehung des $\frac{1}{2}v$ gänzlich aus der Acht gelassen werden kann; als wenn zum Exempel δ nur den tausendsten Theil eines Schuhes bedeutete, so verschwindet dasselbe, so bald nur v etliche Zoll groß wird. Weil nun diese Expression $\delta + \frac{1}{2}v$ noch nicht den ganzen Wiederstand ausdrückt, wenn v sehr groß ist, und folglich zu derselben noch ein Terminus gesetzt werden muß, so kann derselbe, allem Vermuthen nach, nicht anders als von dieser Form pv^2 seyn. Da wir aber den ersten Terminum δ bey geschwinden Bewegungen, dergleichen wir hier betrachten, gänzlich weglassen können, so wird der Wiederstand also $\frac{1}{2}v + pv^2$ ausgedruckt werden müssen. Wenn wir dahero gewiß wüsten, daß für eine Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1″, oder wenn $v = 46400$ Schuh, der wahre Wiederstand dreymahl grösser wäre, als nach der gemeinen Regel, so würde sich hieraus der Buchstabe p bestimmen lassen. Denn da müste seyn

$$\frac{1}{2} \cdot 46400 + p \cdot 46400^2 = \frac{3}{2} \cdot 46400,$$

folglich

$$p = \frac{1}{46460}.$$

Wenn aber der Wiederstand erst für eine Geschwindigkeit von 1900 Schuhen 3 mahl so groß würde, so bekäme man $p = \frac{1}{58200}$, wobey zu merken, daß 58200 Schuh die doppelte Höhe h geben, welche oben zu Ausdrückung der Elasticität der Luft ist gebraucht worden.[1]) Weil uns aber dieser Werth für p noch nicht bekannt ist, so wollen wir für denselben $\frac{1}{2g}$ setzen, dergestalt, daß die wahre Grösse des Wiederstands seyn soll

$$= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2g}v^2;$$

und wir wollen den wahren Werth von g aus den Experimenten selbst bestimmen. Wenn man im übrigen für $\frac{1}{2g}$ den obigen Bruch $\frac{1}{46400}$ annimmt, so kommt für alle niedrigere Grade der Geschwindigkeit fast eben der Wiederstand heraus, als aus des Autoris Regel. Denn wenn wir hier wiederum die

1) Dieser Wert von p entspricht auf rheinländisches Maß bezogen einer Geschwindigkeit von 1907 Schuh. F. R. S.

wiederstehende Kraft der Luft durch θ andeuten, so wird

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{v}{46400},$$

oder wenn die Kugel n Schuh in einer Secunde macht, so wird

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{nn}{2890000}.$$

Ist also $n = 100$, so wird $\theta = 0{,}5034$, welches kleiner ist, als nach des Autoris Regel; wird aber $n = 800$, so kommt $\theta = 0{,}7214$ fast wie bey dem Autore; wenn aber $n > 800$ bis $n = 1700$, so sind die hieraus entstehenden Werthe des θ grösser, als nach dem Autore, welches der Wahrheit nicht entgegen zu seyn scheinet.

ZWEYTE ANMERKUNG

Wir wollen also annehmen, der wahre Wiederstand, welchen eine Kugel, die sich mit einer Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ in der Luft beweget, sey gleich einem gleich dicken Cylinder Luft, dessen Höhe

$$= \frac{1}{2} v + \frac{1}{2g} v^2,$$

und wir wollen den Buchstaben g dergestalt bestimmen, daß die Rechnung mit den Experimenten des Verfassers, so viel als möglich, übereinkommt. Es sey dahero (Fig. 19) der Diameter der Kugel $= c$, welche sich nach der geraden Linie AB in der Luft dergestalt bewegen soll, daß ihre Geschwindigkeit in dem Anfang der Bewegung in A sey $= \sqrt{b}$; woraus man die Geschwindigkeit derselben in einem jeglichen Punkt M bestimmen solle, welche sey $= \sqrt{v}$. Man setze den Weg $AM = x$, und die Kugel bestehe aus einer solchen Materie, welche n mahl schwerer sey, als die Luft, folglich wird die Schwehre der Kugel einer gleich dicken Luft-Säule gleichen, deren Höhe $= \frac{2}{3} nc$: und die Schwehre der Kugel wird sich also zu dem Wiederstand in M verhalten, wie $\frac{2}{3} nc$ zu $\frac{1}{2} v + \frac{1}{2g} v^2$ oder

$$\text{wie } 1 \text{ zu } \frac{3v}{4nc} + \frac{3v^2}{4ncg}.$$

Indem also die Kugel durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortgehet, so wird seyn:

$$dv = \frac{-3\,dx}{4nc}\left(v + \frac{vv}{g}\right)$$

oder

$$\frac{3\,dx}{4nc} = \frac{-g\,dv}{gv + vv} = \frac{-dv}{v} + \frac{dv}{g+v},$$

welches gehöriger massen integrirt gibt

$$\frac{3x}{4nc} = l\,\frac{b\,(g+v)}{v\,(g+b)},$$

oder wenn e für die Zahl angenommen wird, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$, so wird

$$e^{3x:4nc} = \frac{b\,(g+v)}{v\,(g+b)}$$

oder

$$e^{3x:4nc}\,bv + e^{3x:4nc}\,gv = bg + bv,$$

woraus man erhält

$$g = \frac{(e^{3x:4nc} - 1)\,bv}{b - e^{3x:4nc}\,v},$$

wobey zu merken, daß wenn $\frac{3x}{4nc}$ ein sehr kleiner Bruch, alsdenn beynahe sey

$$e^{3x:4nc} = 1 + \frac{3x}{4nc} + \frac{9xx}{2 \cdot 16\,n^2 c^2} + \text{etc.}$$

In den von dem Autore angeführten Exempeln war nun, weil die Kugel von Bley gewesen, $n = 9647$, und der Diameter der Kugel $c = \frac{3}{4}$ Zoll. Ferner hatte die Kugel anfänglich eine Geschwindigkeit von 1670 Engl. Schuhen in einer Secunde, dahero $b = 41990$ Rheinl. Schuhe oder 43237[1]) Engl. Schuhe. Wir wollen hierzu das zweyte Exempel des Autoris in Betrachtung ziehen, worinne die Kugel, nachdem dieselbe einen Weg von 100 Schuhen durchgelaufen, noch eine Geschwindigkeit von 1425 Schuhen in einer Secunde behalten. Also verhält sich $\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1670 : 1425$; und $b : v = 103 : 75$ bey nahe. Hernach da $x = 100$ Schuh, so wird

$$\frac{3x}{4nc} = 0{,}12439\,^{2)},$$

1) Im Original 42190. 2) Im Original 0,12436. Berichtigt von F. R. S.

folglich

$$e^{\frac{3x}{4nc}} = 1{,}13242$$

und dahero wird

$$g = \frac{0{,}13242 \cdot 75}{103 - 75 \cdot 1{,}13242} b = \frac{9{,}93150}{18{,}0685} b^{1)},$$

oder da $b = 41990$ Rheinl. Schuhe, so wird $g = 23080$[2]) Rheinl. Schuhe.

Im dritten Exempel war $\sqrt{b} = 1690$ Schuh, $x = 150$ Schuh, und $\sqrt{v} = 1300$ Schuh, dahero $\frac{3x}{4nc} = 0{,}18654$ und $e^{3x:4nc} = 1{,}20507$ und folglich

$$g = \frac{0{,}20507\, v}{b - 1{,}20507\, v} b.$$

Da nun

$$\sqrt{b} : \sqrt{v} = 13 : 10 \quad \text{und} \quad b : v = 169 : 100,$$

so wird

$$g = \frac{20{,}507}{48{,}493} b.$$

Es ist aber $b = 42981$ Rheinl. Schuh, und wird also $g = 18176$ Rheinl. Schuh.

Wir wollen nun den Werth von g noch aus dem 4ten Experiment untersuchen, in welchem, wie in den vorhergehenden, war $c = \frac{3}{4}$ Zoll, und $n = 9647$. Die Geschwindigkeit der Kugel in A aber war $\sqrt{b} = 1180$ Schuh, und nachdem dieselbe den Raum $x = 225$ Schuh durchlauffen, war $\sqrt{v} = 950$ Schuh. Hieraus wird $\frac{3x}{4nc} = 0{,}27986$, und also $e^{3x:4nc} = 1{,}32294$, folglich

$$g = \frac{0{,}32294 v}{b - 1{,}32294 v} b.$$

Es ist aber $b : v = 13924 : 9025$ und dahero wird

$$g = \frac{2914{,}5335}{1984{,}4665} b.$$

Nun aber ist hier $b = 20958$ Rheinl. Schuh, derowegen wird $g = 30781$ Rheinl. Schuh.

Aus diesen drey Experimenten des Autoris haben wir also drey verschiedene Werthe für die Buchstaben g bekommen, nehmlich

1) Im Original $\frac{9{,}93150}{18{,}86758} b$. 2) Im Original 22102. Berichtigt von F. R. S.

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. } g = 23080\,^{1)} \\ \text{II. } g = 18176 \\ \text{III. } g = 30781\end{array}\right\}\ \text{Rheinl. Schuh.}$$

Wenn man nun zwischen diesen ein Mittel nimmt, so kommt heraus $g = 24012.$[2]) Da aber in dem dritten die Kugel einen weit grösseren Weg, als in den beyden andern beschrieben, und auch der Unterscheid zwischen den Geschwindigkeiten in A und M grösser gewesen, so hat die Unrichtigkeit der Ausmessungen in dem letzten Experiment keinen so grossen Einfluß haben können, als in den andern, und dahero scheinet der letzt gefundene Werth des g der Wahrheit am meisten gemäß zu seyn. Weil man aber doch Ursache zu vermuthen hat, daß derselbe noch etwas zu groß ist, die Höhe einer natürlichen Luft-Säule aber, welche der elastischen Kraft der Luft gleich ist, etwas kleiner gefunden wird, so scheinet der Wahrheit gemäß zu seyn, daß dieser Buchstabe g dieser Höhe accurat gleich sey. Wir haben aber oben diese Höhe etwas zu groß angesetzt, weil wir daselbst die Luft 864 mahl leichter, als das Wasser genommen haben. Wenn wir also [für die Höhe] einer Quecksilber-Säule, deren Gewicht der Elasticität der Luft gleich ist, 30 Englische Zoll oder $2\frac{1}{2}$ Schuh annehmen, das Quecksilber aber 13,575 mahl schwehrer, als Wasser, und 11538 mahl schwehrer, als Luft setzen, so kommt die Höhe einer natürlichen Luft-Säule, deren Gewicht der Elasticität der Luft gleich ist, $= 28845$ Englische, oder 27979 Rheinl. Schuh, und also werden wir uns am allerwenigsten von der Wahrheit entfernen, wenn wir für g diese Höhe annehmen. Da wir nun bisher den Buchstaben h für diese Höhe gebraucht haben, welcher folglich diesen Werth haben wird

$$h = 28845$$

Engl. Schuh oder

$$h = 27979$$

Rheinl. Schuh, so wird $g = h$, und dahero ist der Wiederstand einer Kugel gleich dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule, deren Höhe $= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$. Die wiederstehende Kraft der Luft, welche hier durch $\frac{1}{2} + \frac{v}{2h}$ ausgedrückt wird, ist also um so viel grösser, je geschwinder sich die Kugel bewegt, und das fast nach

1) Im Original 22102. 2) Im Original 23686. Berichtigt von F. R. S.

:ben der Regel, welche der Autor gegeben. Nach unserer Regel beträgt die 𝔊eschwindigkeit der Kugel, deren Wiederstand dreymahl grösser ist, als nach ler gemeinen, 1870 Rheinl. oder 1926 Engl. Schuh. Der Autor scheinet zwar ler Meynung zu seyn, als wenn dieses schon bey einer Geschwindigkeit von .700 Schuhen in 1″ geschähe; der Unterscheid ist aber bey so vielen Unrich-igkeiten, welchen die Versuche unterworfen sind, nicht so groß, daß derselbe n Betrachtung gezogen zu werden verdiente. Im übrigen bekräftiget diese Jebereinstimmung der Buchstaben g und h die Wahrheit unserer Formul nicht venig, weil man vorher hätte sehen können, daß der gefundene Zusatz $\frac{1}{2h}vv$ lurch die Elasticität der Luft bestimmet werden müßte. Denn da diese Ver-nehrung des Wiederstands, theils von der Verdickerung der Luft vor der Kugel, theils von der Verdünnerung hinter derselben herkommt, diese beyden Jmstände aber auf der Elasticität der Luft beruhen, so kann die gedachte Vermehrung keiner andern Ursache, als der Elasticität der Luft, zugeschrieben verden. Man siehet auch ferner, daß je grösser die Elasticität der Luft ist, e geringer die entstehende Verdickerung vor der Kugel, und die Verdünnerung ıinter derselben seyn müsse; indem alsdenn die Luft mehr Kraft hat, sich nit der umliegenden ins Gleichgewicht zu setzen. Hieraus folget also, daß e grösser die Elasticität der Luft ist, je kleiner der Zuwachs des Wiederstands verden, und daß derselbe, wenn die Elasticität unendlich groß wäre, völlig verschwinden müsse. Eben dieses weiset auch die gefundene Formul $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$, in welcher der Zusatz $\frac{1}{2h}vv$ um so viel kleiner wird, je grösser nan die Höhe h, wodurch die Elasticität der Luft ausgemessen wird, annimmt; ınd wenn h gar unendlich groß gesetzt werden solte, so würde das Glied $\frac{1}{2h}vv$ gänzlich verschwinden, wie solches die Natur der Sache zu erkennen giebt. Eben diese Eigenschaften würden zwar auch Statt finden, wenn man für g an Statt h, entweder $2h$ oder $3h$, oder auch $\frac{1}{2}h$ setzen solte; allein es ist aus den obigen Rechnungen leicht zu sehen, daß, um den Experimenten ein Genügen zu leisten, für g weder $\frac{1}{2}h$ noch $2h$, noch viel weniger $3h$ an-genommen werden könne. Dahero diese Simplicität, daß just die Höhe h dem Werth von g am nächsten gekommen, die Gewißheit unserer gefundenen Formul ım so vielmehr bestärket, indem dergleichen Ausdrücke der Natur immer am neisten gemäß befunden werden. Wenn also diese unsere Regel, um den Wiederstand der Luft zu bestimmen, mit der Wahrheit gänzlich übereinstimmt, ıngeachtet dieselbe hier bloß aus der Erfahrung hergeleitet worden, so ist loch kein Zweifel, daß man dieselbe nicht auch aus der Theorie allein solte

heraus bringen können. Und da man von der Wahrheit derselben zum voraus versichert ist, so kann die Betrachtung derselben nicht wenig zu einer vollkommenern Erkenntniß der Natur und wahren Ursache des Wiederstands, als welche, wie aus dem obigen zur Gnüge erhellet, noch sehr unvollständig ist, beytragen.

VIERTER SATZ

Wie man die Geschwindigkeit, mit welcher Mußketen- und Canonen-Kugeln durch Hülfe der gewöhnlichen Ladung Pulver heraus geschossen werden, bestimmen soll?

Aus den in dem 7ten Satz des ersten Capitels angestellten, und durch die folgenden Versuche bekräftigten Rechnungen erhellet, daß eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter und $1\frac{1}{3}$ Unzen Avoirdupoise am Gewicht, wenn dieselbe mit dem halben Gewicht Pulver aus einem Lauf, der 45 Zoll lang ist, heraus geschossen wird, eine solche Geschwindigkeit erhalte, mit welcher dieselbe nach einer gleichförmigen Bewegung 1700 Schuh in einer Secunde zurück legen würde.

Wenn man, an statt einer bleyernen Kugel, eine eiserne von gleicher Grösse und unter gleichen Umständen in den Lauf laden, und mit der vorigen Ladung Pulver herausschiessen solte, so würde diese eiserne Kugel eine grössere Geschwindigkeit erhalten, als die bleyerne, und das nach der Verhältniß der Quadrat-Wurzeln aus der Schwehre des Bleys zur Schwehre des Eisens. Wenn wir nun diese Verhältniß setzen wie 3 zu 2, und nach den an dem angeführten Ort gegebenen Regeln die Rechnung anstellen, so wird man finden, daß eine eiserne Kugel, so 24 Pfund schwehr, wenn dieselbe aus einem Stück, dessen Seele 10 Schuh lang, mit 16 Pfund Pulver geschossen wird, dadurch eine solche Geschwindigkeit erhalten werde, womit dieselbe, nach einer gleichförmigen Bewegung, beynahe 1650 Schuh in einer Secunde durchlaufen könnte.

Dieses ist also die Geschwindigkeit, welche eine Canon-Kugel von 24 Pfund nach unserer Theorie erhalten muß, wenn dieselbe mit voller Ladung heraus geschossen wird. Wenn man aber an statt dieser Ladung Pulver, welche $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel austrägt, nur die Helfte des Gewichts der Kugel, nehmlich 12 Pfund laden solte, so wird nach eben diesen Regeln die Geschwin-

digkeit der Kugel in einer Secunde nicht mehr, als 1490 Schuh austragen. Eben diese Geschwindigkeit wird auch bey allen kleinern Kugeln Statt finden, woferne dieselben nur mit einer ähnlichen Ladung Pulver geschossen werden, und die Länge des Laufs zum Diameter der Kugel beständig einerley Verhältniß behält. Ob man aber gleich in der Artillerie bey den kleinern Stücken diese Verhältniß zwischen der Länge der Seele und dem Diameter der Kugel nicht zu beobachten pflegt, so ist doch der Unterscheid nicht so groß, daß die hier bestimmte Geschwindigkeit viel von der Wahrheit abweichen könnte, welches vermittelst der Rechnung ein jeder leicht befinden wird.

Wir setzen aber bey diesen Bestimmungen zum voraus, daß der Spielraum nicht grösser sey, als eben nöthig ist, die Kugel in den Lauf leicht hinein zu bringen, ungeachtet es in der That entweder aus Unachtsamkeit oder Unwissenheit öfters zu geschehen pflegt, daß der Diameter der Mündung den Diameter der Kugel so sehr überschreitet, daß ein grosser Theil der forttreibenden Gewalt des Pulvers an den Seiten heraus dringt: und in diesem Fall mag freylich die Geschwindigkeit der Kugel sehr merklich kleiner seyn, als wir hier bestimmet haben. Inzwischen ist es doch wahrscheinlich, daß ein guter Theil dieses Verlusts durch den Zuwachs der grösseren Hitze, womit, wie oben in dem sechsten Satz angemerket worden, dergleichen grosse Ladungen Pulver allem Ansehen nach begleitet sind, ersetzet werde.

ZUSATZ

Die Betrachtung dieser hier bestimmten erstaunlichen Geschwindigkeit der Canonen-Schüsse kann dienen, um eine Schwierigkeit aufzulösen, wodurch verschiedene Autores, welche über die gemeine Lehre der Artillerie geschrieben haben, sind veranlasset worden, auf eine ganz ausserordentliche und ungereimte Meynung zu verfallen. Diese Schwierigkeit, wovon ich rede, bestehet in dem sogenannten Kernschuß, oder der Weite, durch welche die Kugel sich nach einer geraden Linie, wie man sich die Sache vorzustellen pflegt, bewegen soll. Unser ANDERSON[1]) hatte durch viele Versuche befunden, daß die Bahn der Kugeln und Bomben im ersten Anfang ihrer Bewegung nicht so viel gekrümmet war, als dieselbe nach den Grundsätzen des GALILEI, wenn man mit denselben die Weite des Schusses in Vergleichung ziehet, hätte seyn sollen. Um nun diesen Umstand nach seiner Theorie zu erklären, so hat er geglaubt, daß bey

1) Siehe die Anmerkung 2 p. 36. F. R. S.

einem jeglichen Schusse die Kugel durch eine gewisse Weite von der Mündung des Stücks in einer geraden Linie fortgehe, und daß die Kraft der Schwehre auf dieselbe inzwischen keine Würkung habe. Durch dieses Mittel dachte er die Lehre von der parabolischen Bewegung zu retten, und stimmte zugleich der gemeinen Meynung, welche die practischen Scribenten überhaupt hierüber gegeben, bey. Wenn man aber auch gleich diese Beobachtung auf keine bessere Art erklären könnte, so würde doch verhoffentlich nicht nöthig seyn, eine so ungereimte Meynung, dergleichen die Aufhebung der Kraft der Schwehre ist, zu wiederlegen. In der That aber hat sich der ANDERSON darinn betrogen, daß er nicht gewußt, wie sehr die erste Geschwindigkeit der schwehrsten Canonen-Schüsse durch den Wiederstand der Luft während der Bewegung verändert wird. Hieraus ist es auch nicht schwehr, die gemeine Meynung der practischen Artilleristen zu erklären, wenn dieselben behaupten, daß eine jede Canonen-Kugel auf eine gewisse Weite von dem Stück in einer geraden Linie fortgehe, welche eingebildete Weite sie den Kern-Schuß zu nennen pflegen. Denn hierzu haben wir nicht mehr nöthig, als darzuthun, daß in dieser also bestimmten und benannten Weite die Abweichung der Bahn, worinn sich die Kugel bewegt, von einer geraden Linie so geringe ist, daß sie dieselbe nach ihrer Art nicht zu bemerken vermögend sind. Da nun eine Kugel von 24 ℔, welche mit einer Ladung von $\frac{2}{3}$ ihres Gewichts Pulver geschossen wird, in einer Weite von 1500 Schuhen von dem Stück nicht mehr von ihrer ersten Richtung, als um einen Winkel, so nur etwas wenig grösser ist, als ein halber Grad, abweicht, so werden diejenigen, denen die ungewissen Methoden bekannt sind[1]), nach welchen die Stücke öfters gerichtet zu werden pflegen, leicht erkennen, daß eine so geringe Abweichung als diese ist, von dem gemeinen Haufen der Artilleristen nicht wohl bemerket werden könne, und daß dieselben folglich diesen Theil der Bahn, in welcher sich die Kugel bewegt, unfehlbar als eine gerade Linie ansehen müssen: insonderheit da noch öfters andere Fehler mit unterlaufen, welche vielmehr austragen, als die Krümmung dieser Linie, welche von der Kraft der allgemeinen Schwehre verursachet wird.

In diesem Satz ist also die Geschwindigkeit der Kugel, so wohl wenn die Ladung an Pulver zwey Drittel ihres Gewichts, als wenn dieselbe nur die Helfte austrägt, bestimmet worden. Ich muß aber bey dieser Gelegenheit erinnern, daß nach den Gründen unserer Theorie, welche in dieser Abhandlung fest ge-

1) Die Worte *bekannt sind* fehlen im deutschen, nicht aber die entsprechenden im englischen Original. F. R. S.

setzet worden, wenn die Ladung immer grösser angenommen wird, die Geschwindigkeit der Kugel dadurch nur biß auf einen gewissen Grad vermehret werden könne; dergestalt, daß man für einen jeglichen Fall eine gewisse Grösse der Ladung anzeigen kann, durch welche die Kugel am geschwindesten fortgetrieben wird: und wenn man noch mehr Pulver laden sollte, daß alsdenn die Geschwindigkeit der Kugel geringer seyn würde. Diese Ladung, welche der Kugel die größte Geschwindigkeit mittheilet, und die Verhältnisse dieser Geschwindigkeit zu denjenigen, welche von grössern oder kleinern Ladungen herkommen, kann folgender Gestalt ausfündig gemacht werden.

Man stelle sich die Linie AB (Fig. 22) als die Axe des Stücks vor, und ziehe darauf die Perpendicular-Linie AC; zwischen diesen Linien AC und AB, als den Asymtoten, beschreibe man eine Hyperbel LEF, und ziehe die Linie BF parallel mit AC. Hierauf finde man das Punkt D, wo das Viereck $ADGE$ gleich wird dem hyperbolischen Raum $DEFB$; alsdenn wird die Linie AD die Höhe der Ladung anzeigen, welche der Kugel die allergröste Geschwindigkeit mittheilet. Da sich nun, wie aus der Lehre von den Logarithmis bekannt ist, AD zu AB verhält, wie 1 zu 2,71828, so wird aus der Länge der Linie AD, welche solchergestalt gefunden worden, und aus der Weite der Mündung, die Menge des Pulvers, so zu dieser Ladung erfordert wird, leicht bestimmet werden können.

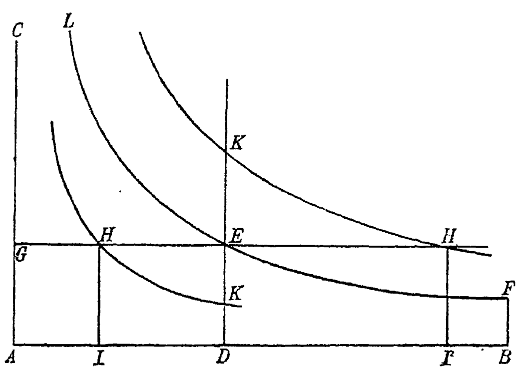


Fig. 22.

Wenn man aber an statt dieser Ladung eine andere annimmt, welche in der Höhlung des Stücks den Raum AI einnimmt, so ziehe man IH mit AC parallel, und beschreibe durch das Punckt H zwischen den vorigen Asymtoten AB und AC eine Hyperbel HK. Wenn dieses geschehen, so wird sich die gröste Geschwindigkeit zu der Geschwindigkeit, welche der Kugel durch diese Ladung AI eingedruckt wird, verhalten, wie die Quadrat-Wurzel aus dem Viereck AE zu der Quadrat-Wurzel aus einem Raum, welcher entsteht, wenn man von dem Viereck AE die dreylinichte Figur HEK wegnimmt. Alles dieses folget leicht aus den Grundsätzen, welche in dem siebenten Satz des ersten Kapitels fest gesetzet worden.

ERSTE ANMERKUNG

Nachdem der Autor im ersten Kapitel nur die Geschwindigkeit von kleinen Mußketen-Kugeln ausgerechnet, und durch die Erfahrung vermittelst seines Penduli bestätiget hatte, so ziehet derselbe allhier die Canonen-Kugeln in Betrachtung; und da die Geschwindigkeit derselben nicht durch die vorher gebrauchte Maschine bestimmt werden kann, so begnügt er sich, dieselbe bloß allein aus seiner Theorie heraus zu bringen. Denn, weil bey kleinen Kugeln sich kein merklicher Unterscheid zwischen der Theorie und der Erfahrung geäußert, so konnte er mit dem grösten Grunde vermuthen, daß die Theorie auch bey grossen Kugeln mit der Erfahrung übereinstimmen würde. Und ob zwar gleich der Spielraum in Canonen nach Proportion weit grösser ist, als in Mußketen, und dadurch folglich vielmehr von der forttreibenden Gewalt des Pulvers verlohren geht, so ist hinwiederum bey Canonen-Schüssen die Erhitzung, welche durch die Entzündung des Pulvers verursachet wird, seiner Meynung nach grösser, als in kleinen Schießgewehren; und da hierdurch die forttreibende Kraft des Pulvers vermehret wird, so mag durch diesen Zuwachs der Gewalt der gedachte Abgang ungefehr ersetzet werden. Wir haben schon oben bemerket, wie viel Umstände der Autor in Berechnung der Geschwindigkeit der Kugel aus der Acht gelaßen. Da aber dieselben hauptsächlich bey Untersuchung der Natur und der wahren Kraft des Pulvers in Betrachtung gezogen werden müssen, so kann es zu dem gegenwärtigen Endzweck genug seyn, eine solche Formul, wodurch die Geschwindigkeit der Kugel ausgedruckt wird, zu erwehlen, welche mit der Experientz bey kleinern Kugeln übereinstimmend befunden worden, wenn in derselben auch gleich nicht auf alle Umstände gesehen wird. Denn es ist zu vermuthen, daß eine solche Regel, welche für kleine Kugeln der Wahrheit gemäß gefunden worden, auch für grosse Kugeln nicht so sehr von der Wahrheit abweichen werde; insonderheit da man in diesem Stück keine vollkommene Erkenntniß hoffen kann.

Wir wollen also hierzu die in der Anmerkung zu dem letzten Satz des vorigen Kapitels gegebene Formul gebrauchen, als welche keine weitläuftige Rechnung erfordert, und für kleine Kugeln fast eben diejenige Geschwindigkeit gibt, welche durch die Erfahrung befunden worden. Da sich aber in derselben zwey Buchstaben m und n befinden, welche auf der Güte des Pulvers beruhen, so wollen wir dafür diejenigen Werthe ansetzen, welche das Gouvernements-Pulver, so der Autor gebrauchet, denselben beyleget; es wird also ungefehr

$m = 244$ und $n = 850$. Dieses vorausgesetzt, so sey die Länge des ganzen Laufs $= a$, die Länge des Raums hinter der Kugel, welcher mit Pulver ausgefüllt wird, $= b$, und k die Höhe einer Luft-Säule, so dem Gewicht der Kugel gleich ist, und h die Höhe einer Luft-Säule, welche die Elasticität der Luft ausmißt, dergestalt, daß $h = 27980$ Rheinl. Schuh, wie wir befunden. Endlich sei v die Höhe, aus welcher ein fallender Körper eben diejenige Geschwindigkeit erlanget, mit welcher die Kugel heraus getrieben wird, und da hatten wir diese Vergleichung gefunden:

$$v = \frac{244\beta bh}{k+425b}\, l\, \frac{800a-396b}{404b}.$$ [1]

Es ist aber nach dem Autore $244\beta = 1000$ [2], und wenn wir in dem Bruch $\frac{800a-396b}{404b}$ für die Zahlen 396 und 404 die runde Zahl 400 setzen, als wodurch der Werth dieses Bruchs nicht merklich verändert wird, so bekommen wir

$$v = \frac{1000bh}{k+425b}\, l\, \frac{2a-b}{b}.$$

Setzt man nun hier für des Autoris erstes Experiment $a = 45$ Zoll, $b = 2\frac{5}{8}$ Zoll, $k = 4900$ Zoll, so kommen für die Geschwindigkeit der Kugel 1684 Englische Schuh in einer Secunde, welches mit der Wahrheit ziemlich genau übereinstimmt. Wenn nun c für den Diameter der Kugel [gesetzt wird], und die Materie der Kugel n mahl schwehrer ist, als die Luft, so wird $k = \frac{2}{3}nc$. Da nun das Gewicht des Pulvers ist $= 850b$, so wird sich das Gewicht der Kugel zum Gewicht der Ladung verhalten, wie k zu $850b$. Es sey also das Gewicht der Kugel $= P$, das Gewicht der Ladung $= Q$, so wird seyn $k : 850b = P : Q$ und also $k : b = 850P : Q$. Derowegen da in den Schüssen die Verhältniß zwischen dem Gewicht der Kugel und des Pulvers gegeben zu werden pflegt, so entspringet hieraus diese Aequation

$$v = \frac{1000Qh}{425(2P+Q)}\, l\, \frac{2a-b}{b},$$

oder da $h = 27980$ Rheinl. Schuh, so wird

$$v = \frac{65\,700Q}{2P+Q}\, l\, \frac{2a-b}{b}$$

Rheinl. Schuh.

---

1) Siehe p. 234. 2) Siehe p. 205. F. R. S.

Ferner da $k = \frac{2}{3} nc$, so wird

$$P : Q = \frac{2}{3} nc : 850\, b = nc : 1275\, b,$$

folglich

$$b = \frac{nQc}{1275 P};$$

und wird also b durch den Diameter der Kugel c bestimmt. Es pflegt aber auch die Länge des Stücks a in solchen Diametern ausgedrückt zu werden; wenn wir also setzen, daß $a = ic$, so wird

$$a : b = i : \frac{nQ}{1275\, P} = 1275\, i\, P : n\, Q$$

und also wird

$$v = \frac{65\,700\, Q}{2P + Q}\, l\, \frac{2550 i P - n Q}{n Q}$$

Rheinl. Schuh. Wenn nun, wie für die Canonen zu seyn pflegt, die Kugel von Eisen ist, so wird $n = 6647$ oder 6650, dahero für eiserne Kugeln seyn wird

$$v = \frac{65\,700\, Q}{2P + Q}\, l\, \frac{51 i P - 133\, Q}{133\, Q}$$

Rheinl. Schuh. Wenn also die Ladung Q halb so schwer genommen wird als die Kugel P, so bekommen wir

$$v = 13140\, l\, \frac{102 i - 133}{133}$$

Rheinl. Schuh. Beträgt aber die Ladung Q $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel P, so wird

$$v = 16425\, l\, \frac{153 i - 266}{266}$$

Rheinl. Schuh, und diese zwey Fälle werden hier von dem Autore in Betrachtung gezogen. Wir wollen aber noch über dieses setzen, daß die Ladung Q drey Viertel des Gewichts der Kugel ausmache, so wird

$$v = 17\,918\, l\, \frac{204 i - 399}{399}$$

Rheinl. Schuh.

Und wenn endlich die Ladung Q an Pulver dem Gewicht der Kugel selbst gleich genommen wird, so bekommt man

$$v = 21900\, l\, \frac{51i - 133}{133}.$$

Der Autor betrachtet ferner nur die Schüsse einer halben Carthaune, indem er das Gewicht der Kugel 24 ℔ setzt; wir wollen aber hier aus diesen Formuln die Geschwindigkeit der Kugeln für alle gebräuchliche Arten der Stücke ausrechnen. Hier kommen also erstlich vor die ganzen Carthaunen, aus welchen 48pfündige Kugeln geschossen werden; in denselben pflegt $i = 18$ zu seyn. Hernach folgen die drey Viertel-Carthaunen, welche Kugeln von 36 ℔ schiessen; in diesen ist gemeiniglich $i = 20$. Drittens kommen die halben Carthaunen, so 24pfündige Kugeln schiessen, und in welchen $i = 24$. In Viertel-Carthaunen von 12pfündigen Kugeln ist $i = 26$, in Achtel-Carthaunen oder 6pfündigen Kugeln ist $i = 27$. In Regiments-Stücken ist aber selten i mehr, als 18. Außer diesen pflegen noch andere Arten Stücke gebraucht zu werden, als da sind die ganzen Feldschlangen, aus welchen 18pfündige Kugeln geschossen werden, in diesen ist $i = 30$; für halbe Feld-Schlangen ist $i = 32$; für Viertel- oder vielmehr Drittel-Feldschlangen, weil die Kugeln 6 Pfund wägen, ist $i = 34$. In Quartier-Feldschlangen oder Falkonets ist $i = 36$; in halben Falkonets ist $i = 38$, und in den Serpentineln ist $i = 40$. Aus allen diesen verschiedenen Arten von Stücken wird also die Kugel mit einer solchen Geschwindigkeit heraus geschossen, als die nachfolgende Tabelle ausweiset, welche aus 4 Columnen besteht. Die erste gilt, wenn das Gewicht der Ladung halb so groß ist, als das Gewicht der Kugel, die andere, wenn die Ladung $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel austrägt; die dritte ist für die Ladung, welche $\frac{3}{4}$ des Gewichts der Kugel ausmacht, und die vierte, wenn die Ladung der Kugel gleich ist. Die Geschwindigkeit ist endlich in Rheinl. Schuhen ausgedruckt, so viel die Kugel in einer Secunde durchlaufen würde.

	h. Lad.	$\frac{2}{3}$ Lad.	$\frac{3}{4}$ Lad.	g. Lad.	i
ganze Carth.	1447	1515	1535	1559	18
3 viert. Carth.	1479	1554	1577	1612	20
halbe Carth.	1532	1618	1647	1697	24
viertel Carth.	1554	1645	1676	1733	26
achtel Carth.	1565	1657	1690	1749	27
Reg.-Stück	1447	1515	1535	1559	18
g. Feld-Schl.	1593	1692	1727	1794	30
h. Feld-Schl.	1610	1712	1749	1821	32
dr. Feld-Schl.	1626	1731	1769	1845	34
Falkonets	1642	1749	1788	1868	36
h. Falkonets	1656	1766	1806	1889	38
Serpentinel	1669	1781	1823	1909	40

Aus diesem Täflein sieht man also, daß, wenn die Ladung zum Gewicht der Kugel einerley Verhältniß hat, alsdenn die Geschwindigkeit der Kugel um so viel grösser heraus komme, je mehrmahl der Diameter der Kugel in der Länge des Stücks enthalten ist. Also treibet eine ganze Carthaune ihre Kugel mit einer geringeren Geschwindigkeit heraus, als eine halbe Carthaune, welches denen Artilleristen, welche von dem Wiederstand der Luft keinen rechten Begrif haben, unglaublich und ungereimt vorkommen wird. Denn da durch die Erfahrung bekannt ist, daß unter einerley Richtung der Schuß einer ganzen Carthaune weiter reicht als einer halben, so scheinet daraus zu folgen, daß auch die Kugel der ganzen Carthaune eine grössere Geschwindigkeit haben müsse, als einer halben. Dieser Schluß würde seine völlige Richtigkeit haben, wenn entweder der Wiederstand der Luft gar nicht vorhanden, oder doch nicht merklich wäre, wie man insgemein dafür zu halten pflegt; denn alsdenn müßte auch ohne Zweifel ein Schuß unter einerley Richtung des Stücks um so viel weiter reichen, je grösser die Geschwindigkeit wäre, mit welcher die Kugel heraus getrieben wird. Weil aber der Wiederstand der Luft so erstaunlich groß ist, wie allbereit dargethan worden, und derselbe insonderheit von der Größe der Kugel abhängt, so ist es möglich, daß eine grössere Kugel weiter reicht, als eine kleinere, wenn auch jener anfänglich eine kleinere Geschwindigkeit eingedruckt worden, als dieser. Um dieses begreiflicher zu machen, so ist zu merken, daß die Würkung des Wiederstands nicht so wohl aus der Grösse

desselben selbst, als aus der Verhältniß desselben zum Gewicht der Kugel beurtheilet werden müße. Wenn wir uns also zwey Kugeln von gleicher Materie vorstellen, wovon die erste dem Diameter nach zweymahl so groß seyn soll, als die andere, so wird das Gewicht der ersten acht mahl grösser sein, als der andern. Ob nun gleich der Wiederstand der ersten viermahl grösser ist, als der anderen, wenn ihre Geschwindigkeiten einander gleich sind, indem der Wiederstand sich nach den Oberflächen, oder nach den Quadraten der Diametrorum richtet, so wird doch die Würkung des Wiederstands der ersten Kugel sich zur andern verhalten, nicht wie 4 zu 1, sondern wie $\frac{4}{8}$ zu $\frac{1}{1}$, folglich wird die Würkung des Wiederstands in der ersten und grösten Kugel nur halb so groß seyn, als in der andern. Hieraus erhellet nun, daß wenn diese beyden Kugeln mit einerley Geschwindigkeit und Richtung geworfen würden, die erstere nothwendig viel weiter reichen würde, als die andere; und wenn beyde gleich weit gehen sollten, so würde die grössere anfänglich einen kleinern Grad der Geschwindigkeit gehabt haben, als die kleinere. Dieser Unterscheid ist auch, wie aus dem folgenden mit mehrerem erhellen wird, so groß, daß sich daraus gar leicht begreifen läßt, wie eine grössere Kugel unter einerley Richtung weiter getrieben werden könne, als eine kleinere, ungeachtet jene anfänglich keine so grosse Geschwindigkeit gehabt, als diese.

Der Autor betrachtet nur eine eiserne 24pfündige oder halbe Carthaunen-Kugel, und gibt derselben, wenn die Ladung 16 ℔ ist, eine Geschwindigkeit von 1650 Schuhen in 1″, welches ziemlich genau mit unserer Bestimmung übereintrift; denn die Tabelle weiset für diesen Fall 1618 Rheinl. Schuh, welches 1666 englische Schuh beträgt. Wenn aber die Ladung nur halb so schwehr ist, als die Kugel, nehmlich von 12 ℔, so setzt der Autor die Geschwindigkeit nur von 1490 Engl. Schuhen in 1″, da wir für diesen Fall 1532 Rheinl. oder 1577 Engl. Schuh gefunden. Es ist aber zu merken, daß der Autor die Geschwindigkeit nach einer solchen Regel gerechnet, in welcher alle nöthige Umstände, welche sich bey Entzündung des Pulvers ereignen, aus der Acht gelassen worden. Die Regel, deren sich derselbe bedient, ist in dieser Formul enthalten

$$v = \frac{1000bh}{k} l \frac{a}{b}$$

oder, wenn die Gewichte der Ladung und der Kugel eingeführet werden, in dieser

$$v = \frac{32850Q}{P} l \frac{1275iP}{nQ}$$

Rheinl. Schuh, wo P, Q, n und i eben die Werthe haben, welche denselben in unserer Formul beygeleget worden. Wenn also die Kugel von Eisen ist, so ist nach des Autoris Regel

$$v = \frac{32850\,Q}{P}\,l\,\frac{51\,i\,P}{266\,Q},$$

und wenn die Ladung Q halb so groß ist, als das Gewicht der Kugel P, so wird

$$v = 16425\,l\,\frac{51\,i}{133}.$$

Wenn nun hier $i = 24$ gesetzt wird, wie in den halben Carthaunen zu seyn pflegt, so findet man die Geschwindigkeit der Kugel $= 1509$ Rheinl. oder 1554 Engl. Schuh in einer Secunde, welches von des Autoris Rechnung ziemlich unterschieden ist. Wenn nun kein Druckfehler in des Autoris Zahl eingeschlichen ist, so mag der Unterscheid außer den Buchstaben h und k, welche der Autor etwas anders bestimmet, insonderheit daher rühren, daß wir hier den Diameter der Kugel dem Diameter der Mündung des Stücks gänzlich gleich gesetzet haben, da sich doch dazwischen wegen des Spielraums ein kleiner Unterscheid befindet. Weil sich aber wegen so vieler andern Umstände hierinn nichts genaues bestimmen läßt, so haben wir nicht nöthig erachtet, diesen Umstand in Betrachtung zu ziehen, und dadurch die Rechnung beschwerlicher zu machen. Die Haupt-Ursache aber des Unterscheids zwischen des Autoris und unserer Formul steckt darinn, daß derselbe die gröbere Materie des Pulvers, welche theils mit in Bewegung gesetzt werden muß, theils den Raum der zusammen gepreßten Luft vermindert, gar nicht in Betrachtung gezogen hat. Der erstere Umstand, daß diese gröbere Materie mit in Bewegung gesetzt werden muß, vermindert die Geschwindigkeit der Kugel; der andere aber, insofern die zusammen gepreßte Luft dadurch in einen kleinern Raum eingeschränckt wird, macht die Geschwindigkeit der Kugel grösser. Wenn also diese beyden Würkungen beynahe gleich viel austragen, so stimmet des Autoris Regel mit der unsrigen überein, wie bey der 24pfündigen Kugel, welche mit 16 ℔ Pulver geschossen wird, geschehen; in andern Fällen aber hat man sich nicht zu verwundern, wenn dieselben sehr merklich von einander abgehen. Inzwischen haben wir doch Ursache zu glauben, daß die in obiger Tabelle gegebenen Zahlen zu groß seyn werden, indem wir darinn angenommen, daß sich alles Pulver auf einmahl entzünde, und auch den wegen des Spielraums entstehenden Verlust der forttreibenden Kraft nicht in Betrachtung gezogen haben. Unter-

dessen wird doch die Verhältniß derselben Zahlen unter sich ziemlicher maßen richtig seyn, dergestalt, daß wenn man wüßte, um wie viel eine derselben zu groß wäre, man auch die übrigen darnach verbessern könnte. Sollte also eine halbe Carthaunen-Kugel durch 16 ℔ Pulver würklich eine Geschwindigkeit von 1650 Engl. oder 1601 Rheinl. Schuhen erhalten, so würden unsere Zahlen nur ungefehr um 20 Schuh zu groß seyn, welcher Unterscheid vermittelst der Versuche unmöglich wahrgenommen werden kann.

ZWEYTE ANMERKUNG

Wir haben in diesen Rechnungen angenommen, daß das Pulver eben so schwehr, als Wasser, und folglich 850 mahl schwehrer sey, als Luft, welches von der Wahrheit nicht merklich abweichen mag. Denn obgleich die Pulver-Körner in dem Wasser zu Boden fallen, so trägt hinwiederum die zwischen den Körnern enthaltene Luft so viel aus, daß ein cubischer Schuh Pulver bey nahe eben so viel wägen kann, als Wasser. Wenn wir des Autoris Regel, um die Geschwindigkeit der Kugel zu finden, [anwenden] nehmlich

$$v = \frac{1000\,bh}{k}\, l\frac{a}{b},$$

und die Schwehre des Pulvers dergestalt bestimmen, daß für eine 24pfündige eiserne Kugel, welche mit 16 Pfund Pulver geschossen wird, eine Geschwindigkeit von 1650 Engl. Schuhen in 1″ heraus kommt, so müßte das Pulver 910 mahl schwehrer, als die Luft angenommen werden. Hierbey ist aber der Spielraum nicht in Betrachtung gezogen worden, welcher in Canonen gemeiniglich den 15ten Theil der ganzen Mündung[1]) beträgt. Wenn wir also setzen, daß das Pulver in der That m mahl schwehrer sey, als Luft, so wird die Schwehre der Ladung Q dem Gewicht eines Cylinders Luft gleich seyn, dessen Dicke mit der Kugel einerley, die Höhe aber $= \frac{16}{15}mb$. Und also wird sich verhalten $P : Q = \frac{2}{3}nc : \frac{16}{15}mb$, oder wie k zu $\frac{16}{15}mb$; und muß folglich nach des Autoris Rechnung gesetzt werden $\frac{16}{15}m = 910$, woraus kommt $m = 853$, fast wie wir angenommen haben. Wenn wir aber den Spielraum mit in unsere obige Rech-

1) Das Wort *Mündung* bedeutet hier die Großkreisfläche des kugelförmigen Projektiles.
F. R. S.

nung ziehen wollen, so müssen wir an statt der Zahl 850 in der Verhältniß P zu Q, die Zahl 910 gebrauchen, so kommt $P:Q = nc:1365b$, und da $a = ic$, so wird $a:b = 1365iP:nQ$, und $k:b = 910P:Q$. Hieraus entspringt

$$v = \frac{1000\,Qh}{455\,(2P+Q)}\, l\frac{2730\,iP - nQ}{nQ}$$

oder

$$v = \frac{61494\,Q}{2P+Q}\, l\frac{65\,iP - 158\,Q}{158\,Q}$$

Rheinl. Schuh für eine eiserne Kugel. Und nach den oben angenommenen Verhältnissen zwischen P und Q, kommt heraus:

Wenn $Q = \frac{1}{2}P$,

$$v = 12298{,}8\, l\frac{65\,i - 79}{79},$$

wenn $Q = \frac{2}{3}P$,

$$v = 15373{,}5\, l\frac{195\,i - 316}{316},$$

wenn $Q = \frac{3}{4}P$,

$$v = 16771{,}1\, l\frac{130\,i - 237}{237},$$ [1]

wenn $Q = P$,

$$v = 20498{,}0\, l\frac{65\,i - 158}{158}.$$

Und hieraus kann nach Belieben die obige Tabelle verbessert, oder von neuem berechnet werden.

Wir wollen nun aus dieser Vergleichung, welche der Wahrheit näher kommen muß, als die vorhergehende, eine andere Tabelle ausrechnen; und damit man aus derselben mehr Nutzen ziehen könne, so wollen wir auch kleinere Ladungen betrachten. Zu diesem Ende wollen wir das Gewicht der Kugel, welche von Eisen angenommen wird, in 6 gleiche Theile theilen, und die Rechnung auf 6 verschiedene Ladungen richten. Erstlich soll die Ladung an Pulver dem sechsten Theil des Gewichts der Kugel gleich seyn, hernach zwey Sechsteln, drittens drey Sechsteln, viertens vier Sechsteln, fünftens fünf Sechsteln, und endlich sechstens sechs Sechsteln, oder dem ganzen Gewicht

1) Im Original $v = 16\,862{,}0\, l\frac{130\,i - 237}{237}$. Berichtigt von F. R. S.

der Kugel gleich seyn. Wenn also die ganze Länge des Stücks sich zum Diameter der Kugel verhält, wie i zu 1, und v die Höhe in Rheinl. Schuhen andeutet, aus welcher ein Körper durch den Fall in einem Luft-leeren Raum eine gleiche Geschwindigkeit mit der Kugel erhält, so wird für diese sechserley Ladungen der Werth von v also ausgedrückt werden. Es ist nehmlich wie vorher P das Gewicht der Kugel, und Q das Gewicht der Ladung an Pulver:

Wenn	so wird seyn
$Q = \frac{1}{6} P$	$v = 4730{,}31\, l\,\frac{780i - 316}{316}$
$Q = \frac{2}{6} P$	$v = 8784{,}85\, l\,\frac{390i - 316}{316}$
$Q = \frac{3}{6} P$	$v = 12298{,}8\, l\,\frac{260i - 316}{316}$
$Q = \frac{4}{6} P$	$v = 15373{,}5\, l\,\frac{195i - 316}{316}$
$Q = \frac{5}{6} P$	$v = 18086{,}5\, l\,\frac{156i - 316}{316}$
$Q = \frac{6}{6} P$	$v = 20498{,}0\, l\,\frac{130i - 316}{316}$

Weil hernach ferner die Geschwindigkeit der Kugel nicht sowohl auf dem Nahmen der Stücke, als auf der Grösse der Zahl i beruhet, so wollen wir wie vorher erstlich $i = 18$ setzen, und damit immer um zwey aufsteigen, bis auf 40. Solchergestalt werden hierunter alle mögliche Arten von Stücken begriffen werden. Denn wenn auch bißweilen i eine ungrade Zahl seyn solte, so wird es leicht seyn, aus den nächsten geraden Zahlen für diese Fälle die Geschwindigkeit zu schliessen. Damit man aber auch für kürzere Stücke die Geschwindigkeit finden könne, so wollen wir mit $i = 10$ den Anfang machen, und wie oben die Geschwindigkeiten der Kugel, in Rheinl. Schuhen auf eine Secunde gerechnet, ausdrücken.

Länge des Stücks Caliber	Ladung					
	$\frac{1}{6}$ Kug.	$\frac{2}{6}$ Kug.	$\frac{3}{6}$ Kug.	$\frac{4}{6}$ Kug.	$\frac{5}{6}$ Kug.	$\frac{6}{6}$ Kug.
10	967	1155	1233	1256	1245	1206
12	996	1201	1295	1336	1342	1325
14	1019	1238	1345	1398	1417	1414
16	1039	1269	1386	1448	1478	1484
18	1056	1295	1420	1491	1528	1543
20	1071	1318	1450	1527	1571	1592
22	1084	1338	1477	1559	1608	1635
24	1096	1357	1501	1588	1642	1672
26	1107	1374	1522	1614	1671	1706
28	1117	1389	1542	1637	1698	1736
30	1126	1403	1560	1658	1723	1764
32	1135	1416	1576	1678	1745	1789
34	1143	1428	1591	1696	1766	1813
36	1150	1439	1605	1713	1785	1834
38	1157	1449	1619	1729	1803	1854
40	1164	1459	1631	1744	1820	1873

Man kann aus dieser Tabelle einen vielfältigen Nutzen ziehen, und mancherley Umstände, welche in der Artillerie vorkommen, erklären. Erstlich sieht man daraus, daß, wenn die Ladung nach dem Gewicht des Pulvers gegeben, die Geschwindigkeit der Kugel immer grösser werde, je länger das Stück ist. Dieses scheinet zwar mit der Erfahrung zu streiten, indem man insgemein der Meynung ist, als wenn die Geschwindigkeit der Kugel in einem allzulangen Stücke wiederum geschwächet würde, und aus diesem Grunde hat man die vortheilhafteste Länge eines Stücks bestimmen wollen. Ungeachtet aber die Kugel in dem Stücke den Wiederstand der Luft auf sich empfindet, so ist derselbe doch nicht nur nicht grösser, als in der freyen Luft, sondern wenn die Geschwindigkeit sehr groß ist, noch um ein merkliches kleiner, indem hinter der Kugel in dem Stück kein leerer Raum statt finden kann, wie in der offenen Luft zu geschehen pflegt. Ueber dieses bleibet die forttreibende Kraft des Pulvers, so lange sich die Kugel in dem Stück befindet, noch sehr beträchtlich, und also hinlänglich, die Geschwindigkeit derselben zu vermehren; und was die Friction anlanget, so ist schon oben dargethan worden, daß dieselbe in Ansehung der grossen Gewalt des Pulvers nicht verdiene, in Betrachtung gezogen zu werden. Da also die Kugel, so lange sie in dem Stück ist, keine Verminderung ihrer Bewegung leidet, welcher dieselbe in offener Luft

nicht in einem höheren Grad ausgesetzt wäre, und außer dem darinnen immer noch mehr fortgetrieben wird, so ist es unmöglich zu begreiffen, wie eine allzu große Länge des Stücks die Geschwindigkeit der Kugel vermindern könnte. Es könnte zwar geschehen, daß, wenn das Stück nicht nach einer geraden Linie gebohret worden, die Kugel darinnen einen so grossen Abgang an ihrer Bewegung litte, daß dieselbe, wenn das Stück kürzer gemacht, und der krumme Theil davon abgeschnitten würde, die Kugel eine grössere Geschwindigkeit erhielte; und dieser Umstand hat sich ohne Zweifel in denjenigen Versuchen ereignet, worauf man diese Meynung zu gründen pflegt. Man beruft sich nehmlich auf einen Zufall, da von einer sehr langen Canone ein Stück $2\frac{1}{2}$ Schuh lang ungefehr abgesprungen, wobey man wahrgenommen haben soll, daß aus demselben Stück nach diesem Zufall die Kugeln mit einer grösseren Geschwindigkeit geschossen worden, als vorher. Allein eben dieser Zufall scheinet zu beweisen, daß die Seele dieses Stücks vorher gekrümmet gewesen, und daß das gemeldte Stücke daraus nicht so wohl von der Gewalt des Pulvers, als von dem Anstossen der Kugel, abgesprungen. Hernach pflegt man sich auch, um diese Meynung zu behaupten, auf die Veränderung, welche mit den alten Canonen [vorgenommen wurde], als welche viel länger waren, als heut zu Tag, zu beruffen. Denn da man durch diese Verkürzung keinen geringen Vortheil erhalten zu haben glaubt, so will man daraus schliessen, daß eine nach der heutigen Art gegossene Canone die Kugel mit einer grösseren Geschwindigkeit heraus treibt, als wenn dieselbe länger wäre. Man beweiset aber dieses durch kein tüchtiges Experiment, sondern führt nur an, wie man wahrgenommen, daß eine alte Canone von 96 ℔ nicht so weit geschossen, als eine heutige gantze Carthaune von 48 ℔, ungeachtet jene länger gewesen, als diese. Wenn nun gleich in beyden Fällen die Ladung an Pulver zum Gewicht der Kugel einerley Verhältniß gehabt, so ist doch zu merken, daß die Geschwindigkeit der Kugel nicht so wohl von der Länge der Canone, als von der Anzahl der Caliber abhange. Also mag wohl eine solche 96pfündige Canone länger gewesen seyn, als eine heutige ganze Carthaune, ungeachtet ihre Länge weniger Caliber in sich enthalten; und wenn eine 96pfündige Canone ihre Kugel mit eben der Geschwindigkeit als eine ganze Carthaune hätte heraus treiben sollen, so hätte jene um den vierten Theil länger seyn müssen, als diese.

Die fürnehmste Ursache aber, weswegen man die alten langen und schwehren Canonen abgeschafft, war ohne Zweifel die grosse Beschwerlichkeit, dieselben im Felde fortzuschleppen, welche weder durch die Grösse der Kugeln, noch durch die grössere Geschwindigkeit derselben ersetzt werden kann. Denn

wenn eine Breche geschossen werden soll, so thut eine zweymahl so schwehre Kugel keine zweymahl so starke Würkung, indem dieselbe kein zweymahl so grosses Loch in den Wall, welcher zerstört werden soll, macht; dahero zwey Schüsse mit einer halb so schwehren Kugel weit mehr ausrichten, und dabey nicht mehr kosten, als ein Schuß aus der doppelten Canone. Um dieser Ursache willen werden auch die ganzen 48pfündigen Carthaunen bey dem Breche-Schiessen nicht mehr gebrauchet, indem man durch halbe Carthaunen mit weniger Mühe und Unkosten den vorgesetzten Zweck erhalten kann. Hingegen aber werden die ganzen Carthaunen auf der See mit weit grösserem Vortheil gebraucht, als die halben. Denn wenn ein Schiff von einer ganzen Carthaune unter dem Wasser wohl getroffen wird, so läßt sich das Loch nicht nur nicht so leicht wiederum zustopffen, sondern die Kugel verursachet noch dazu so viel Splitter, daß die Umstehenden dadurch auf eine gute Entfernung beschädigt, und ums Leben gebracht werden.

Hernach hat man auch auf die Vermehrung der Geschwindigkeit so sehr nicht nöthig zu sehen. Denn wenn die Kugel so geschwind heraus geschossen wird, daß dieselbe entweder zu Lande den Wall auf eine gewisse Tiefe, oder zu Wasser das Schiff durch zu bohren vermögend ist, so würde es unnöthig und in einigen Fällen so gar schädlich seyn, der Kugel eine grössere Geschwindigkeit einzudrücken. Wenn nun eine 24pfündige Kugel, welche aus einer halben Carthaune mit 12 ℔ Pulver geschossen wird, die erwünschte Würkung thut, so beträgt dieser erforderte Grad der Geschwindigkeit ungefehr 1500 Schuh in einer Secunde. Bey Batterie-Stücken kommt es also darauf an, daß man die Länge der Canone bestimme, damit dadurch einer 24pfündigen Kugel eine Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde eingedruckt werde. Soll nun dieses mit 12 ℔ Pulver bewerkstelliget werden, so muß die Canone 24 Caliber lang seyn, welches das ordentliche Maaß der halben Carthaune zu seyn pflegt. Wollte man aber eben diese Würkung mit weniger Pulver zu wege bringen, so müßte die Canone viel länger seyn; denn wenn man nur 8 ℔ Pulver brauchen wolte, so würden 40 Caliber noch lange nicht für die Länge des Stücks hinlänglich seyn. Wollte man aber mehr Pulver zu einem jeglichen Schuß anwenden, so könnte man an der Länge der Canone etwas gewinnen: als wenn man zu einem jeden Schuß 16 ℔ Pulver brauchen wolte, so dürfte die Länge der Canone nur ungefehr 19 Caliber betragen. Wolte man aber 20 biß 24 ℔ Pulver laden, so müßte doch die Canone nicht kürzer, als 17 Caliber seyn. Wenn man also die Unkosten des Pulvers mit den Beschwerden

der Länge und folglich des Gewichts der Canonen vergleichen könnte, so würde es leicht seyn, hieraus die vortheilhafteste Länge der Canonen zu bestimmen. Zum wenigsten sieht man hieraus so viel, daß es vortheilhafter ist, 12 ℔ Pulver zu gebrauchen, und die Canone 24 Caliber lang zu machen, als an der Ladung 4 ℔ zu erspahren, hingegen aber die Canone mehr als 40 Caliber lang zu machen. Was hernach die Ladung von 16 ℔ Pulver betrift, so scheinet der Vortheil von 5 Calibern, welche man an der Länge der Canone gewinnt, die grössern Unkosten in Ansehung des Pulvers nicht zu ersetzen. Dahero die gebräuchliche Ladung von 12 ℔ Pulver und die Länge des Stücks von 24 Caliber die bequemste zu seyn scheinet.

Weil ferner eine grössere Kugel in der Luft nicht so viel von ihrer Geschwindigkeit verliert, als eine kleinere, so ist auch nicht nöthig, daß derselben von dem Pulver eine so grosse Geschwindigkeit eingedruckt werde, als den kleinern. Also kan eine 48pfündige Kugel eben so tief in einen Wall hinein dringen, als eine 24pfündige, wenn gleich die erste Geschwindigkeit jener kleiner ist, als dieser. Wenn die ganzen Carthaunen zu diesem Endzweck hinreichend sind, so muß die nöthige Geschwindigkeit einer 48pfündigen Kugel 1420 Schuh in einer Secunde betragen. Wenn man nun diese Geschwindigkeit mit 16 ℔ Pulver erhalten wolte, so müste die Canone 34 Caliber lang seyn, dergleichen Maschine zum Gebrauch gänzlich untüchtig seyn würde. Will man aber zu einem Schuß 24 Pfund Pulver gebrauchen, so ist eine Länge von 18 Calibern genug, welche die aller vortheilhafteste ist: indem, wenn man auch mehr Pulver, als 32 ℔ zu einem Schuß anwenden wolte, man an der Länge nur 2 Caliber gewinnen würde.

Solten aber kleine Kugeln eben so weit gehen, als eine 24pfündige, welche mit einer Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde heraus geschossen wird, so müssen dieselben, wegen des grösseren Wiederstands der Luft auch anfänglich eine grössere Geschwindigkeit haben. Alles beruhet also auf dem Endzweck, welchen man sich bey einer jeglichen Art von Schüssen vorsetzt. Denn daraus erkennet man die Geschwindigkeit, welche die Kugel, in dem sie aus dem Stück fähret, haben muß, und hieraus kan man ferner die vortheilhafteste Länge des Stückes, nebst der bequemsten Ladung finden. Wir wollen setzen, daß man ein Stück verlange, aus welchem eine 18pfündige Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1650 Schuhen in einer Secunde geschossen würde. Wenn man nun hierüber die gegebene Tabelle zu Rathe zieht, so sieht man leicht, daß dieses weder mit einer Ladung von 3 Pfund, noch 6 Pfund, noch 9 Pfund Pulver geschehen könne, dieweil auch in dem letzten Fall das Stück

noch über 40 Caliber lang sein müste. Wolte man aber dazu 12 Pfund Pulver gebrauchen, so müßte die Canone 30 Caliber lang seyn; für 15 Pfund Pulver aber wird die Canone ungefehr 25 Caliber lang, und für 18 Pfund Pulver wird dieselbe ungefehr 23 Caliber lang. Bey den letzten Fällen sieht man wohl, daß man um 2 Caliber willen nicht 3 Pfund Pulver mehr laden werde, 5 Caliber aber möchten den Zuwachs der Ladung von 3 Pfund ungefehr ersetzen. Dahero wird die Canone am füglichsten 30 Caliber lang, und die Ladung 12 Pfund schwehr genommen werden. Dieser Umstand ereignet sich in der That bey den Feld-Schlangen, deren Endzweck in weit reichenden Schüssen bestehet.

DRITTE ANMERKUNG

Wenn wir nun diese Bestimmungen, welche durch die Erfahrung bestätiget worden, zum Grunde legen, so kann daraus nachfolgende Regel hergeleitet werden, vermittelst welcher man für eine jede Geschwindigkeit, welche der Kugel mitgeteilt werden soll, die vortheilhaftigste Länge der Canone, nebst der dazu gehörigen Ladung anzeigen kann.

Es sey n der Weg in Rheinländischen Schuhen, welchen die Kugel in einer Secunde beschreiben soll; die Länge der Canone halte i Caliber oder Diameter der Kugel, und die Ladung verhalte sich zum Gewicht der Kugel, wie m zu 1, das ist, es sey $Q = mP$. Da nun oben v die Höhe angedeutet, aus welcher ein Körper durch den Fall mit der Kugel einerley Geschwindigkeit erhält, so ist

$$n = \frac{1}{4}\sqrt{1000v},$$

und folglich

$$v = \frac{16nn}{1000}.$$

Oben[1]) ist aber gefunden worden

$$v = \frac{61494\,Q}{2P+Q}\, l\, \frac{65\,iP - 158\,Q}{158\,Q}$$

oder

$$v = \frac{61494\,m}{2+m}\, l\, \frac{65\,i:m - 158}{158}$$

Rheinl. Schuh. In den obigen Bestimmungen aber der Canonen, welche durch die Erfahrung bestätiget worden, hält i zu m fast überall einerley Verhältniß, welches für halbe Carthaunen, so 24 Caliber lang gemacht werden, ist wie 48 zu 1. Bey

1) Siehe p. 325. F. R. S.

ganzen Carthaunen kommt zwar diese Verhältniß $i:m = 36:1$, in andern Arten von Stücken aber fällt der Werth von $\frac{i}{m}$ zwischen 48 und 36. Da man nun die halben Carthaunen in ihrer Art für vollkommener hält, als die ganzen, so muß der vortheilhafteste Werth des Bruchs $\frac{i}{m}$ der Zahl 48 näher kommen, als der Zahl 36; und da die halben Carthaunen auch bißweilen nur 22 Caliber lang gemacht zu werden pflegen, woraus $\frac{i}{m} = 44$ wird, so haben wir alle Ursache zu vermuthen, daß wir den in der Praxi abgezielten grösten Vortheil am nächsten erhalten werden, wenn wir der Verhältniß $i:m$ beständig den Werth $45:1$ beylegen. Es sey also $\frac{i}{m} = 45$; und hieraus kann man sogleich für alle Arten von Stücken, wenn die Länge derselben in Calibern bekannt, die beste Ladung finden. Man darf nehmlich nur die Anzahl der Caliber durch 45 dividiren, so wird der Quotient anzeigen, den wie vielten Theil des Gewichts der Kugel das Pulver austragen müße. Also wenn ein Stück 30 Caliber lang ist, so wird die tüchtigste Ladung $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel. Und hinwiederum, wenn die Ladung in Ansehung des Gewichts der Kugel, oder der Buchstabe m bekannt ist, so findet man daraus die bequemste Länge der Canone in Calibern also ausgedrückt $i = 45m$. Wenn also die Ladung dem halben Gewicht der Kugel gleich seyn soll, so muß die Länge der Canone $22\frac{1}{2}$ Caliber halten. Wolte man aber die Ladung dem ganzen Gewicht der Kugel gleich setzen, so müste die zu diesem Ende bequemste Canone 45 Caliber lang seyn.

Da wir nun also die bequemste Verhältniß zwischen i und m entdeckt haben, so kann man daraus leicht für eine jede Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel aus der Canone geschossen werden soll, die vortheilhafteste Länge derselben nebst der dazu erforderten Ladung bestimmen. Denn weil der Bruch $\frac{i}{m}$ allezeit einerley Werth behält, so ist auch für alle Fälle der Logarithmus $l\,\frac{65\,i:m - 158}{158}$ einerley; wodurch die Rechnung ungemein erleichtert wird. Man setze also $\frac{i}{m} = 45$, so wird

$$l\,\frac{65\,i:m - 158}{158} = l\,\frac{2767}{158} = 2{,}86292.$$

Da nun $v = \frac{16\,nn}{1000}$, so wird

$$\frac{16\,nn}{1000} = \frac{61494\,m}{2+m} \cdot 2{,}86292 \quad \text{oder} \quad nn = \frac{11\,003\,300\,m}{2+m},$$

woraus also kommt

$$\frac{2+m}{m} = 1 + \frac{2}{m} = 1 + \frac{90}{i} = \frac{11\,003\,300}{nn}.$$

Aus dieser Formul ist nun die nachfolgende Tabelle berechnet worden, welche für eine jegliche Geschwindigkeit der Kugel die Länge der Canone in Calibern, und die Ladung in tausendsten Theilen des Gewichts der Kugel anzeigt:

Geschwindigkeit der Kugel in Rh. Schuhen, auf 1 Secunde	Länge der Canone in Calibern und hundertsten Theilen	Pulver Ladung in tausendsten Theilen des Gewichts der Kugel
500	2,09	46
550	2,54	57
600	3,04	68
650	3,59	80
700	4,19	93
750	4,85	108
800	5,56	124
850	6,32	141
900	7,15	159
950	8,02	179
1000	9,00	200
1050	10,02	223
1100	11,12	248
1150	12,29	273
1200	13,55	308
1250	14,89	331
1300	16,33	363
1350	17,87	397
1400	19,51	434
1450	21,26	484
1500	23,14	514
1550	25,14	559
1600	27,29	606
1650	29,59	659
1700	32,06	712
1750	34,71	771
1800	37,56	835
1850	40,63	903
1900	43,95	977
1950	47,53	1056
2000	51,40	1142
2050	55,61	1236
2100	60,20	1338
2150	65,20	1449
2200	70,68	1571

Durch Hülfe dieser Tabelle ist es also leicht, für einen jeglichen gegebenen Fall, die bequemste Form der Canone, nebst der dazu gehörigen Ladung zu bestimmen, wenn man nur die Geschwindigkeit der Kugel weiß, welche zu Erhaltung des vorgesetzten Endzwecks erfordert wird. Hierbey ist es aber öfters am schwehrsten, diesen Grad der Geschwindigkeit zu finden, indem man bißher nicht einmahl im Stand gewesen, die Grösse der Geschwindigkeit einer Canon-Kugel nur beyläufig auszumessen. Da man aber aus der Länge der Canone und der Grösse der Ladung die Geschwindigkeit der Kugel ziemlich genau ausrechnen kann, so darf man nur aus einer schon vorhandenen Canone mit verschiedenen Ladungen einige Schüsse thun, und sehen, welcher noch vermögend ist, dem vorgesetzten Endzweck ein Genügen zu leisten: und auf diese Art kann man sodann die dazu erforderte Geschwindigkeit durch die Rechnung bestimmen. Nur ist zu merken, daß man diese Prob-Schüsse mit einer eben so grossen Kugel, als bey der verlangten Canone gebraucht werden soll, und in eben der Distantz, anstellen muß, weil der Wiederstand der Luft sowohl auf Kugeln von ungleicher Grösse, als auf verschiedene Distantzen eine ungleiche Würkung ausübet. Diese Ungleichheit soll aber im folgenden dergestalt ausgeführt werden, daß wenn auch die Probe mit grösseren oder kleineren Kugeln in verschiedenen Distantzen angestellt werden solte, man daraus gleichwohl die nöthige Geschwindigkeit bestimmen könnte. Wenn also zum Breche-schiessen eine 24pfündige Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde aus der Canone herausgetrieben werden soll, so sieht man aus der gegebenen Tabelle, daß die zu diesem Ende tüchtigste Canone $23\frac{14}{100}$ Caliber lang seyn, und daß die Ladung an Pulver $\frac{514}{1000}$ des Gewichts der Kugel oder $12\frac{1}{3}$ Pfund genommen werden müsse, welches mit der üblichen Einrichtung der halben Carthaunen sehr genau übereinkömmt. Es giebt aber viel Gelegenheiten, in welchen es nicht nöthig ist, daß die Kugel eine so grosse Geschwindigkeit habe, als bey des VAUBANS Batterien à Ricochet, und wenn durch die Kugeln nur Menschen in keiner allzugrossen Entfernung getödtet werden sollen. Wenn nun zu diesem Ende eine Geschwindigkeit von 1000 Schuhen in 1″ hinlänglich wäre, so dürften dazu die tauglichsten Canonen nicht mehr als 9 Caliber lang seyn, und die Ladung an Pulver nicht mehr als den fünften Theil des Gewichts der Kugel betragen. Wolte man aber zu diesem Endzweck keine besondern Canonen verfertigen, sondern sich anderer, welche eigentlich zu anderen Absichten bestimmt, und viel länger sind, bedienen, so könnte man noch an

dem Pulver nicht wenig erspahren: indem, zum Exempel, nach der vorigen Tabelle[1]), wenn die Canone 20 Caliber lang wäre, nicht einmahl der sechste Theil des Gewichts der Kugel nöthig ist, wenn eine Geschwindigkeit von 1000 Schuhen in 1″ hervorgebracht werden soll. Wenn man aber auf eine sehr grosse Entfernung mit einer Canonen-Kugel noch gewiß schiessen wolte, und zu diesem Ende die Kugel eine Geschwindigkeit von 1900 Schuhen in einer Secunde haben müßte, so würde dieser Endzweck mit keiner nach Art der Carthaunen verfertigten Canone erreicht werden können, sondern die beste Canone müßte fast 44 Caliber lang seyn, und die Ladung an Pulver beynahe dem ganzen Gewicht der Kugel gleich genommen werden. Mit einer solchen Canone würde man also viel weiter schiessen können, wofern nur die Kugel nicht allzuklein angenommen wird, als mit einer Feldschlange, welche 30 Caliber lang, und mit $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel geladen wird. Man könnte auch nach dieser Tabelle solche Canonen verfertigen, welche der Kugel eine noch schnellere Bewegung eindrückten, wenn solches verlangt werden sollte.

VIERTE ANMERKUNG

Wenn man auf diese Art für eine gegebene Kugel sowohl die Länge der Canone, als die Grösse der Ladung gefunden hat, so ist es leicht, die dazu erforderte Stärke des Metalls an allen Orten zu bestimmen, und einen tüchtigen Riß von der ganzen Canone zu verfertigen. Die Länge der Canone wird zu diesem Ende am füglichsten in zwey Theile zertheilet, wovon der hintere Theil die Ladung oder das Pulver in sich enthält, der vordere Theil den Weg, wodurch die Kugel getrieben wird, vorstellt. Die Stärke des hintern Theils muß aus der Gewalt des Pulvers im ersten Augenblick der Entzündung bestimmet werden, welche am grösten ist, ehe die Kugel noch von ihrer Stelle fortgerücket wird. Wenn wir also mit dem Autore annehmen, daß die erste Gewalt des Pulvers 1000 mahl grösser ist, als der Druck der Atmosphäre, welcher durch eine Wasser-Säule von 32 Schuhen im Gleichgewicht erhalten wird, so muß das Boden-Stück einer Canone so stark seyn, daß dasselbe den Druck einer Wasser-Säule, welche 32000 Schuh hoch ist, aushalten könnte. Wenn man also die Stärke des Metalls, woraus die Canone gegossen wird,

1) Siehe p. 327 F. R. S.

genau ausrechnen könnte, so würde man daraus die Dicke des Boden-Stücks bestimmen können. Denn wir haben oben in der dritten Anmerkung zum 9ten Satz des ersten Capitels erwiesen, daß die Dicke des Metalls zum Diameter der Kugel immer einerley Verhältniß haben müste. Dahero wenn man in einem einigen Fall wüste, wie sich die Dicke des Metalls an dem Boden-Stück zum Diameter der Kugel verhalten muß, so würde eben diese Verhältniß bey allen andern Arten von Canonen Platz finden. Man hat aber durch die Erfahrung befunden, daß in den Carthaunen die Dicke des Metalls an dem Boden-Stücke dem Diameter der Kugel gleich seyn müsse, woraus diese allgemeine Regel fließt, daß bey allen Canonen die Dicke des Metalls an dem Boden-Stücke dem Diameter der Kugel beständig gleich genommen werden müsse. Diese Regel gründet sich also auf zwey Stücke, nehmlich auf die Festigkeit des Metalls, und auf die Kraft des Pulvers. Solte man eine andere Mixtur erfinden, welche die gebräuchliche an Festigkeit überträffe, so würde eine geringere Dicke des Metalls an dem Boden-Stück hinlänglich seyn, die Gewalt des Pulvers auszuhalten. Wenn man aber hergegen die Kraft des Pulvers vermehren könnte, so müßte die Dicke der Canonen grösser angenommen werden. Denn wenn man auch gleich in diesem Fall weniger Pulver laden wollte, so würde doch dadurch die Ausdehnungs-Kraft im ersten Augenblick der Entzündung nicht kleiner werden, als wenn die Ladung wäre grösser angenommen worden. Woraus erhellet, daß wenn man die Gewalt des Pulvers merklich vermehren könnte, alle jetzigen Canonen unbrauchbar seyn würden. So lange man aber einerley Pulver gebrauchet, so hat das Boden-Stück einer Canone beständig einerley Gewalt auszuhalten, man mag die Ladung groß oder klein annehmen. Wenn also dasselbe der Gewalt einer kleinen Ladung zu wiederstehen vermögend ist, so wird auch eine weit grössere Ladung nicht vermögend seyn, dasselbe zu zersprengen. In dieser Absicht ist aber das Vorder-Theil oder das Mund-Stück einer Canone ganz anders beschaffen. Denn da die Gewalt des Pulvers um so vielmehr abnimmt, in je einen grösseren Raum sich dasselbe schon ausgebreitet, so ist klar, daß ein jeglicher Theil des Mundstücks eine um so viel grössere Gewalt auszustehen habe, je grösser die Ladung an Pulver angenommen wird. Wenn dahero das Mundstück einer Canone die gehörige Stärke haben soll, so muß dieselbe aus der grösten Ladung, welche immer gebraucht werden kann, bestimmet werden.

Es bedeute zum Exempel AF (Fig. 1, p. 70) die gröste Ladung, welche bey der Canone AB immer vorkommen kann, so ist AF das Boden-Stück, und FB das Mundstück; bey jenem muß die Dicke des Metalls allenthalben dem Diameter

der Kugel gleich seyn, und da die Gewalt auf das Boden-Stück allenthalben gleich groß ist, so ist auch unnöthig, daß die Canone zu hinterst bey A stärker gegossen werde, als bey F. Aus dieser Betrachtung könnte also bey Giessung der Canonen nicht wenig Metall erspahret und dieselben dadurch ohne Gefahr leichter gemacht werden. Denn wenn die Dicke bey E, welche schon etwas kleiner als der Diameter der Kugel gesetzt zu werden pflegt, stark genug ist, der Gewalt des Pulvers zu wiederstehen, so wird auch bey D keine grössere Stärke erfordert. Was aber das Mundstück FB anlangt, so ist leicht für ein jegliches Punkt desselben M die Gewalt des Pulvers zu bestimmen, welche darauf würket, wenn die Kugel bis dahin ist fortgestossen worden. Nach des Autoris Regel verhält sich diese Kraft zu der ersten Kraft des Pulvers, welche das Boden-Stück aussteht, wie AF zu AM, und folglich könnte die Dicke des Metalls bey M um so viel geringer seyn, als bey F, um so viel AF kleiner ist, als AM; solchergestalt würde die äußere Figur einer Canone nach einer Hyperbel gekrümmet seyn müssen. Nach unserer Bestimmung der Gewalt des Pulvers nimmt dieselbe, indem die Kugel durch das Mundstück FB fähret, nach einer größern Verhältniß ab, und dürfte also das Mundstück nicht so stark seyn, als nach des Autoris Regel. Allein da sich die beyden Regeln auf die plötzliche Entzündung des Pulvers gründen, in der That aber die Entzündung nach und nach geschieht, so wird die Gewalt, welche das Mundstück auszustehen hat, in Ansehung der Gewalt des Bodenstücks grösser seyn, als nach den angeführten Regeln, und folglich muß die Dicke desselben allenthalben etwas grösser seyn, als nach diesen Regeln gefunden wird.

Wenn man aber gleich die allmählige Entzündung des Pulvers in die Rechnung bringen könnte, so findet sich doch noch ein anderer Umstand, welcher die Bestimmung der Stärke des Mundstücks viel schwehrer und fast unmöglich macht. Derselbe bestehet darinne, daß das Mundstück nicht allein der Gewalt des Pulvers ausgesetzt ist, sondern auch von der Kugel, indem dieselbe dadurch fähret, öfters keine geringere Kraft auszustehen hat. Wenn zwar die Seele einer Canone vollkommen nach einer geraden Linie gebohret wäre, und die Kugel beständig nach eben dieser geraden Linie fortgetrieben würde, so würde dieselbe auf die Seele der Canone nicht die geringste Gewalt ausüben und dadurch gleichsam, ohne die Canone zu berühren, heraus fahren, indem das Gewicht der Kugel, wovon die untere Seite derselben gedruckt wird, für nichts zu achten ist. Wenn aber die Seele der Canone nur etwas wenigs gekrümmet wäre, und folglich die Kugel genöthiget würde, von ihrer einge-

drückten Direction abzuweichen, so siehet man wohl, daß alsdenn die Kugel auf die Canone nach der Kraft, welche Vis centrifuga genennet wird, zurück würken müsse. Diese Kraft kan nun sehr beträchtlich werden; denn wenn wir setzen, daß das Mundstück irgendwo nach einem Zirkulbogen, dessen Radius $= r$, gekrümmet sey, und daß die Geschwindigkeit der Kugel daselbst durch die Höhe v bestimmet werde, so wird sich der Druck der Kugel auf die innere Wand der Canone zu ihrer Schwehre verhalten, wie $\frac{2v}{r}$ zu 1. Wenn also diese Krümmung der Seele der Canone nach einem Zirkul geschähe, dessen Radius $r = 100$ Schuh, dergleichen Krümmung in einer geringen Länge kaum zu merken ist, und wenn die Kugel daselbst eine Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde hätte, so würde $v = 36000$ Schuh, und die Canone würde an diesem Ort von einer Kraft gedrücket werden, welche 720 [mahl] grösser wäre, als das Gewicht der Kugel, wovon die Würkung um so viel grösser seyn würde, da diese ganze Kraft nur auf einen sehr geringen Platz, in welchem die Kugel das Metal berühret, [würket,] als diejenige, welche von der Ausdehnungskraft des Pulvers herrührt. Eben dieser Umstand kan sich aber auch ereignen, wenn gleich die Seele der Canone vollkommen gerade gebohret worden: denn wenn die Kugel durch die Gewalt des Pulvers nicht völlig nach der Direction der Seele fort getrieben wird, so ist es eben so viel, als wenn die Seele in Ansehung der Bewegung der Kugel eine kleine Krümmung hätte, und ist folglich die Canone in diesem Fall eben der Gewalt unterworfen, als in dem vorigen. Es kan aber aus vielerley Ursachen die Direction, welche der Kugel von dem Pulver eingedruckt wird, etwas weniges von der Direction der Seele abweichen: wohin insonderheit der Spielraum zu rechnen, und wenn die Direction der forttreibenden Kraft nicht durch das Mittelpunkt der Schwehre der Kugel durch gehet. Dieses sind nun Umstände, welche bißweilen mehr, bißweilen weniger austragen können: und in denselben scheinet die wahre Ursache verborgen zu seyn, warum bißweilen eine Canone von einem nicht allzustarken Schuß zerspringet, nachdem dieselbe doch vorher eine grosse Anzahl stärkerer Schüsse ausgehalten. Um dieser Ursache willen ist also höchst nöthig, daß man das Mundstück einer Canone weit stärker mache, als nach irgend einer oben angeführten Regel erfordert wird, damit dieselbe diesen ungewissen Kräften meistentheils zu wiederstehen hinreichend sey. Dieser Gewalt der Kugel sind aber die längern Canonen mehr unterworfen, als die kürzern; denn je länger die Canone ist, desto eher und leichter kan sich der Umstand ereignen, daß die Direction der Kugel etwas von der Axe der Canone abweicht. Hernach erhält auch die Kugel in längern Canonen eine grössere

Geschwindigkeit, wodurch die Vis centrifuga sehr merklich vermehret wird, als welche nach den Quadraten der Geschwindigkeit wächst.

Endlich kan auch mit Stillschweigen nicht übergangen werden, daß die Bewegung der Kugel selbst durch diesen Druck gegen die Canone keinen geringen Abbruch leidet. Denn dadurch wird die Friction, welche sonsten, wie oben gewiesen worden, nicht merkwürdig war, gar sehr vermehret, als welche um so viel grösser wird, je stärker ein Körper gegen den andern gedruckt wird. Da also dieser Druck auf sehr gewissen Umständen beruhet, so kan es leicht geschehen, daß bey gleichen Kugeln, welche mit gleicher Ladung aus einer Canone geschossen werden, ein ziemlicher Unterscheid in ihrer Geschwindigkeit wahrgenommen werden kan. Inzwischen scheinet es doch, daß man durch einen grossen Fleiß diese Unrichtigkeit meistentheils sollte heben können; wenn man nehmlich erstlich die Canone vollkommen gerade bohren, hernach die Kugeln vollkommen rund machen, und drittens bey der Ladung alle Sorgfalt anwenden wolte, damit der Mittelpunkt der Kugel auf das genauste in die Axe der Seele zu liegen käme, und in währender Bewegung daraus nicht weichen könte. Auf diese Art würde die Canone nicht nur keine so grosse Gewalt auszustehen haben; sondern man würde sich auch auf die Schüsse selbst viel sicherer verlassen können, wie in folgendem ausführlich dargethan werden wird.

FÜNFTE ANMERKUNG

Was der Autor ferner in diesem Satz gegen die ungereimte Meynung derjenigen, welche behaupten, daß eine Canonen-Kugel anfänglich auf eine gewisse Weite in einer völlig geraden Linie fortgehe, anführet, ist an sich klar und deutlich; indem die erste Geschwindigkeit einer solchen Kugel so groß ist, daß die Krümmung ihrer Bahn, welche von der Schwehre verursacht wird, in einer ziemlichen Weite noch nicht bemerkt werden kann. Denn wenn die Geschwindigkeit durch die Höhe v angedeutet, und die Kugel nach einer Horizontal-Direction geschossen wird, so muß der Radius eines gleich krummen Zirkels, als die Bahne der Kugel ist, einer Länge von $2v$ gleich seyn. Da nun, wenn die Geschwindigkeit der Kugel 1500 Schuh in einer Sekunde beträgt, wird $v = 36000$ Schuh, so wird die Bahn dieser Kugel keine grössere Krümmung haben, als ein Zirkul, dessen Radius 72000 Schuh hält. Diese Krümmung ist aber so geringe, daß dieselbe erst in einer Weite von 1256

Schuhen einen Grad austrägt. Ob nun gleich wegen des Wiederstands der Luft diese Weite etwas verringert wird, so bleibt dieselbe doch groß genug, daß man in der Praxi einen sehr langen Theil der Bahn, als eine gerade Linie ohne Fehler ansehen kann, welche von den Artilleristen die Weite des Kernschusses genennet zu werden pflegt. Weil aber hiervon im folgenden weitläuftiger gehandelt werden soll, so wollen wir uns dabey nicht länger aufhalten, sondern noch dasjenige, was der Autor in diesem Satz von der stärksten Ladung einer Canone anführt, erwegen, ungeachtet wir schon oben in der fünften Anmerkung zum 11. Satz diese Materie ziemlich weitläuftig abgehandelt, und für die stärkste Ladung daselbst eine Tabelle[1]) gegeben haben. Inzwischen liegt dieser Umstand, daß es für eine jede Canone eine bestimmte Ladung gibt, wodurch der Kugel die gröste Bewegung mitgetheilet wird, in der bey unserer zweyten Anmerkung zu diesem Satz gegebenen Tabelle[2]) deutlich vor Augen: indem wir aus derselben sehen, daß aus einer Canone, welche 10 Caliber lang, die Kugel mit einer Ladung von $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel schneller heraus geschossen wird, als mit einer grössern Ladung. Eben diese stärkste Ladung erhellet auch noch in eben derselben Tabelle bey 12 und 14 Caliber langen Canonen, als aus welchen die Kugel mit einer ihrem ganzen Gewichte gleichen Ladung an Pulver nicht so geschwind heraus getrieben wird, als mit kleineren Ladungen.

Der Autor bestimmet die Grösse dieser stärkesten Ladung aus seiner Regel, wodurch er die Geschwindigkeit der Kugel angiebt, und welche in folgender Form enthalten ist

$$v = \frac{1000bh}{k}\, l\frac{a}{b}.$$

Da nun in dieser Form sehr viel Umstände aus der Acht gelassen werden, welche doch keine geringe Veränderung verursachen, so ist kein Wunder, daß seine Bestimmung der stärksten Ladung mit der unsrigen nicht überein kommt. Aus dieser Formul findet der Autor, daß für die stärkste Ladung die Länge b des Raums, welchen das Pulver anfüllet, zur ganzen Länge des Stücks a allzeit einerley Verhältniß haben müsse, nehmlich wie 1 zu der Zahl 2,71828, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$; nach unserer Regel aber ist diese Verhältniß nicht immer einerley, sondern beruhet sowohl auf der Anzahl der Caliber, welche in der Länge des Stückes a enthalten sind, als auf der Materie der Kugel, wie aus der oben gegebenen Tabelle erhellet: inzwischen läßt sich

1) Siehe p. 192. F. R. S.

2) Siehe p. 327. F. R. S.

doch eine ziemliche Uebereinstimmung zwischen dieser Tabelle und des Autoris Verhältniß wahrnehmen. Wie aber diese Verhältnis aus des Autoris Formul folge, ist aus der Lehre von dem grösten und kleinsten an sich klar. Denn weil k und h unveränderliche Grössen sind, so kommt die Sache nur darauf an, daß man den Werth von b bestimme, damit $bl\frac{a}{b}$ am aller grösten werde. Zu diesem Ende muß man diese Quantität $bl\frac{a}{b}$ dergestalt differentiren, daß man nur b als veränderlich annehme: da denn kommt

$$dbl\frac{a}{b} - db.$$

Dieses Differentiale muß man ferner nach der bekanten Regel gleich nichts setzen, so hat man

$$l\frac{a}{b} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad l\frac{a}{b} = 1.$$

Weil nun hier von hyperbolischen Logarithmis die Rede ist, so muß $\frac{a}{b}$ derjenigen schon öfters gebrauchten Zahl 2,7182818 etc. gleich seyn, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$: folglich wird

$$\frac{a}{b} = 2{,}7182818 \quad \text{oder} \quad b:a = 1:2{,}7182818,$$

wie der Autor gefunden. Da nun $l\frac{a}{b} = 1$, so wird diese gröste Geschwindigkeit nach dem Autore aus der Höhe v entspringen, dergestalt daß

$$v = \frac{1000\,bh}{k}.$$

Um aber mit dieser Geschwindigkeit andere kleinere Geschwindigkeiten der Kugel zu vergleichen, wie der Autor gethan, so hat man nur in der Hyperbel (Fig. 22, p. 316) LEF zu betrachten, daß, da $AD = b$ und $AB = a$, erstlich das Viereck $ADEG$ allenthalben eine beständige Grösse habe, und daß sich ferner dieses Viereck zum Inhalt der Figur $EDBF$ verhalte, wie 1 zum hyperbolischen Logarithmo von $\frac{AB}{AD}$. Da nun dieser Logarithmus gleich 1 ist, so muß die Figur $DEFB$ dem Viereck $AGED$ gleich seyn. Wir wollen die Linie $DE = f$ setzen, so wird die Figur $DEFB$ durch $bfl\frac{a}{b}$, das ist durch bf ausgedrückt werden. Man betrachte jetzt eine andere Ladung, welche den

Lauf von A bis I anfülle, und nenne $AI = \beta$, so wird sich das Quadrat der grösten Geschwindigkeit zum Quadrat der aus dieser Ladung AI entstehenden Geschwindigkeit verhalten, wie bf zu $\beta f l \frac{a}{\beta}$. Es ist aber

$$l\frac{a}{\beta} = l\frac{a}{b} + l\frac{b}{\beta} = 1 + l\frac{b}{\beta},$$

weil $l\frac{a}{b} = 1$, also wird jene Verhältniß wie bf zu $\beta f + \beta f l\frac{b}{\beta}$. Aus der vorher angeführten Natur der Hyperbel aber drücket $\beta f l\frac{b}{\beta}$ den Inhalt der Figur $IHKD$ aus, und βf ist das Viereck $AGHI$, gleich wie bf dem Viereck $AGED$ gleich ist; dahero ist

$$\beta f + \beta f l\frac{b}{\beta} = AGHI + IHKD = AGED - HEK.$$

Folglich wird sich das Quadrat der grösten Geschwindigkeit zum Quadrat der aus der Ladung AI entspringenden Geschwindigkeit verhalten, wie $AGED$ zu $AGED - HEK$, wie der Autor findet. Wir haben hier den Fall betrachtet, da die Ladung AI kleiner ist, als die stärkste AD; wenn aber AI grösser ist, als AD, und $\beta > b$: so ist der Beweis mit dem vorigen einerley, wenn man nur erweget, daß in diesem Fall der Inhalt der Figur $DKHI$ nicht durch $\beta f l\frac{b}{\beta}$, sondern durch $\beta f l\frac{\beta}{b}$, oder durch $-\beta f l\frac{b}{\beta}$ ausgedrückt werde.

Ungeachtet wir nun die stärkste Ladung aus einer der Wahrheit weit näher kommenden Formul schon oben bestimmet haben, so hat doch daselbst der Buchstabe a nicht die ganze Länge des Laufs, sondern nur einen Theil desselben angedeutet, so daß in derselben Tabelle immer ein längerer Lauf, als daselbst bemerket wird, verstanden werden muß. Um nun diesen Mangel zu ersetzen, so wollen wir aus derjenigen Formul, welche wir hier zur Bestimmung der Geschwindigkeit gebraucht haben, auch die stärkste Ladung herleiten, weil dieselbe auf diese Art der Wahrheit weit näher kommen muß. Unsere Aequation ist nun, wenn der Spiel-Raum mit in Betrachtung gezogen wird, diese[1]):

$$v = \frac{1000bh}{k + 455b} l\frac{2a - b}{b}.$$

Diese wird am grösten, wenn $\frac{b}{k + 455b} l\frac{2a-b}{b}$ den grösten Werth erhält. Um diesen zu finden, so differenzire man diese Formul, indem man nur b als

1) Siehe p. 318 und 325. F. R. S.

veränderlich ansieht, und setze das Differentiale gleich nichts, so wird man finden

$$\frac{kdb}{(k+455b)^2}\, l\frac{2a-b}{b} - \frac{2adb}{(k+455b)(2a-b)} = 0$$

oder

$$l\frac{2a-b}{b} = \frac{2a(k+455b)}{(2a-b)k}.$$

Man setze

$$\frac{2a-b}{b} = u,$$

so wird $b = \frac{2a}{1+u}$ und

$$lu = 1 + \frac{1}{u} + \frac{910a}{ku}.$$

Wenn wir nun setzen, daß das Stück i Caliber lang, und die Materie der Kugel n mahl schwehrer sey, als Luft, so wird

$$k : a = 910 : \frac{1365\,i}{n},$$

folglich bekommt man

$$lu = 1 + \frac{1}{u} + \frac{1365\,i}{nu}.$$

Wenn ferner die Kugel von Eisen angenommen wird, so ist $n = 6650$ und $\frac{1365}{n} = \frac{1}{5}$ so nahe, daß der Unterscheid nicht zu achten. Dahero hat man

$$lu = 1 + \frac{i+5}{5u}.$$

Aus dieser Aequation kan zwar überhaupt der Werth von u nicht angezeigt werden; in einem jeglichen Fall aber ist es leicht, denselben durch die Näherung heraus zu bringen. Um ein Exempel hiervon zu geben, so wollen wir setzen $i = 30$; so wird

$$lu = 1 + \frac{7}{u}.$$

Wenn man nun eine Tabelle von hyperbolischen Logarithmis bey der Hand hat, so wird man bald sehen, daß u zwischen 7 und 8 enthalten sey. Man gebe also dem u diese beyden Werthe, und bemerke bey jedem den Unterscheid folgender Gestalt

$u = 7$	$u = 8$
$lu = 1{,}945909$	$2{,}079441$
$1 + \frac{7}{u} = 2{,}000000$	$1{,}875000$
Unterscheid $-{,}054091$	$+{,}204441$

Weil diese beyden Unterscheide verschiedene Zeichen haben, so addire man dieselben zusammen, und sage nach der Regul falsi, wie sich diese Summe verhält zu 1, nehmlich dem Unterscheid zwischen den beyden angenommenen Werthen von u, also verhält sich ,054091 zum Überschuß des wahren Werths von u über 7, welcher gefunden wird $= 0{,}21$, also ist $u = 7{,}21$. Weil nun $a = 30c$, so wird $b = \frac{60c}{8{,}21} = 7{,}31c$. Hieraus kan man auch ferner das Gewicht dieser stärksten Ladung in Ansehung des Gewichts der Kugel bestimmen. Denn, wenn das Gewicht der Kugel $= P$, das Gewicht der Ladung $= Q$, und man setzt $Q = mP$; so wird beynahe $m = \frac{b}{5c}$. Aus diesem Grunde ist also die folgende Tabelle ausgerechnet worden:

Tabelle für die stärkste Ladung[1])

Länge des ganzen Laufs in Calibern	Länge des Pulver-Raums in Calibern	Gewicht des Pulvers in 100sten Theilen des Gewichts der Kugel
2	0,82	16
4	1,54	31
6	2,18	43
8	2,78	56
10	3,35	67
12	3,86	77
14	4,30	86
16	4,77	95
18	5,20	104
20	5,59	112
22	5,96	119
24	6,32	126
26	6,66	133

1) Zufolge der Interpolation zwischen zu weiten Grenzen ist in der zweiten und dritten Spalte dieser Tabelle je die letzte Stelle ungenau. F. R. S.

Länge des ganzen Laufs in Calibern	Länge des Pulver-Raums in Calibern	Gewicht des Pulvers in 100sten Theilen des Gewichts der Kugel
28	6,99	140
30	7,31	146
32	7,61	152
34	7,90	158
36	8,18	163
38	8,44	169
40	8,69	174
42	8,93	179
44	9,18	184
46	9,42	188
48	9,66	193
50	9,89	198
52	10,11	202
54	10,31	206
56	10,51	210
58	10,71	214
60	10,90	218

Da diese Tabelle aus derjenigen Formul entsprungen, welche wir zuletzt gefunden, und in welcher alle Umstände ausser der allmähligen Entzündung des Pulvers in Betrachtung gezogen worden, so ist kein Zweifel, daß die in dieser Tabelle gegebenen stärksten Ladungen mit der Wahrheit näher übereinstimmen werden, als diejenigen, welche entweder nach des Autoris Regel gefunden worden, oder in der oben gegebenen Tabelle enthalten sind. Erstlich sieht man, daß alle in dieser Tabelle befindlichen stärksten Ladungen kleiner sind, als in der obigen; und wenn man ferner dieselbe mit des Autoris Regel vergleicht, so findet man, daß, wenn die Länge des Laufs kleiner ist, als 6 Caliber, die hier gegebene stärkste Ladung grösser sey, als nach dem Autore. Bey 6 Calibern stimmen dieselben völlig mit einander überein, und wenn der Lauf länger ist, als 6 Caliber, so weichen unsere Ladungen je länger je mehr ab von des Autoris Regel. Denn wenn der Lauf 60 Caliber lang ist, so kommt nach des Autoris Regel die Länge des Pulver-Raums ungefehr von 22 Caliber heraus, da unsere nicht einmahl die Helfte austrägt. Und wenn es möglich wäre, einen Lauf so 10000 Caliber lang zu machen, so würde die zum stärksten Schuß erforderte Ladung nicht mehr als einen Raum von $49\frac{3}{4}$ Calibern ein-

nehmen, und diese Ladung würde bey nahe 10 mahl schwehrer seyn, als das Gewicht der Kugel. Wolte man aber die allmählige Entzündung des Pulvers noch in Betrachtung ziehen, so würden, allem Ansehen nach, diese grösten Ladungen noch kleiner heraus kommen, daher man um so viel weniger zu zweifeln Ursache hat, daß die Regel des Autoris diese Ladung weit zu groß anzeige.

FÜNFTER SATZ

Wenn eine Canonen-Kugel von 24 Pfund mit voller Ladung geschossen wird, so ist der Wiederstand der Luft, indem dieselbe aus der Canone herausfährt, mehr als zwanzig mahl grösser, als das Gewicht derselben.

Wir haben in dem zweyten Satz dieses Capitels gezeiget, daß der Wiederstand der Luft auf eine Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, welche sich mit einer Geschwindigkeit von 1670 Schuhen in einer Secunde beweget, einem Gewicht von 10 Pfunden gleich sey. In dem vorhergehenden Satz aber ist ausgemacht worden, daß eine eiserne Kugel von 24 Pfunden, wenn dieselbe mit 16 Pfund Pulver geschossen wird, welche Ladung gemeiniglich für die tüchtigste um Breche zu schiessen gehalten wird, eine Geschwindigkeit von ungefehr 1650 Schuhen in einer Secunde erhalte, welche von der vorigen nicht merklich unterschieden ist. Da nun der Umfang[1]) dieser letztern Kugel mehr als 54 mahl grösser ist, als der Umfang der vorigen, so $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter hielt, und ihre Geschwindigkeiten beynahe einerley waren, so folget, daß der Wiederstand, welchen die grössere Kugel empfunden, mehr als 540 Pfund austrage, welches beynahe 23 mahl mehr ist, als das Gewicht der Kugel.

ZUSATZ.

Wir haben schon oben in der Einleitung angemerket, daß diejenigen, welche sich die Artillerie gründlich abzuhandeln bemühet haben, insgesamt voraus gesetzt, daß die Bahn einer Stück-Kugel oder Bombe derjenigen krummen Linie, welche Parabel genennt wird, sehr nahe komme. Unsere beyden letzte-

---

1) Das Wort *Umfang* wird hier zur Bezeichnung der Oberfläche verwendet. F. R. S.

ren Sätze zielen nun insonderheit dahin ab, um diese Meynung zu wiederlegen.

Die Ursache aber, warum die gedachten Autores diese Meynung behauptet haben, gründete sich fürnehmlich darauf, daß sie glaubten, der Wiederstand der Luft könne keine merkliche Würkung haben. Weil nun unstreitig war dargethan worden, daß die Bahn aller geworfenen Körper, wenn kein Wiederstand vorhanden wäre, eine Parabel seyn müßte, so haben sie aus Uebereilung so gleich geschlossen, daß dergleichen schwehre Körper als Bomben und Stück-Kugeln von einer solchen subtilen Materie, als die Luft ist, keinen merklichen Wiederstand leiden könnten, und daß folglich ihre parabolische Bahn dadurch nicht merklich verändert würde.

Dieses Vorurtheil wird nun durch den erstaunlichen Wiederstand der Luft auf eine 24 pfündige Kugel, dessen Grösse wir hier bestimmet haben, hinlänglich bestritten. Denn, wie irrig muß nicht eine solche Meynung seyn, in welcher eine Kraft, so mehr als zwanzig mahl grösser ist, als das Gewicht des Körpers, für nichts geachtet wird? Unterdessen wollen wir uns nicht allein begnügen, die Würklichkeit und die Größe des Wiederstands der Luft erwiesen zu haben; sondern wir wollen auch noch die wahre Bahn der Körper in dieser flüßigen Materie umständlicher in Erwegung ziehen. Wir wollen nehmlich durch vielerley Versuche deutlich zeigen, wie sehr die Bahn, welche ein jeglicher geworfener Körper in der Luft beschreibet, nach allen Umständen von derjenigen, welche aus den insgemein angenommenen Gründen fliesset, abweiche. Zu diesem Ende ist aber nöthig, einige wenige Sätze voraus zu setzen, wovon der Beweis bey den meisten Autoren, welche die gemeine Lehre von den fallenden Körpern abgehandelt haben, gefunden wird.

1. Lehr-Satz. Wenn der Wiederstand der Luft so klein ist, daß die Bewegung eines geworfenen Körpers in einer Parabel geschieht, so steht die Axe dieser Parabel immer senkelrecht auf dem Horizont, und folglich ist der Theil dieser krummen Linie, in welchem der Körper hinauf steiget, demjenigen gleich und ähnlich, in welchem der Körper wiederum herunter fällt.

2. Lehr-Satz. Wenn die Parabel, in welcher sich der Körper beweget, auf einer Horizontal-Fläche aufsteht, so ist der oberste Punkt derselben von beyden Enden gleich weit entfernet.

3. Lehr-Satz. Der Körper wird in diesem Fall auch unter eben demselben Winkel, und mit eben der Geschwindigkeit auf die Erde fallen, als derselbe anfänglich ist herauf geworfen worden.

4. Lehr-Satz. Wenn der Körper mit einerley Geschwindigkeit, aber unter verschiedenen Winkeln, geworfen wird, so wird derjenige Wurf am weitesten reichen, welcher unter einem Winkel von 45 Graden mit dem Horizont gethan worden.

5. Lehr-Satz. Wenn die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper anfänglich geworfen wird, bekannt ist, so kann die gröste Weite des Wurfs daraus also gefunden werden. Man berechne nach der bekannten Lehre von dem Fall der Körper die Höhe, aus welcher ein Körper durch den Fall eben diejenige Geschwindigkeit erhält, mit welcher der Körper geworfen wird: alsdenn wird diese Höhe zweymahl genommen, die gröste Weite geben, zu welcher der Körper, wenn derselbe unter einem Winkel von 45 Graden mit dem Horizont geworfen wird, gelangen kann.

6. Lehr-Satz. Die Horizontal-Würfe eines Körpers, wenn derselbe mit einerley Geschwindigkeit unter verschiedenen Winkeln mit dem Horizont geworfen wird, verhalten sich untereinander, wie der Sinus der doppelten Winkel, unter welchen die Würfe geschehen.

7. Lehr-Satz. Wenn der Körper unter einerley Winkel mit dem Horizont, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortgeworfen wird, so werden sich die Würfe auf einer Horizontal-Fläche verhalten, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.

In diesen Lehr-Sätzen sind nun alle diejenigen Gründe enthalten, nach welchen die Bewegung der geworfenen Körper von den heutigen Scribenten der Artillerie berechnet zu werden pflegt. Wenn also einige von diesen Lehr-Sätzen bey der Bewegung der geworfenen Körper nicht Stich halten, so folget daraus unstreitig, daß der Körper in seiner Bewegung von der Parabolischen Bahn abweiche. Dahero wird die gemeine Lehre von der Bewegung der geworfenen Körper völlig umgestossen, wenn wir werden darthun können, daß überhaupt kein einiger von diesen Sätzen mit der wahren Bewegung der Körper übereinstimme.

ERSTE ANMERKUNG

In diesem Satz untersuchet der Autor die Grösse des Wiederstands der Luft, welchen eine halbe Carthaunen-Kugel, so sich darinn mit einer Geschwindigkeit von 1650 Schuhen in einer Secunde beweget, auszustehen hat, und weiset, daß die Kraft des Wiederstands über 20 mahl grösser sey, als das Gewicht der Kugel. Um dieses zu erweisen, so legt er den vorher bestimmten Wiederstand, welchen eine Kugel, so nur $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter hat, und sich mit einer Geschwindigkeit von 1670 Schuhen in 1″ beweget, leidet, zum Grunde. Denn da diese beyden Geschwindigkeiten nicht merklich von einander unterschieden sind, so muß sich der Wiederstand der grössern zum Wiederstand der kleinern verhalten, wie das Quadrat des Diameters der grössern zum Quadrat des Diameters der kleinern: weil sich die Oberflächen zweyer Kugeln unter sich, wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten. Nun aber sagt der Autor, daß die Oberfläche der 24pfündigen Kugel mehr als 54 mahl grösser gewesen, als der kleinern Kugel, deren Diameter nur $\frac{3}{4}$ Zoll war, folglich muß der Diameter der großen Kugel gewesen sein $= \frac{3}{4}\sqrt{54}$ Zoll, das ist beynahe $5\frac{1}{2}$ Zoll. Dahero wiegt eine eiserne Kugel, deren Diameter $5\frac{1}{2}$ Zoll groß ist, 24 Pfund; und hieraus läßt sich der Diameter einer jeglichen eisernen Kugel, deren Gewicht bekannt ist, bestimmen. Wir können aber aus der oben gefundenen Formul, wodurch der Wiederstand einer Kugel ausgedruckt wird, in einem jeglichen Fall die Verhältniß des Wiederstands der Luft zu dem Gewicht der Kugel leicht anzeigen. Denn es sey der Diameter der Kugel $= c$, und v die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel erzeugt werden kann, so ist, wie wir gefunden haben[1]), der Wiederstand dem Gewicht einer mit der Kugel gleich dicken Luft-Säule gleich, deren Höhe

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv,$$

wo h eine Höhe von 28845 Englischen oder 27979 Rheinl. Schuhen anzeigt. Ferner ist die Kugel selbst einem gleich dicken Cylinder gleich, dessen Höhe $= \frac{2}{3}c$. Wenn also die Materie der Kugel n mahl schwehrer, als die Luft gesetzt wird, so ist das Gewicht der Kugel dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleich, deren

1) Siehe p. 311. F. R. S.

Höhe $= \frac{2}{3} nc$, folglich wird sich der Wiederstand der Kugel zu ihrer eignen Schwehre verhalten, wie $\frac{1}{2} v + \frac{1}{2h} vv$ zu $\frac{2}{3} nc$, das ist, wie $\frac{3v(h+v)}{4nch}$ zu 1. Wenn also die Kugel von Eisen ist, so wird $n = 6647$, und der Wiederstand der Kugel verhält sich zu ihrer Schwehre, wie $\frac{v(h+v)}{8863\,ch}$ zu 1. Laßt uns nun setzen, die Geschwindigkeit der Kugel betrage 1650 Englische oder 1600 Rheinl. Schuh in einer Secunde, so wird die Höhe $v = 40960$ Rheinl. oder 42226 Engl. Schuh, und $h + v = 71071$ Engl. Schuh. Folglich wird sich der Wiederstand zur Schwehre der Kugel verhalten, wie 11,7386 Schuh zum Diameter der Kugel. Weil nun nach des Autoris Rechnung der Diameter der 24pfündigen Kugel $5\frac{1}{2}$ Zoll, oder $\frac{11}{24}$ Schuh beträgt, so muß sich der Wiederstand derselben zu ihrem eigenen Gewicht von 24 ℔ verhalten, wie 11,7386 zu $\frac{11}{24}$ oder wie 25,6115[1]) zu 1, und ist also der Wiederstand über $25\frac{1}{2}$ mahl grösser, als das Gewicht der Kugel. Es ist nicht nöthig, die Ursache zu untersuchen, warum der Autor diesen Wiederstand nur 23 mahl grösser findet, als das Gewicht der Kugel. Denn man siehet aus seinem Vortrag sogleich, daß seine Absicht nur dahin gegangen, um zu zeigen, daß der Wiederstand der Kugel im vorgelegten Fall gewiß über 20 mahl grösser sey, als das Gewicht derselben; und deswegen mag derselbe mit Fleiß alle Bestimmungen etwas zu klein angenommen haben, damit man um so viel weniger an der Richtigkeit seines Satzes zu zweifeln Ursache hätte.

Da nun der Wiederstand der Luft so erstaunlich groß ist, so kann man der gemeinen Meynung, daß sich die Kugeln in Parabeln bewegen, um so viel weniger länger beypflichten, da dieselbe schon hinlänglich wiederlegt seyn würde, wenn auch der Wiederstand der Luft nur dem Gewicht der Kugel selbst gleich wäre. Inzwischen ist die Unrichtigkeit dieser gemeinen Meynung schon längst gründlich genug dargethan worden, obgleich der gemeine Haufe der Artilleristen sich wenig daran gekehret zu haben scheinet. Dahero der Autor seine Ausdrückungen, als wenn er zu allererst diesen Fehler entdeckt hätte, etwas mäßigen sollte. Wir haben schon in unsern Anmerkungen zu der Vorrede des Verfassers gewiesen, daß dieser Fehler bereits vor geraumer Zeit nicht nur bemerket, sondern auch verbessert worden; indem man diejenige Linie, welche von einem Körper würklich in der Luft beschrieben wird, zu bestimmen vermögend gewesen. Unterdessen aber hat man doch die größte Ursache, dem Autori verpflichtet zu seyn, daß er diesen merklichen Zuwachs des Wiederstands

1) Im Original: 25,6615. Berichtigt von F. R. S.

der Luft, wenn die Bewegung sehr schnell ist, wahr genommen; als wodurch er nicht nur den gemeinen Haufen von einem groben Irrthum befreyet, sondern auch den Gelehrten die Unrichtigkeit der durchgehends angenommenen Lehre von dem Wiederstand der Luft deutlich vor Augen geleget hat.

ZWEYTE ANMERKUNG

Weil der Autor im folgenden Satz willens ist, den grossen Unterscheid durch Versuche zu zeigen, welcher sich zwischen der wahren Bahn, so ein geworfener Körper in der Luft beschreibet, und einer Parabel befindet, so zieht er hier die fürnehmsten Eigenschaften der parabolischen Bewegung in Betrachtung. Denn da es nicht so leicht ist, die wahre Bahn, welche ein Körper beschreibet, durch die Erfahrung zu bestimmen, so würde es sehr schwehr seyn, unmittelbar den Unterscheid zwischen dieser Bahn und einer Parabel zu beobachten. Derowegen betrachtet hier der Verfasser einige Eigenschaften, mit welchen die Bewegung in einer Parabel nothwendig verknüpfet ist, um nachgehends untersuchen zu können, ob sich diese Eigenschaften bey der Bewegung eines Körpers in der Luft befinden, oder nicht. Denn wenn nur einige von diesen Eigenschaften in der Luft nicht statt finden, so folget daraus unstreitig, daß die Bahn, welche ein solcher Körper in der Luft beschreibet, keine Parabel seyn könne. Ob sich nun gleich diese Eigenschaften in unzehlich viel Büchern gründlich erwiesen befinden, so wollen wir doch dieselben allhier aus den ersten Grund-Sätzen der Bewegung herleiten, theils damit man die Wahrheit derselben desto deutlicher einsehe, theils aber fürnehmlich, damit wir hernach auf gleiche Weise die wahre Bewegung eines Körpers in der Luft desto leichter bestimmen können.

Galileus hat schon gefunden, daß ein schwehrer Körper in einem Luftleeren Raum, oder wenn derselbe gar keinen Wiederstand antrifft, sich in einer Parabel bewege; und aus eben diesem Grunde haben die meisten Autores, welche von der Artillerie geschrieben haben, die Bahn einer Bombe oder einer Stück-Kugel in der Luft für eine Parabel gehalten; nicht als wenn dieselben gar keinen Begrif von dem Wiederstand gehabt hätten, sondern weil sie diesen Wiederstand so klein zu seyn geglaubet haben, daß derselbe in der Bewegung dieser Körper keine merkliche Veränderung verursachen könnte. Wir wollen also setzen, daß der Körper gar keinen Wiederstand leide, und aus den Grund-

sätzen der Bewegung diejenige Linie bestimmen, nach welcher derselbe seine Bewegung fortsetzen muß, nachdem derselbe mit einer gegebenen Geschwindigkeit unter einem gegebenen Winkel mit dem Horizont geworfen worden.

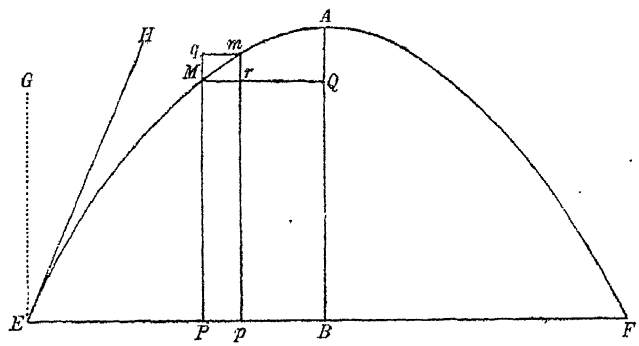


Fig. 23.

Es sey demnach *EF* (Fig. 23) eine Horizontal-Linie, auf welcher ein Körper aus dem Punkt *E* nach der Direction *EH* mit einer Geschwindigkeit, so durch den Fall aus einer Höhe $= b$ erlangt wird, geworfen worden, und die krumme Linie *EMAF* soll den Weg vorstellen, nach welchem sich der Körper beweget, biß derselbe wiederum auf die Horizontal-Linie in *F* herunter fällt. Man nenne den Winkel $HEF = \zeta$, welchen die Direction des Körpers *EH* anfänglich mit der Horizontal-Linie *EF* macht. Da nun die Geschwindigkeit des Körpers in *E* durch $\sqrt{b}$ ausgedruckt wird, wenn man diese Bewegung in den Gedanken in zwey andere zertheilet, deren eine nach der Vertical-Linie *EG*, die andere aber nach der Horizontal-Linie *EF* gerichtet ist, so wird die Geschwindigkeit der erstern $= \sqrt{b} \cdot \sin.\zeta$, und die Geschwindigkeit der letztern $= \sqrt{b} \cdot \cos.\zeta$. Wenn man nehmlich den Sinum von $90^0 = 1$ annimmt. Nun wollen wir setzen, der Körper sey schon biß in *M* gekommen, und aus *M* die Perpendicular-Linie *MP* herunter lassen, alsdenn $EP = x$ und $PM = y$ nennen; die Zeit aber, in welcher der Körper in *M* gekommen, sey $= t$. In einer unendlich kleinen Zeit dt wird der Körper durch Mm fortgehen, und wenn der Weg durch die Zeit dividirt für die Geschwindigkeit angenommen wird, so wird die Geschwindigkeit des Körpers in *M* seyn $= \frac{Mm}{dt}$. Diese Bewegung zertheile man auch in zwey andere nach den Directionen Mq und Mr, deren jene auf den Horizont perpendicular, diese aber dem Horizont parallel ist; und weil, nachdem man die Linie mp mit MP parallel gezogen, seyn wird

$$Mq = mr = dy \quad \text{und} \quad Mr = dx,$$

so wird die Geschwindigkeit nach der Direction $Mq = \frac{dy}{dt}$ und nach der Direction $Mr = \frac{dx}{dt}$. Da nun die Bewegung des Cörpers nur allein von seiner Schwehre verändert wird, deren Direction nach MP abwärts gerichtet ist, so sieht man wohl, daß die Geschwindigkeit nach der Direction Mr davon keine Veränderung leide, und dahero allenthalben gleich groß, das ist der ersten Geschwindigkeit nach der Horizontal-Direction, welche war $= \sqrt{b} \cdot \cos. \zeta$, beständig gleich bleibe. Dahero ist

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{b} \cdot \cos. \zeta, \quad \text{oder} \quad dx = dt\sqrt{b} \cdot \cos. \zeta,$$

welche Vergleichung integrirt giebt

$$x = t \cos. \zeta \cdot \sqrt{b},$$

woraus erhellet, daß der Körper nach der Horizontal-Direction immer gleich geschwind fortgehe. Hergegen würket aber die ganze Schwehre nach der andern Vertical-Direction Mq. Da nun die Geschwindigkeit nach dieser Direction ist $= \frac{dy}{dt}$, so wird die Höhe, aus welcher diese Geschwindigkeit erzeuget wird, $= \frac{dy^2}{dt^2}$, wovon das Differentiale, wenn dt unveränderlich angenommen, seyn wird

$$= \frac{2\,dy\,ddy}{dt^2}.$$

Dieses Differentiale muß sich zu dem Raum dy, welchen der Körper nach dieser Bewegung in der Zeit dt beschreibet, verhalten, wie die Kraft, welche nach der Direction Mq auf den Körper würket, zu seinem Gewicht. Nun aber ist diese Kraft dem Gewicht des Körpers selbst gleich; nur ist zu merken, daß dadurch die Geschwindigkeit nicht vermehret, sondern vermindert werde. Dahero erhalten wir diese Proportion:

$$\frac{2\,dy\,ddy}{dt^2} : dy = -1 : 1,$$

woraus diese Aequation entspringt:

$$2\,ddy = -dt^2.$$

Hiervon ist das Integrale

$$\frac{2\,dy}{dt} = C - t,$$

allwo $\frac{dy}{dt}$ die Vertical-Geschwindigkeit des Körpers nach Verfließung der Zeit t anzeiget. Da nun im Anfange, da $t = 0$, die Vertical-Geschwindigkeit war $= \sqrt{b} \cdot \sin. \zeta$, so wird für diesen Ort $2\sqrt{b} \cdot \sin. \zeta = C$, wodurch die Größe des Buchstabens C, welcher durch die Integration hinein gekommen, bestimmet wird. Also wird seyn

$$\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b} \cdot \sin. \zeta - t,$$

oder

$$2dy = 2dt \sin. \zeta \cdot \sqrt{b} - tdt,$$

wovon das Integrale giebt

$$2y = 2t \sin. \zeta \cdot \sqrt{b} - \frac{1}{2}tt.$$

Aus der Differential-Aequation

$$\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b} \cdot \sin. \zeta - t$$

erhellet erstlich, weil $\frac{dy}{dt}$ die Vertical-Bewegung anzeigt, daß wenn $t = 2\sqrt{b} \cdot \sin. \zeta$, die Vertical-Geschwindigkeit des Körpers verschwindet, und derselbe seine Horizontal-Bewegung allein behalte. Wenn wir also setzen, daß dieses im Punct A geschehe, so wird die Tangens der krummen Linie in A horizontal seyn. Wenn aber t grösser wird, als $2\sqrt{b} \cdot \sin. \zeta$, so bekömmt die Vertical-Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ einen negativen Werth, welcher anzeiget, daß der Körper alsdenn im Herunterfallen begriffen sey. Also wird EA derjenige Theil der Bahn EMF seyn, durch welchen der Körper hinauf steigt, und AF der Theil, durch welchen der Körper wiederum herab fällt.

Um aber die Natur dieser krummen Linie näher zu erkennen, so ist zu merken, daß

$$t = \frac{x}{\cos. \zeta \cdot \sqrt{b}}.$$

Man setze also diesen Werth für t in der Integral-Aequation

$$2y = 2t \sin. \zeta \cdot \sqrt{b} - \frac{1}{2}tt,$$

so wird

$$2y = 2x \operatorname{tang}. \zeta - \frac{xx}{2b \cos. \zeta^2},$$

oder

$$xx - 4bx \sin. \zeta \cos. \zeta = -4by \cos. \zeta^2.$$

Hieraus kommt

$$-x + 2b \sin.\zeta \cos.\zeta = 2 \cos.\zeta \cdot \sqrt{(bb \sin.\zeta^2 - by)}.$$

Aus dieser Aequation sieht man nun leicht, daß die gesuchte krumme Linie EMF eine Parabel sey. Denn man nehme

$$EB = 2b \sin.\zeta \cos.\zeta,$$

so wird

$$BP = 2b \sin.\zeta \cos.\zeta - x.$$

Hernach richte man in B die Perpendicular-Linie auf $BA = b \sin.\zeta^2$, und ziehe MQ mit EF parallel, so wird

$$AQ = b \sin.\zeta^2 - y, \quad MQ = BP.$$

Nun nenne man $AQ = p$ und $QM = q$, so wird $q = 2 \cos.\zeta \cdot \sqrt{bp}$ oder

$$qq = 4bp \cos.\zeta^2,$$

welche Aequation klar zeiget, daß die gesuchte krumme Linie eine Parabel sey, deren Axe die Vertical-Linie AB. Und hieraus erhellet die Wahrheit des ersten, andern und dritten Lehrsatzes: nehmlich erstlich, daß die Axe der Parabel AB auf die Horizontal-Linie EF perpendicular, und daß folglich die beyden Theile AE und AF einander gleich und ähnlich seyn. Hernach ist auch klar, daß die äussersten Puncte auf der Horizontal-Linie E und F gleich weit von dem höchsten Punct A entfernet seyen. Drittens folgt aus dieser Gleichheit der Theile AE und AF, daß die Winkel, welche die krumme Linie in E und F mit der Horizontal-Linie EF macht, einander gleich seyen. Weil ferner $EF = 2EB = 4b \sin.\zeta \cos.\zeta$, so wird die Vertical-Geschwindigkeit des Körpers in F seyn

$$= \sqrt{b} \cdot \sin.\zeta - \frac{x}{2\sqrt{b} \cdot \cos.\zeta},$$

wenn man für x den Werth $4b \sin.\zeta \cos.\zeta$ setzt. Es wird also diese Geschwindigkeit

$$= -\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta,$$

welche von der ersten in E nur darinne unterschieden ist, daß jene aufwärts, diese aber abwärts gerichtet ist. Weil nun die Horizontal-Bewegung immer

einerley bleibt, so folgt hieraus, daß der Körper in F eben diejenige Geschwindigkeit habe, mit welcher er in E fortgeworfen worden. Weil ferner $EB = 2b \sin.\zeta \cos.\zeta$, so ist $EB = b \sin.2\zeta$, und die Weite des Wurfs auf der Horizontal-Linie, nehmlich EF,

$$= 2b \sin.2\zeta.$$

Woraus erstlich folgt, daß, wenn die Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ im Anfange E einerley bleibt, die Weite des Wurfs dem Sinus des doppelten Winkels HEF proportional sey; wenn aber der Winkel FEH einerley bleibt, und die Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ verändert wird, so ist die Weite des Wurfs EF dem b, das ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Dieses dienet zum Beweisthum des 6ten und 7ten Lehr-Satzes. Was ferner die gröste Weite des Wurfes anlanget, weil die Weite $EF = 2b \sin.2\zeta$ gefunden worden, so sieht man sogleich, daß dieselbe am grösten werde, wenn der Winkel 2ζ neunzig Grad hält; denn da wird sein Sinus dem Radio gleich, alle übrigen Sinus aber sind, wie bekannt, kleiner als der Radius. Wenn also der Wurf auf der Horizontal-Linie am weitesten reichen soll, so muß der Winkel HEB, unter welchem der Körper anfänglich geworfen wird, 45^0 halten; und hierinne besteht der vierdte Lehr-Satz. Nimmt man nun den Winkel HEB von 45^0, so wird $\sin.2\zeta = 1$ und folglich die Weite des Wurfs $EF = 2b$, das ist, der doppelten Höhe b, aus welcher die erste Geschwindigkeit des Körpers durch den Fall erzeuget werden kann. Hieraus erhält also der fünfte Lehr-Satz seine Richtigkeit. In allen Fällen aber kann die Weite des Wurfs durch diese Regel De-tri gefunden werden. Man sage nehmlich, wie sich verhält der Sinus von 90^0 zum Sinus des doppelten Winkels HEB, welchen die Direction des Körpers im Anfange mit dem Horizont machet, also verhält sich die doppelte Höhe b, woraus die Geschwindigkeit des Körpers erzeuget wird, zur Weite des Wurfs EF, welche solcher Gestalt gefunden wird. Wollte man noch ferner die gröste Höhe AB bestimmen, zu welcher der Körper in seinem Heraufsteigen gelangt, so ist dieselbe $AB = b \sin.\zeta^2$, und wird folglich auch leicht durch die Regel De-tri gefunden.

Wenn also der Wiederstand der Luft auf die Canonen-Kugeln keine Würkung hätte, so würde die Bahn derselben beständig eine Parabel seyn, und die Bewegung der Kugel würde sich auch nach den hier gefundenen Gesetzen richten, und folglich leicht bestimmt werden können, wie fast aus allen Anleitungen der Artillerie, welche auf diese Gründe gebauet worden, zur Gnüge erhellet. Wir hätten auch leicht unsere Bestimmung allgemeiner machen

können, wenn wir die Linie EF nicht horizontal, sondern auf den Horizont nach Belieben inclinirt, angenommen hätten. Die Rechnung würde fast gar nicht weitläuftiger worden seyn, und aus derselben würde man gesehen haben, daß, wenn der Wurf auf einer solchen schiefen Fläche am weitesten reichen soll, alsdenn die erste Direction des Körpers EH den Winkel GEF, welchen die Vertical-Linie GE, als nach welcher die Schwehre würket, mit der schiefen Linie EF macht, gleichfalls in zwey gleiche Theile zerschneiden müsse. Weil aber diese Betrachtungen in der Artillerie gar keinen Nutzen haben können, so wollen wir uns dabey nicht länger aufhalten, sondern zum folgenden Satz des Autoris fortschreiten.

SECHSTER SATZ

Die Bahn, nach welcher sich eine Bombe oder Stück-Kugel in der Luft beweget, ist weder eine Parabel, noch bey nahe eine Parabel, wenn die Geschwindigkeit, womit dieselben geschossen worden, nicht sehr geringe ist.

Wir haben in dem vierdten Satz dieses Capitels gewiesen, daß eine Mußketen-Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, wenn dieselbe mit der Helfte ihres Gewichts Pulver aus einem Lauf, der 45 Zoll lang, geschossen wird, eine Geschwindigkeit von ungefehr 1700 Schuhen in 1″ erlange. Wenn sich nun diese Kugel in einer Parabel bewegte, so müßte der weiteste Schuß, welcher unter einem Winkel von 45° mit dem Horizont geschieht, kraft des fünften Lehr-Satzes sich ungefehr auf 17 Englische Meilen erstrecken. Nun aber versichern uns alle practische Autores, daß dieser Schuß nicht einmahl auf eine halbe Meile reiche. Diego Ufano[1]) bestimmet für ein Schieß-Gewehr, welches 4 Schuh lang ist, und eine bleyerne Kugel von anderthalb Untzen schießt, welches bey nahe mit unserem Exempel überein kommt, den weitesten Schuß auf 797 gemeine Schritt, wenn dasselbe nehmlich unter einem Winkel zwischen 40 und 50 Graden mit dem Horizont gerichtet, und mit so viel von dem feinsten Pulver, als das ganze Gewicht der Kugel beträgt, geladen wird. Mersennus[2]) berichtet uns,

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 34. F. R. S.

2) P. M. Mersenne (1588—1648), p. 84 der Abhandlung *Ballistica et Acontismologia* in seinem Sammelwerk *Cogitata physico-mathematica*, Paris 1644. F. R. S.

daß er die Horizontal-Schußweite eines Feuer-Rohrs, welches unter einem Winkel von 45° gerichtet gewesen, kleiner als 400 Faden oder 800 Yards befunden. Da nun alle diese Schüsse sich nicht einmahl auf eine Englische Meile erstrecken, so folget, daß ein Mußketen-Schuß, welcher mit einer hinlänglichen Ladung Pulver gethan wird, unter einer Richtung von 45° nicht einmahl den 34sten Theil der Weite beträgt, zu welcher derselbe gelangen müßte, wenn sich die Kugel in einer Parabel bewegte.

Ueber diese große Verminderung der Horizontal-Schuß-Weite hat man sich um so viel weniger zu verwundern Ursache, wenn man betrachtet, daß der Wiederstand dieser Kugel, indem dieselbe aus dem Lauf herausfähret, ungefähr 120 mahl größer ist, als ihre eigene Schwehre: als welches in dem zweyten Satz dieses Capitels durch unstreitige Versuche ist bewiesen worden.

Wollte man aber dagegen einwenden, wie diese Abweichung des Flugs einer Mußketen-Kugel von einer Parabel noch nicht genugsam beweise, daß auch weit schwehrere Kugeln, als welche in Ansehung ihres Gewichts einen weit kleineren Wiederstand leiden, von der gemeinen Meynung merklich abweichen, so wollen wir zu diesem Ende eine eiserne Kugel von 24 ℔, dergleichen gemeiniglich zu Lande die schwersten zu seyn pflegen, als ein Exempel anführen. Wenn eine solche Kugel aus einer dazu gebräuchlichen Canone mit voller Ladung geschossen wird, so wird derselben, wie in dem vierdten Satz dieses Capitels gezeiget worden, eine Geschwindigkeit von 1650 Schuhen in einer Secunde eingedrücket. Wenn man nun hieraus nach dem fünften Lehr-Satz die gröste Schußweite für den Winkel von 45 Graden nach der Parabel berechnet, so findet man dafür ungefehr 16 Meilen, welche zwischen fünf und sechs mahl grösser ist, als dieselbe würklich befunden wird; denn alle Practici stimmen darinnen überein, daß sich dieser Schuß nicht gar auf 3 Meilen erstrecke. St. Remy[1]) giebt uns auch Nachricht von einigen Versuchen, welche von dem Mr. du Metz[2]) angestellet worden. Nach denselben beträgt die Schußweite unter einem Winkel von 45° von einem Stück, welches 10 Schuh lang, und eine 24pfündige Kugel führete, und mit 16 ℔ Pulver geladen worden, mehr nicht, als 2250 französische Faden, welche Weite um 222 Faden kleiner ist, als drey Meilen. Wenn also eine 24pfündige eiserne Kugel mit ihrer völligen Ladung Pulver unter einem Winkel von 45° geschossen wird, so geht dieselbe

1) P. S. de Saint-Remy (1650—1716), *Mémoires d'Artillerie*, Paris 1697. F. R. S.

2) P. C. B. du Metz (1638—1690), französischer Artillerie-General. F. R. S.

nicht einmahl den fünften Theil so weit, als sie gehen müßte, wenn ihre Bewegung nach einer Parabel geschähe.

Es geschieht aber nicht allein in diesem Fall, wenn die Kugel mit einer so sehr grossen Geschwindigkeit geschossen wird, daß ihre Bahn so merklich von einer Parabel unterschieden ist; eine gleiche Abweichung findet auch öfters in solchen Bewegungen statt, welche so langsam sind, daß man den Flug derselben mit Augen sehen und erkennen kann. Denn da finden sich sehr wenig Bewegungen, so auf diese Art untersuchet werden können, welche nicht merklich von dem ersten, zweyten und dritten Lehrsatz abweichen sollten: indem diese Körper immer nach einer solchen krummen Linie wiederum herab kommen, welche kürzer ist, und mit dem Horizont einen größern Winkel macht als diejenige, nach welcher die Körper herauf gestiegen. Ferner ist auch der höchste Punct ihrer Bahn dem Ort, wo der Körper herunter fällt, immer viel näher, als demjenigen, von welchem derselbe hinauf gefahren. Um hiervon völlig überzeuget zu werden, daß auch nicht der geringste Zweifel überbleibe, so darf man nur aus einem dazu bequemen Ort auf den Flug der Steine, Pfeile oder Bomben, welche auf eine ziemliche Weite geworfen werden, wohl Achtung geben.

Ich habe auch so gar durch die Erfahrung befunden, daß der fünfte, sechste und siebente Lehrsatz sehr weit von der Wahrheit abweichen, wenn man nach denselben die Bewegung solcher Kugeln, welche nur einen kleinen Grad der Geschwindigkeit haben, beurtheilet. Ich habe zum Exempel eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter mit einer Geschwindigkeit von 400 Schuh in 1″ unter einem Winkel von 19°, 5′ mit dem Horizont abgeschossen, und befunden, daß dieselbe auf einem ebenen Grunde nicht weiter als 448 Yards gegangen, da doch die gröste Horizontal-Schußweite nach dem fünften Lehrsatz zum wenigsten 1700 Yards, und hieraus ferner nach dem sechsten Lehr-Satz die Schußweite für den Winkel von 19°, 5′ von 1050 Yards gefunden wird. Dahero in diesem Versuche die Schußweite nicht gar $\frac{3}{7}$ derjenigen ausgetragen, zu welcher die Kugel hätte gelangen müssen, wenn die gemeine Meynung wahr wäre.

Ferner ist diese Kugel mit eben der Geschwindigkeit als im vorigen Versuche, aber nur unter einem Winkel von 9°, 45′ abgeschossen, und die Weite des Schusses auf einer Horizontal-Fläche bey 330 Yards befunden worden.

Diese Weite hätte nun nach dem fünften und sechsten Lehr-Satz in Ansehung der ersten Geschwindigkeit 566 Yards seyn sollen. Wenn man aber dieselbe aus dem vorhergehenden Versuche vermittelst des sechsten Lehr-Satzes

berechnet, so findet man nicht mehr als 241 Yards, und sind also diese beyden Zahlen sehr weit von 330 Yards unterschieden.

Weiter wurde eine Kugel unter einem Winkel von 8^0 mit dem Horizont, aber mit einer Geschwindigkeit von 700 Schuhen in 1″ abgeschossen, und die Schußweite von 690 Yards befunden.

Wenn man aber diese Weite aus der ersten Geschwindigkeit der Kugel nach dem 5ten und 6ten Lehr-Satz berechnet, so findet man, daß, wenn die Lehre, auf welche sich diese Lehr-Sätze gründen, der Wahrheit gemäß wäre, die Kugel in dem gegenwärtigen Exempel auf eine Weite von 1400 Yards hätte gelangen müssen. Woraus erhellet, daß die Kugel nicht halb so weit gegangen, als sie hätte gehen sollen, wenn ihre Bewegung nach einer Parabel geschehen wäre.

Wiederum ist eine Kugel mit eben derselben Geschwindigkeit, als in dem letzten Experiment, aber nur unter einem Winkel von 4^0 geschossen, und die Weite des Schusses 600 Yards befunden worden.

Diese Weite hätte nun nach dem vorhergehenden Versuche, kraft des 6ten Lehr-Satzes, nicht mehr als 350 Yards austragen sollen, woraus die Unrichtigkeit dieses Satzes, und folglich auch der gemeinen parabolischen Lehre, worauf derselbe gegründet ist, klärlich erhellet.

Da nun solcher gestalt bewiesen worden, daß die Bahn, welche auch von den schwehrsten Kugeln in der Luft beschrieben wird, weder eine Parabel sey, noch derselben nahe komme, ausgenommen diejenigen Fälle, in welchen die Kugel mit einer sehr geringen Geschwindigkeit beweget wird, so wollen wir die weitere Erklärung der Natur dieser krummen Linien, nach welchen sich die Kugeln würklich in der Luft bewegen, auf einen andern Theil verspahren. Inzwischen will ich noch hier, um einen Begriff von den grossen Schwierigkeiten, womit diese Untersuchung verknüpfet ist, zu geben, einige Nachricht von einem ganz außerordentlichen Umstand, welcher öfters vorkommt, mittheilen.

Weil die Schwehre nach einer senkelrechten Direction auf den Horizont würket, so ist klar, daß, wenn außer der Schwehre keine andere Kraft einen geworfenen Körper von seinem geradlinichten Lauf ablenkete, seine Bewegung beständig in einer Perpendicular-Fläche auf den Horizont geschehen müste, welche durch die Linie, nach welcher der Körper anfänglich geworfen worden, durch gieng. Wir haben aber befunden, daß die Körper in ihrer Bewegung öfters von dieser Fläche, bald zur Rechten, bald auch zur Linken, abweichen,

und dieses nach einer gebogenen Linie, welche die erhabene Krümmung gegen die gemeldete Fläche zukehret. Solcher gestalt geschieht die Bewegung einer Kugel öfters in einer Linie, welche eine doppelte Krümmung hat, indem dieselbe erstlich durch die Kraft der Schwehre abwärts, und hernach aus der Vertical-Fläche ihrer ursprünglichen Bewegung entweder zur Rechten oder zur Linken durch eine andere Kraft gezogen wird. In diesem Fall liegt also kein Theil der Bahn, in welcher sich die Kugel bewegt, in einer Fläche, sondern dieser Weg wird sich gleichsam in der Oberfläche einer Art von Cylinder befinden, dessen Axe auf dem Horizont senkelrecht aufsteht. Die Wahrheit dieses Umstandes soll nun in dem folgenden Satz durch unwiedersprechliche Versuche dargethan werden.

ERSTE ANMERKUNG

Der Verfasser hat uns hier zu einem zweyten Theil, in welchem die wahre Bahn einer Canonen-Kugel bestimmt werden sollte, Hoffnung gemacht; so viel uns aber hiervon bekannt, so ist darüber noch nichts zum Vorschein gekommen, obgleich seit der Zeit schon etliche Jahre verflossen. Diese Untersuchung ist aber auch so schwehr, daß der Autor mit Recht eine weit grössere Zeit zu Vollendung derselben fordern kann. Wir wollen inzwischen aus demjenigen Begrif von dem Wiederstand der Luft, welchen wir aus der Erfahrung hergeleitet, uns bemühen, die wahre Bewegung einer Kugel in der Luft zu bestimmen, in der Hoffnung, daß unsere Arbeit nicht viel von derjenigen, welche uns der Autor darüber versprochen hat, unterschieden seyn werde. Hierbey wird aber unumgänglich nöthig seyn, den Umstand, dessen der Autor zu Ende dieses Satzes Meldung thut, nach welchem eine Kugel von der Vertical-Fläche, in welcher die Bewegung angefangen, bald zur Rechten, bald zur Linken getrieben wird, völlig aus den Augen zu setzen, indem dieser Umstand, wie im folgenden gezeigt werden soll, meistentheils von der irregulairen Figur der Kugel herkommt. Wir setzen also zum voraus, daß die Kugel, welche geschossen wird, nicht nur vollkommen rund sey, sondern, daß auch ihr Mittelpunct der Schwehre mit dem Mittelpunct ihrer Ründung auf das genauste übereinkomme; ingleichen auch, daß die Kugel keine sonderbahre Bewegung um ihr Centrum bekomme. Denn wenn man solche Zufälle mit in Betrachtung ziehen wollte, so würde die Untersuchung nicht nur höchst schwehr, und viel-

leicht gar unmöglich seyn, sondern man würde daraus auch nicht den geringsten Nutzen schöpfen können, indem wir nimmer vorher von der Ungleichheit, welche sich in der Figur und innern Beschaffenheit der Kugel findet, eine genaue Erkenntniß haben können. Wenn wir aber die Kugel vollkommen rund annehmen, und das Centrum gravitatis derselben von ihrem Mittelpunct nicht unterschieden ist, so ist klar, daß dieselbe ihre Bewegung immer in einer Vertical-Fläche fortsetzen müsse.

Damit aber diese Untersuchung in der Ausübung der Artillerie einigen Nutzen habe, so wird nöthig seyn, dieselbe in drey Theile zu theilen.

Erstlich wollen wir die Horizontal-Schüsse, in so fern die Krümmung ihrer Bahn nicht merklich ist, betrachten, und sowohl die Verringerung der Geschwindigkeit, als die Abweichung der Kugel von der Horizontal-Linie bestimmen.

Zweytens wollen wir die Vertical-Schüsse vornehmen, und sowohl das Hinaufsteigen, als das Herunterfallen der Kugel, untersuchen.

Drittens wollen wir alle schiefe Schüsse, welche unter einem schiefen Winkel mit dem Horizont gethan werden, in Erwegung ziehen, und sowohl die Natur der krummen Linie, in welcher sich die Kugel beweget, als auch die Weite des Schusses bestimmen; da denn die von dem Autore angeführten Versuche dienen werden, um unsere Theorie zu bestätigen.

Wir wollen also setzen, die Kugel werde nach der Horizontal-Direction EF (Fig. 24) geschossen. Ob nun gleich die Bahn der Kugel EMG von dieser

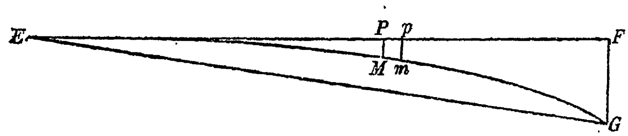


Fig. 24.

geraden Linie EF je länger je mehr abweicht, so wird doch auf eine ziemliche Weite der Unterscheid so geringe seyn, daß derselbe kaum bemerket werden kann. Weil man nun vermeynte, daß die Kugel auf eine gewisse Weite sich würklich nach der geraden Linie EF bewegte, so hat man diese Weite den Kernschuß genennet, als welcher die Kugel auf eben das Punkt, nach welchem die Canone gerichtet worden, tragen soll. In der That aber fängt sich die wahre Bahn der Kugel gleich von der Mündung des Stücks E an abwärts zu krümmen; dahero man sich die Weite des Kern-Schusses EF so lang vor-

stellen muß, bis die Abweichung FG oder vielmehr der Winkel FEG in der Praxi merklich zu werden beginnt. Da nun der Winkel FEG sehr klein ist, so wird die krumme Linie EMG so wenig von der geraden EF unterschieden seyn, daß man den Unterscheid ohne Fehler aus der Acht lassen kann. Wir können uns also einbilden, als wenn sich die Kugel in der That nach der geraden Linie EF bewegte, wenn wir nur zugleich bey einem jeglichen Punkt derselben P bestimmen, wie weit die Kugel von demselben schon abwärts in M gesunken; welches sehr leicht ist, wenn nur die Zeit von E zu P bekannt, indem diese Linie PM die Würkung der Schwehre ist, welche in einer Secunde 15,625 Rheinl. Schuh beträgt.

Es sey also b die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel in E durch den Fall erlanget wird; der Diameter der Kugel sey $= c$, und die Materie, woraus die Kugel besteht, sey n mal schwehrer, als die Luft. Nach einer Zeit t sey die Kugel schon bis in M oder P gekommen, und man nenne $EP = x$, $PM = y$, und die Geschwindigkeit der Kugel $= \sqrt{v}$. Weil nun $PM = y$ der Höhe gleich ist, durch welche die Kugel in der Zeit t gefallen seyn würde, so ist $y = \frac{tt}{4}$.[1] Um aber die Bewegung nach der Horizontal-Linie EP zu bestimmen, so ist zu merken, daß der Wiederstand in P durch eine Luft-Säule ausgedruckt werde, deren Höhe $= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$, wo h die Höhe der Atmosphäre andeutet, und entweder 28845 Englische, oder 27979 Rheinl. Schuh beträgt. Da nun das Gewicht der Kugel durch eine Luft-Säule ausgedruckt wird, deren Höhe $= \frac{2}{3}nc$, so verhält sich die Gewalt des Wiederstandes zum Gewicht der Kugel, wie $\frac{3v(h+v)}{4nch}$ zu 1. Indem also die Kugel durch $Pp = dx$ fortgeht, so wird

$$dv = \frac{-3v(h+v)}{4nch}dx \quad \text{und} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

Weil nun

$$dx = \frac{-4nchdv}{3v(h+v)},$$

so wird

$$dt = \frac{-4nchdv}{3v(h+v)\sqrt{v}}.$$

Die erstere Aequation kann auf diese Form gebracht werden:

$$dx = \frac{-4nc}{3}\left(\frac{dv}{v} - \frac{dv}{h+v}\right),$$

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 290. F. R. S.

wovon das Integrale ist

$$x = \frac{4nc}{3} l \frac{b(h+v)}{v(b+h)}$$

Setzt man nun Kürze halber $\frac{3x}{4nc} = z$, und e für die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$, so wird

$$e^z = \frac{b(h+v)}{v(b+h)} \quad \text{und} \quad v = \frac{bh}{e^z(b+h) - b}.$$

Die andere Aequation

$$dt = \frac{-4nchdv}{3v(h+v)\sqrt{v}},$$

giebt

$$dt = \frac{-4nc}{3} \cdot \frac{hdv}{(h+v)v\sqrt{v}}.$$

Man setze, um die Irrationalität zu heben, $h = aa$, und $v = uu$, so wird

$$dt = \frac{-4nc}{3} \cdot \frac{2aadu}{uu(aa+uu)} = \frac{8nc}{3}\left(\frac{du}{aa+uu} - \frac{du}{uu}\right),$$

wovon das Integrale zum Theil auf der Quadratur des Zirkuls beruht. Denn es ist

$$\int \frac{adu}{aa+uu} = \text{A. tang.} \frac{u}{a},$$

das ist einem Zirkul-Bogen, dessen tangens $= \frac{u}{a}$, wenn der Radius $= 1$ genommen wird. Also bekommt man

$$t = \frac{8nc}{3}\left(\frac{1}{a} \text{A. tang.} \frac{u}{a} + \frac{1}{u} - C\right).$$

Man setze nun wiederum $a = \sqrt{h}$, und $u = \sqrt{v}$, und bestimme die Größe C dergestalt, daß $v = b$ wird, wenn $t = 0$, so wird man finden

$$t = \frac{8nc}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \text{A. tang.} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \text{A. tang.} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$$

oder

$$t = \frac{8nc}{3}\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{bv}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \text{A. tang.} \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{h}}{h+\sqrt{bv}}\right).$$

Da nun vorher v aus der Weite x bestimmet worden, so kann auch t durch x ausgedrückt werden, und folglich bekömmt man $y = \frac{tt}{4}$ durch x ausgedrückt, woraus man den Winkel PEM, nachdem man die Linie EM gezogen, erhält.

Weil wir aber setzen, daß die Abweichung von der Horizontal-Linie EF nicht merklich ist, so kann man sich mit grösserem Vortheil einer bequemen Näherung bedienen. Denn in diesem Fall muß der Bruch $\frac{3x}{4nc} = z$ sehr klein seyn, und da wird beynahe

$$e^z = 1 + z = 1 + \frac{3x}{4nc},$$

folglich

$$v = b - \frac{b(b+h)z}{h}$$

und

$$\sqrt{v} = \sqrt{b} - \frac{(b+h)z\sqrt{b}}{2h},$$

und also

$$t = \frac{8nc}{3}\left(\frac{(b+h)z}{2h\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\,\text{A. tang.}\,\frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}}\right).$$

Da nun z sehr klein, so ist

$$\text{A. tang.}\,\frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}} = \frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}},$$

und also

$$t = \frac{4ncz}{3\sqrt{b}} = \frac{x}{\sqrt{b}},$$

welcher Ausdruck für eine gänzlich gleichförmige Bewegung gilt. Weil aber doch die Bewegung nicht als gleichförmig angesehen werden kann, so müssen wir die Näherung genauer nehmen. Es sey also

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}zz,$$

so wird

$$v = b - \frac{b(b+h)}{h}\left(z - \frac{1}{2}zz - \frac{bzz}{h}\right)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{(b+h)z}{2h\sqrt{b}} + \frac{(b+h)(h-b)zz}{8hh\sqrt{b}}.$$

Da nun

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} \quad \text{und} \quad z = \frac{3x}{4nc},$$

so wird

$$t = \frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{3(b+h)xx}{16nch\sqrt{b}} + \frac{3(hh-bb)x^3}{128nncchh\sqrt{b}},$$

woraus die Zeit, in welcher die Kugel durch die Weite $EP = x$ gehet, erkannt wird. Hieraus findet man aber ferner die Abweichung $PM = \frac{tt}{4}$, welche seyn wird:

$$PM = \frac{xx}{4b} + \frac{3(b+h)x^3}{32ncbh},$$

und folglich bekommt man den Winkel PEM, dessen Tangens seyn wird

$$= \frac{x}{4b} + \frac{3(b+h)xx}{32ncbh}.$$

Die Geschwindigkeit der Kugel in P aber wird aus dieser Aequation erkannt werden

$$v = b - \frac{3b(b+h)x}{4nch} + \frac{9b(b+h)(2b+h)xx}{32n^2c^2hh},$$

oder es verhält sich $\sqrt{b}$ zu $\sqrt{v}$, wie

$$1 + \frac{3(b+h)x}{8nch} + \frac{9(hh-bb)xx}{128n^2c^2h^2} \text{ zu } 1.$$

Da des Winkels PEM Tangens bey nahe ist $= \frac{x}{4b}$, so läßt sich hieraus die Weite EF bestimmen, wo der Abweichungs-Winkel FEG eine gegebene Grösse bekömmt. Es sey nun dieser Winkel FEG ein halber Grad, so wird

$$\frac{x}{4b} = 0{,}0087269, \quad \text{und also} \quad EF = \frac{8b}{229} \text{ ungefehr.}$$

Weil aber der Winkel FEG doch noch etwas grösser als $\frac{1}{2}$ Grad seyn würde, so muß EF etwas kleiner als $\frac{8b}{229}$ angenommen werden; und damit der Winkel FEG für eine 24pfündige eiserne Kugel, welche mit einer Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde geschossen wird, einen halben Grad betrage, so muß seyn $EF = \frac{b}{40}$, oder $= 900$ Schuh. Wenn also das Punct G, welches von der Canone 900 Schuh weit entfernet ist, getroffen werden soll,

so muß die Axe der Canone nach dem Punct F oder um einen halben Grad höher gerichtet werden. Man kann aber aus diesen Formuln für einen jeglichen Fall, wenn die Geschwindigkeit der Kugel in E, nebst ihrem Diameter c und ihrer Schwehre n in Ansehung der Luft gegeben ist, das Punct G in einer gegebenen Weite $EF = a$, bestimmen, wohin die Kugel treffen wird, und auch ausser dem Winkel FEG noch die Geschwindigkeit, welche die Kugel in G haben wird, anzeigen; wenn nehmlich nur die Weite EF nicht allzugroß ist, als daß man die Krümmung für nichts achten kann.

Laßt uns setzen, der Diameter der Kugel sey $5\frac{1}{2}$ Zoll, oder $\frac{11}{24}$ Engl. Schuh, ferner sey die Kugel von Eisen, und also $n = 6647$, und die erste Geschwindigkeit derselben betrage 1650 Engl. Schuh, oder 1600 Rheinl. Schuh; so wird die Höhe $b = 40960$ Rheinl. Schuh. Da nun $c = \frac{11}{24}$ Engl. $= 0{,}44458$ Rheinl. Schuh, so wird $\frac{4nc}{3} = 3940$, und es ist $h = 27979$ Rheinl. Schuh.

Nun sey die Weite $EF(a) = 1000$ Rheinl. Schuh, so wird $x = 1000$ und $z = \frac{3x}{4nc} = \frac{100}{394}$. Hieraus erhellet, daß z so klein ist, daß die obigen Näherungen genau genug sind. Weil also, wenn die Geschwindigkeit in G durch $\sqrt{v}$ angedeutet, sich verhält

$$\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1 + \frac{(b+h)z}{2h} + \frac{(b+h)(h-b)zz}{8hh} : 1,$$

so ist $\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1{,}30348 : 1$, folglich beträgt die Geschwindigkeit der Kugel in G noch 1227 Rheinl. Schuh in einer Secunde. Hernach ist die Tangens des Winkels FEG

$$= \frac{x}{4b} + \frac{(b+h)xz}{8bh} = \frac{x}{4b}\left(1 + \frac{(b+h)z}{2h}\right),$$

welche in Zahlen gefunden wird

$$= 1{,}31268 \cdot \frac{x}{4b} = 0{,}008012,$$

und dieses ist die Tangens von 27′, 32″. Also ist in diesem Exempel der Abweichungs-Winkel FEG nicht grösser als 27′, 32″, ungeachtet die Weite EF 1000 Rheinl. Schuh groß, und die Geschwindigkeit der Kugel in G schon sehr merklich abgenommen. Wenn also in einer Distanz von 1000 Schuhen mit dieser Kugel ein gegebenes G getroffen werden soll, so muß man mit dem Stücke nach einem höheren Punct F zielen, dergestalt, daß der Winkel FEG 27′, 32″ betrage, zu welchem Ende man sich auf dem Stück solche Marquen, um darnach zu zielen,

machen könnte, daß die Visier-Linie mit der Axe des Stücks einen Winkel von 27′, 32″ machte. Wäre die Distanz noch so groß, so müßte dieser Winkel auch ungefehr noch so groß genommen werden. Für kleinere Distanzen aber, als 1000 Schuh, wird man nicht merklich fehlen, wenn man diesen Winkel nach eben derjenigen Verhältniß vermindert. Also wird für eine Weite von 500 Schuhen der Abweichungs-Winkel = 13′, 46″, für 250 Schuh aber 6′, 53″. Ueberhaupt aber sieht man hieraus, daß, wenn die gegebene Weite nicht viel grösser, als 1000 Schuh gesetzt wird, der Winkel FEG nicht einmahl auf einen halben Grad steige. Da man nun in der gewöhnlichen Art die Canonen zu richten auf solche kleine Winkel nicht sieht, so liegt die Ursache klar vor Augen, warum man insgemein geglaubet, daß eine Stück-Kugel auf eine ziemliche Weite nach einer vollkommen geraden Linie fortgehe. So geringe ist also die Krümmung der Bahn einer Stück-Kugel, wenn das Stück horizontal gerichtet worden; dieselbe wird aber noch kleiner, wenn das Stück mit dem Horizont einen Winkel macht. Denn alsdenn würket nur ein Theil der Schwehre auf die Krümmung der Bahn, da in den Horizontal-Schüssen die ganze Schwehre dahin gerichtet war. Diese Verminderung geschieht ungefehr nach dem Cosinu des Winkels, welchen das Stück mit dem Horizont macht; und wenn das Stück völlig aufrecht gestellet wird, so fährt die Kugel nach einer geraden Linie in die Höhe, und leidet gar keine Krümmung, welches der zweyte Fall ist, den wir uns zu erläutern vorgenommen haben.

ZWEYTE ANMERKUNG

Es sey demnach wie vorher der Diameter der Kugel $= c$, die Schwehre der Kugel n mahl grösser, als die Schwehre der Luft, und die erste Geschwindigkeit der Kugel $= \sqrt{b}$, mit welcher dieselbe gerade aufwärts nach der Vertical-Direction EA (Fig. 25) geschossen wird. Wir wollen setzen, diese Kugel sey nach Verfließung der Zeit t biß in P gestiegen, wo wir die Geschwindigkeit derselben $= \sqrt{v}$, und die Höhe $EP = x$ nennen wollen. Wenn nun das unendlich kleine Element $Pp = dx$ gesetzt wird, so wird $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$[1]), und indem die Kugel durch Pp hinauf steiget, so wird ihre Bewegung beydes durch ihre

1) Im Original: $dt = \frac{-dx}{\sqrt{v}}$. Berichtigt von F. R. S.

Schwehre und durch den Wiederstand der Luft vermindert. Die natürliche Schwehre der Kugel muß aber um $\frac{1}{n}$ vermindert werden, weil ein jeglicher Körper in der Luft so viel von seiner Schwehre verlieret, als eine gleich große Maße Luft wiegt. Dahero wird die Würkung der Schwehre auf die Kugel durch $1-\frac{1}{n}$ ausgedrückt werden, wofür wir Kürze halber g setzen wollen. Hernach ist, wie wir oben[1] gesehen, die Würkung des Wiederstands

$$=\frac{3v(h+v)}{4nch},$$

woraus wir diese Vergleichung erhalten

$$dv=-g\,dx-\frac{3v(h+v)\,dx}{4nch}$$

oder

$$dx=\frac{-4nch\,dv}{4ngch+3hv+3vv}.$$

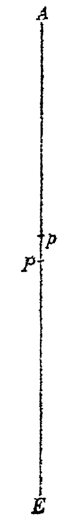


Fig. 25.

Wovon die Integration entweder von der Quadratur des Zirkuls, oder von den Logarithmis abhängt, oder auch algebraisch bewerkstelliget werden kann. Denn wenn $h<\frac{16}{3}ngc$, oder wenn $h<\frac{16}{3}(n-1)c$, so erfordert die Integration die Quadratur des Zirkuls; wenn aber $h>\frac{16}{3}(n-1)c$, so kommt man auf Logarithmos, und wenn $h=\frac{16}{3}(n-1)c$, so kann die Integration algebraisch verrichtet werden. Da nun $h=27979$ Rheinl. Schuh, so geht die Integration für eine eiserne Kugel, da $n=6647$, algebraisch von statten, wenn der Diameter der Kugel $c=\frac{176}{223}$ Rheinl. Schuh, oder wenn der Diameter der Kugel $9\frac{3}{4}$ engl. Zoll hält. Wenn also der Diameter einer eisernen Kugel grösser ist, als $9\frac{3}{4}$ Zoll, so erfordert die Integration die Quadratur des Zirkuls; hingegen wenn der Diameter der Kugel kleiner ist, als $9\frac{3}{4}$ Zoll, so kommt man auf Logarithmos, und dieses ist der Fall, welcher am öftesten vorkommt.

Wir wollen inzwischen für das erste den Fall betrachten, wenn $h=\frac{16}{3}ngc$, oder wenn

$$4ngch=\frac{3}{4}hh \quad \text{und} \quad 4nch=\frac{3hh}{4g}.$$

---

1) Siehe p. 363. F. R. S.

Hier wird also

$$dx = \frac{-hh}{4g} \cdot \frac{dv}{(\frac{1}{2}h + v)^2}$$

oder

$$x = \frac{hh}{2g(h+2v)} - \frac{hh}{2g(2b+h)},\ ^{1)}$$

woraus die ganze Höhe EA, auf welche die Kugel steigen wird, heraus kommt, wenn man setzt $v = 0$: indem die Kugel so lang steiget, biß ihre Geschwindigkeit völlig zernichtet wird. Dahero wird in diesem Fall

$$EA = \frac{h}{2g} - \frac{hh}{2g(2b+h)} = \frac{bh}{g(2b+h)}.\ ^{2)}$$

Wenn aber der Diameter der Kugel kleiner ist, als in diesem Fall, oder $4ngch < \frac{3}{4}hh$, so laßt uns setzen

$$4ngch = \frac{3}{4}hh - 3kk;$$

so wird

$$dx = \frac{-(hh - 4kk)dv}{4g((\frac{1}{2}h + v)^2 - kk)}$$

oder

$$\frac{4gdx}{hh - 4kk} = \frac{dv}{2k(v + \frac{1}{2}h + k)} - \frac{dv}{2k(v + \frac{1}{2}h - k)}.$$

Wovon das Integrale gefunden wird

$$x = \frac{hh - 4kk}{8gk}\, l\, \frac{(2v + h + 2k)(2b + h - 2k)}{(2v + h - 2k)(2b + h + 2k)}.$$

Wenn man nun hier setzt $v = 0$, so wird

$$EA = \frac{hh - 4kk}{8gk}\, l\, \frac{(h + 2k)(2b + h - 2k)}{(h - 2k)(2b + h + 2k)},$$

und da $g = 1 - \frac{1}{n}$, so ist

$$k = \sqrt{\left(\frac{1}{4}hh - \frac{4}{3}(n-1)ch\right)}.$$

---

1) Im Original $x = \frac{hh}{2g(h+v)} - \frac{hh}{2g(b+h)}$. Berichtigt von F. R. S.

2) Im Original $EA = \frac{h}{2g} - \frac{hh}{2g(b+h)} = \frac{bh}{2g(b+h)}$. Berichtigt von F. R. S.

Hieraus wollen wir nun die Höhe bestimmen, zu welcher eine eiserne Canonen-Kugel, deren Diameter $= 5\frac{1}{2}$ Zoll, und welche mit einer Geschwindigkeit von 1650 Engl. Schuhen gerade aufwärts geschossen wird, gelangen kann.

Es ist also $b = 40960$ Rheinl. Schuh, $\frac{4nc}{3} = 3940$ Rheinl. Schuh, und

$$\frac{4}{3}(n-1)ch = 110226100\,^{1)} = \frac{hh - 4kk}{4}.$$

Ferner wird gefunden $\frac{1}{4}hh = 195706110$[2]) und ist also $k = \sqrt{85480010} = 9245{,}54$[3]); folglich

$$\frac{hh - 4kk}{8gk} = 5962,\,^{4)}$$

dahero wird

$$EA = 5962\, l\, \frac{46470 \cdot 91408}{9488 \cdot 128390} = 7447.\,^{5)}$$

Also wird diese Kugel nicht höher, als auf 7447[6]) Rheinl. Schuh steigen, da dieselbe doch in einem Luft-leeren Raum auf eine Höhe von 40960 Rheinl. Schuhen gestiegen seyn würde. Weil aber die Luft je höher je dünner wird, und also der Wiederstand derselben abnimmt, so muß diese Kugel in der That doch etwas höher kommen, welches aber, da die Kugel in der untern Gegend den grösten Wiederstand leidet, nicht viel austragen kann.

Da nun solcher Gestalt die Höhe EA, zu welcher die Kugel gelanget, gefunden wird, so können wir dieselbe an statt der Geschwindigkeit in E als bekannt annehmen, um auf diese Art das Herunterfallen der Kugel, nebst der dazu erforderten Zeit, desto bequemer bestimmen zu können. Es sey also die ganze Höhe $AE = a$, die Geschwindigkeit der aufsteigenden Kugel in $P = \sqrt{v}$, und die Geschwindigkeit der herunterfallenden Kugel gleichfalls in P sey $= \sqrt{u}$: die Höhe AP aber werde $= z$ gesetzet. Da nun $z = a - x$ und $dz = -dx$, so wird man für das Heraufsteigen diese Differential-Vergleichung haben

$$4nchdv = 4ngchdz + 3hvdz + 3vvdz.$$

Im Herunterfallen ist aber nur der Wiederstand der Luft der Bewegung ent-

1) Im Original 110237500. 2) Im Original 195705800.

3) Im Original $\sqrt{85468300} = 9245$. 4) Im Original 5963.

5) Im Original $EA = 5963\, l\, \frac{46469 \cdot 91409}{9489 \cdot 128389} = 9376$. 6) Im Original 9376.

Berichtigt von F. R. S.

gegen, indem die Schwehre die Kugel abwärts zieht, und die Bewegung vermehret. In diesem Fall wird man also diese Aequation bekommen

$$4nchdu = 4ngchdz - 3hudz - 3uudz.$$

Diese Aequation entsteht aus jener, wenn man $-c$ für c schreibt: dahero wenn das Integrale für die erste Aequation wird gefunden worden seyn, so wird daraus durch diese Veränderung das Integrale der andern leicht hergeleitet werden können. Es wird aber zu unserem Vorhaben dienlicher seyn, diese Integrationen durch eine bequeme Näherung zu verrichten. Weil nun, wenn z und folglich v noch sehr klein ist, diese Aequation

$$4nchdv = 4ngchdz \quad \text{oder} \quad dv = gdz$$

statt findet, so wollen wir für den wahren Werth von v diese Seriem annehmen

$$v = gz + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 + \text{etc.}$$

und die Buchstaben α, β, γ, δ etc. aus der erstern Aequation bestimmen. Um aber dieses desto leichter zu bewerkstelligen, so wollen wir 1 für g setzen, indem $\frac{1}{n}$ ein so geringer Bruch ist, welcher nicht in Betrachtung kommt. Hernach laßt uns setzen $4nc = 3mh$, oder $m = \frac{4nc}{3h}$; so wird die erste Aequation in diese verwandelt

$$mhhdv = mhhdz + hvdz + vvdz,$$

und wenn man hierzu annimmt

$$v = z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 + \text{etc.},$$

so wird gefunden

$$\alpha = \frac{1}{2mh}, \qquad \beta = \frac{1}{6m^2h^2}(2m+1),$$

$$\gamma = \frac{1}{24m^3h^3}(8m+1), \qquad \delta = \frac{1}{120m^4h^4}(16m^2+22m+1).$$

Und also hat man

$$v = z + \frac{z^2}{2mh} + \frac{(1+2m)z^3}{6m^2h^2} + \frac{(1+8m)z^4}{24m^3h^3} + \frac{(1+22m+16m^2)z^5}{120m^4h^4} + \text{etc.},$$

welche Ausdrückung für das Aufsteigen gilt. Für das Herunterfallen aber bekommt man

$$u = z - \frac{z^2}{2mh} + \frac{(1-2m)z^3}{6m^2h^2} - \frac{(1-8m)z^4}{24m^3h^3} + \frac{(1-22m+16m^2)z^5}{120m^4h^4} - \text{etc.}$$

Um nun hieraus so wohl die Zeit des Aufsteigens als des Herunterfallens zu bestimmen, so suche man die Werthe von $\frac{1}{\sqrt{v}}$ und von $\frac{1}{\sqrt{u}}$. Man wird aber finden

$$\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{z}}\left(1 - \frac{z}{4mh} + \frac{(1-16m)z^2}{96m^2h^2} + \frac{(1-16m)z^3}{384m^3h^3} - \frac{(1+32m+256m^2)z^4}{10240m^4h^4} - \text{etc.}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{z}}\left(1 + \frac{z}{4mh} + \frac{(1+16m)z^2}{96m^2h^2} - \frac{(1+16m)z^3}{384m^3h^3} - \frac{(1-32m+256m^2)z^4}{10240m^4h^4} + \text{etc.}\right)$$

Man multiplicire diese Formuln mit dz, und integrire dieselben, hernach aber setze man $z = a$, so wird man für die Zeit des Heraufsteigens finden

$$2\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{6mh} + \frac{(1-16m)a^2\sqrt{a}}{240m^2h^2} + \frac{(1-16m)a^3\sqrt{a}}{1344m^3h^3} - \frac{(1+32m+256m^2)a^4\sqrt{a}}{46080m^4h^4} - \text{etc.}$$

Für die Zeit des Herunterfallens aber findet man

$$2\sqrt{a} + \frac{a\sqrt{a}}{6mh} + \frac{(1+16m)a^2\sqrt{a}}{240m^2h^2} - \frac{(1+16m)a^3\sqrt{a}}{1344m^3h^3} - \frac{(1-32m+256m^2)a^4\sqrt{a}}{46080m^4h^4} + \text{etc.}$$

Diese beyden Ausdrückungen zusammen genommen geben die ganze Zeit, in welcher die Kugel in der Luft schwebet, biß dieselbe wiederum herunter fällt. Diese Zeit ist also

$$4\sqrt{a} + \frac{a^2\sqrt{a}}{120m^2h^2} - \frac{a^3\sqrt{a}}{42m^2h^3} - \frac{(1+256m^2)a^4\sqrt{a}}{23040m^4h^4} + \text{etc.}$$

Wenn man nehmlich a in tausendsten Theilen eines Rheinl. Schuhes ausdrückt, und diese Formul durch 250 dividirt, so kommt die Zeit in Secunden ausgedrückt heraus. Wenn also umgekehrt die Zeit, welche von dem Schuß biß zum Fall der Kugel verflossen, gegeben wird, so kann man daraus die Höhe $EA = a$ finden, zu welcher die Kugel gekommen. Es sey also diese Zeit $= \mu$ Secunden, und man setze $t = 250\mu$, so findet man

$$\sqrt{a} = \frac{t}{4} - \frac{t^5}{2^{15}\cdot 3\cdot 5m^2h^2} + \frac{t^7}{2^{17}\cdot 3\cdot 7m^2h^3} + \frac{t^9}{2^{29}\cdot 3\cdot 5m^4h^4} + \frac{t^9}{2^{21}\cdot 5\cdot 9m^2h^4} - \text{etc.}$$

und auf diese Art wird a in 1000 sten Theilen eines Rheinl. Schuhs ausgedrückt. Diese Series nimmt so stark ab, daß die hier angeführten Termini hinlänglich sind, die Höhe $EA = a$ zu bestimmen, wenn nur t keine allzugrosse Zahl wird.

Um diese Rechnung zu erläutern, so wollen wir ein Exempel von denjenigen, welche der Herr BERNOULLI in dem zweyten Tomo der Petersburgischen Comment.[1]) angeführet, untersuchen. Dieselben sind mit einer dreypfündigen eisernen Kugel gemacht worden, deren Diameter 0,2375 englische Schuh hielt. Nachdem diese Kugel aus einer Canone, so 32 Caliber lang war, mit einer Ladung Pulver von 2 Untz oder $\frac{1}{8}$ ℔ gerade aufwärts in die Höhe geschossen worden, so fiel dieselbe nach 34″ wiederum zu Boden.

Hier ist also $n = 6647$, $c = 0{,}2304$ Rheinl. Schuh. Folglich ist $nc = 1531$ und $\frac{4}{3} nc = 2041 = mh$, also $mh = 2041000$ tausendstel Rheinl. Schuh, und $m = 0{,}07295$. Nun multiplicire man die 34″ mit 250; so wird $t = 8500$: und hieraus findet man

$$\frac{t}{4} = 2125$$

$$\frac{t^5}{2^{15} \cdot 15 m^2 h^2} = 21{,}670$$

$$\frac{t^7}{2^{17} \cdot 21 m^2 h^3} = 9{,}993$$

$$\frac{t^9}{2^{29} \cdot 15 m^4 h^4} = 1{,}657$$

$$\frac{t^9}{2^{21} \cdot 45 m^2 h^4} = 1{,}193.$$

Also

$$\sqrt{a} = 2115{,}973$$

und

$$a = 4478$$

Rheinl. Schuh.[2])

Nach dieser Rechnung müßte also die Kugel auf eine Höhe von 4478 Rheinl. Schuh gestiegen seyn: aus welcher jetzt die erste Geschwindigkeit der Kugel, oder die Höhe b, aus welcher diese Geschwindigkeit durch den Fall in einem Luft-leeren Raum erzeuget wird, gefunden werden kann. Denn da

1) Siehe die Anmerkung 1, p. 41. F. R. S.

2) Aus den für die fünf Glieder von $\sqrt{a}$ angegebenen Werten erhält man $\sqrt{a} = 2116{,}173$. Da aber das letzte Glied nicht gleich 1,193 ist, sondern den Wert 0,753 hat, so wird $\sqrt{a} = 2115{,}733$, woraus sich 4476,3 rheinländische Schuh für a ergeben; eine Strecke, die von der im Text angeführten unwesentlich abweicht. F. R. S.

$EA = a = 4478$ Rheinl. Schuh, welche Höhe von derjenigen, so der Hr. BERNOULLI gefunden, nicht viel unterschieden ist[1]), wenn man nimmt

$$k = \sqrt{\left(\frac{1}{4}hh - \frac{4}{3}nch\right)},$$

so wird $k = 11773$ Rheinl. Schuh, und man bekommt

$$a = \frac{hh - 4kk}{8gk}\, l\, \frac{(h+2k)(2b+h-2k)}{(h-2k)(2b+h+2k)}.$$

Um nun hieraus b zu finden, weil $g = 1$ und $\frac{1}{4}hh - kk = 2041h$, so wird

$$\frac{8ak}{hh - 4kk} = 1{,}8464;$$

und wenn e für die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$, genommen wird, so wird

$$e^{1{,}8464} = 6{,}3373,$$

und die gesuchte Höhe b wird also ausgedrückt

$$b = \frac{5{,}3373(hh - 4kk)}{2h + 4k - 6{,}3373(2h - 4k)}.$$

Woraus gefunden wird $b = 26014$ Rheinl. Schuh, und dahero müßte die Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1275 Schuhen in 1″ aus der Canone geschossen worden seyn. Diese Geschwindigkeit ist nun weit grösser, als diejenige, welche der Hr. Prof. BERNOULLI aus seiner Theorie gefunden.[2]) Man hat sich aber hierüber nicht zu verwundern; denn da wir hier den Wiederstand mit dem Autore grösser annehmen, als der Hr. BERNOULLI gethan, so muß auch die Kugel anfänglich eine weit grössere Geschwindigkeit gehabt haben, um auf eben diejenige Höhe zu gelangen. Hierdurch wird aber eine weit grössere Schwierigkeit verursachet, indem man aus der oben festgesetzten Würkung des Pulvers unmöglich erklären kann, wie eine drey-pfündige Kugel von einer Ladung von $\frac{1}{8}$ ℔ eine so große Geschwindigkeit erhalten könne. Denn wenn man nach unserer obigen Regel setzt, das Gewicht der Kugel $P = 3$, das Gewicht der Ladung $= \frac{1}{8}$ und die Länge der Canone in Calibern $i = 32$, so

1) BERNOULLI hatte 4550 englische Fuß = 4419 rheinländische Schuh erhalten. F. R. S.

2) BERNOULLI hatte 13694 englische Fuß für b gefunden, woraus sich eine Geschwindigkeit von 912 rheinländischen Schuhen ergibt. F. R. S.

findet man $b = 6855$ Rheinl. Schuh, und die Kugel würde also keine größere Geschwindigkeit als von 654 Schuhen in 1″ gehabt haben.[1]) Dieser Unterscheid zwischen 654 Schuh, und 1275 Schuh ist so groß, daß derselbe von keiner geringen Abweichung der Theorie von der Wahrheit entspringen kann. Wenn also bey diesem Experiment kein merklicher Fehler eingeschlichen, so müßte entweder die Gewalt des Pulvers fast 4 mahl grösser seyn, als der Autor behauptet, welche Folge auch der Herr BERNOULLI aus eben diesen Experimenten ziehet, oder die gebrauchte Näherung zu Bestimmung der Höhe a müßte unrichtig seyn. Denn ungeachtet die 5 ersten Termini, wodurch $\sqrt{a}$ ausgedrückt worden, ziemlich stark abnehmen, so könnte es doch geschehen, daß die folgenden Termini wiederum grösser würden, und also der wahre Werth von a in der That weit kleiner wäre. Um nun dieses zu untersuchen, so wollen wir die Frage umkehren, und aus der ersten Geschwindigkeit der Kugel, welche 1275 Schuh in 1″ seyn soll, die Zeit bestimmen, welche sowohl zum Aufsteigen der Kugel, als zum Herabfallen erfordert wird, und alsdenn sehen, ob diese Zeit 34″ betrage, wie in dem Experiment befunden worden.

Es sey demnach $b = 26014$ Rheinl. Schuh, und $m = \frac{4nc}{3h} = 0{,}07295$, und $mh = 2041$ Rheinl. Schuh. Weil nun oben für das Heraufsteigen der Kugel gefunden worden

$$mhhdv = mhhdz + hvdz + vvdz,$$

so wird

$$dz = \frac{mhhdv}{mhh + hv + vv}.$$

Man setze ferner

$$mhh = \frac{1}{4}hh - kk,$$

so wird $k = 11773$ Rheinl. Schuh, und wird also

$$dz = \frac{mhhdv}{(v + \frac{1}{2}h + k)(v + \frac{1}{2}h - k)}.$$

Wenn nun die Zeit $= t$ gesetzt wird, so bekömmt man

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{v}} = \frac{mhhdv}{(v + \frac{1}{2}h + k)(v + \frac{1}{2}h - k)\sqrt{v}}.$$

1) Aus der zweiten Gleichung p. 325 erhält man 7219 für b und für die Geschwindigkeit 671,7 rheinländische Schuh pro Sekunde. F. R. S.

Es sey $\sqrt{v} = s$, so wird

$$dt = \frac{2mhhds}{(ss+\frac{1}{2}h+k)(ss+\frac{1}{2}h-k)}$$

oder

$$dt = \frac{mhh}{k}\left(\frac{ds}{ss+\frac{1}{2}h-k} - \frac{ds}{ss+\frac{1}{2}h+k}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{1}{2}h - k = 2216{,}5 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}h + k = 25762{,}5,$$

folglich beruht die Integration beyder Glieder auf der Quadratur des Zirkuls. Es sey Kürze halber

$$\frac{1}{2}h - k = 2216{,}5 = \beta\beta,$$

$$\frac{1}{2}h + k = 25762{,}5 = \gamma\gamma,$$

so wird

$$t = \frac{mhh}{\beta k}\,\text{A. tang.}\,\frac{s}{\beta} - \frac{mhh}{\gamma k}\,\text{A. tang.}\,\frac{s}{\gamma}.$$

Wenn man hier die Grössen in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhes ausdrückt, und durch 250 dividirt, so bekömmt man die Zeit in Secunden. Und die ganze Zeit des Heraufsteigens kömmt also heraus, wenn man $v = b$ und $s = \sqrt{b} = 161{,}29$ setzt. Auf diese Art wird

$$\beta = 47{,}08 \quad \text{und} \quad \gamma = 160{,}50 \quad \text{und} \quad \frac{mh}{k} = 0{,}17336,$$

ferner

$$\frac{\sqrt{h}}{\beta} = 3{,}55298 \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{h}}{\gamma} = 1{,}04218.$$

Derowegen wird seyn

$$t = 3{,}66797\left(3{,}55298\,\text{A. tang.}\,\frac{16129}{4708} - 1{,}04218\,\text{A. tang.}\,\frac{16129}{16050}\right)$$

Secunden, und hieraus findet sich die Zeit des Heraufsteigens $= 13\frac{3}{4}''$.[1])

1) Genauer 13,758 Sekunden. F. R. S.

Wenn wir die Zeit des Herunterfallens genau bestimmen wollen, so müssen wir zuerst die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel herunter fällt, suchen. Dieses geschieht aus der Aequation

$$dz = \frac{mhhdu}{mhh - hu - uu}.$$

Man setze

$$mhh = ff - \frac{1}{4}hh,$$

so wird

$$f = h\sqrt{\left(m + \frac{1}{4}\right)} = 15900$$

und

$$dz = \frac{mhhdu}{(f - \frac{1}{2}h - u)(f + \frac{1}{2}h + u)},$$

folglich

$$dz = \frac{mhh}{2f}\left(\frac{du}{f + \frac{1}{2}h + u} + \frac{du}{f - \frac{1}{2}h - u}\right),$$

wovon das Integrale gehörig genommen, giebt

$$z = \frac{mhh}{2f}\, l\, \frac{(f - \frac{1}{2}h)(f + \frac{1}{2}h + u)}{(f + \frac{1}{2}h)(f - \frac{1}{2}h - u)}.$$

Nun setze man $z = 4478$ Rheinl. Schuh, nehmlich der gefundenen Höhe $EA = a$; so wird

$$\frac{2fz}{mhh} = \frac{2a\sqrt{(m + \frac{1}{4})}}{mh} = 2{,}49367$$

und

$$e^{2{,}493\,67} = 12{,}1056;$$

diese Zahl setze man $= N$, so wird

$$N = \frac{ff - \frac{1}{4}hh + (f - \frac{1}{2}h)u}{ff - \frac{1}{4}hh - (f + \frac{1}{2}h)u}$$

und

$$u = \frac{mhh(N-1)}{(f + \frac{1}{2}h)N + f - \frac{1}{2}h}.$$

Hieraus kommt $u = 1743{,}51$[1]) Rheinl. Schuh.

---

1) Im Original 1743,7. Berichtigt von F. R. S.

Man setze jetzt die Zeit des Herabfallens $= t$, so wird

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{u}} = \frac{mhh}{2f}\left(\frac{du:\sqrt{u}}{f+\frac{1}{2}h+u} + \frac{du:\sqrt{u}}{f-\frac{1}{2}h-u}\right).$$

Es sey

$$\sqrt{u} = s = 41{,}7582,$$

$$f+\frac{1}{2}h = \beta\beta \quad \text{und} \quad f-\frac{1}{2}h = \gamma\gamma,$$

so wird

$$\beta = 172{,}873 \quad \text{und} \quad \gamma = 43{,}7607,$$

und

$$dt = \frac{mhh}{f}\left(\frac{ds}{\beta\beta+ss} + \frac{ds}{\gamma\gamma-ss}\right),$$

wovon das Integrale ist

$$t = \frac{mhh}{\beta f}\,\text{A. tang.}\,\frac{s}{\beta} + \frac{mhh}{2\gamma f}\,l\,\frac{\gamma+s}{\gamma-s}.$$

Es ist aber

$$\frac{mh}{f} = 0{,}128365, \quad \frac{\sqrt{h}}{\beta} = 0{,}96759 \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{h}}{2\gamma} = 1{,}91118.$$

Hieraus wird

$$t = 2{,}71595\left(0{,}96759\ \text{A. tang.}\,\frac{417582}{1728730} + 1{,}91118\,l\,\frac{855189}{20025}\right)$$

Secunden und also die Zeit des Herabfallens wird $= 20{,}11$ Secunden: dahero die ganze Zeit, in welcher die Kugel in der Luft geschwebet, ist $= 33{,}87$ Secunden, welche von der beobachteten Zeit, nehmlich von 34″, nur um $\frac{13}{100}$ Secunden unterschieden ist.[1]) Hieraus erhellet, daß man sich auf die obige Näherung sicher verlassen könne.

---

1) Die Gleichung für t ergibt für die Fallzeit in Sekunden den Ausdruck

$$\frac{mh}{250f}\sqrt{1000\,h}\left(\frac{\sqrt{h}}{\beta}\,\text{arctg.}\,\frac{s}{\beta} + \frac{\sqrt{h}}{2\gamma}\,l\,\frac{\gamma+s}{\gamma-s}\right),$$

woraus man, unter Benutzung der genaueren Werte

$$s = 41{,}75538, \quad \beta = 172{,}886, \quad \gamma = 43{,}70926, \quad \frac{\sqrt{h}}{\beta} = 0{,}967513, \quad \frac{\sqrt{h}}{2\gamma} = 1{,}91343,$$

für die Zeit des Herabfallens 20,26 Sekunden, somit für die ganze Dauer der Bewegung in der Luft 34,02 Sekunden erhält. F. R. S.

Da sich nun hierinn kein Irrthum gefunden, so muß die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel aus der Canone geschossen worden, nothwendig ungefehr 1275 Schuh in 1″ betragen haben, und bleibet also noch die gröste Schwierigkeit, woher die Kugel diese so grosse Geschwindigkeit erhalten habe. Wir haben schon gewiesen, daß 2 Unzen Pulver, welche bey diesem Schuß sollen seyn gebraucht worden, nach der oben[1]) fest gesetzten Theorie der Kugel keine grössere Geschwindigkeit, als von 654 Schuhen in 1″ hätten eindrucken können. Dieser Unterschied ist allzugroß, und die Ladung zu klein, als daß man aus der Vermehrung der Hitze bey Entzündung des Pulvers diesen Zuwachs der Kraft solte herleiten können. Man kann aber aus diesem Experiment auch nicht schliessen, daß die Gewalt des Pulvers so sehr viel grösser seyn solte, als wir oben angenommen haben. Denn wenn man dieses behaupten wolte, so müßte auch in allen von dem Autore angestellten Versuchen die Geschwindigkeit der Kugel fast zwey mahl so groß gewesen seyn, als durch die Erfahrung befunden worden, welches man keineswegs zugeben kann. Nach unserer Tabelle, welche wir oben[2]) gegeben, müßte zur Hervorbringung dieser Geschwindigkeit die Ladung über ein halb Pfund, und folglich vier mahl grösser, als die angezeigte, welche nur 2 Unzen war, gewesen seyn. Die Höhe von 4478 Schuhen ist auch zu klein, als daß die Verdünnerung der Luft eine merkliche Veränderung hätte hervorbringen können; denn nach allen Meynungen kann die Luft zu oberst in A nicht über den Fünftel dünner seyn, als unten in E, welches bey der daselbst schon schwachen Bewegung nichts merkliches austragen kann. Wir wollen also dieses Experiment an seinen Ort gestellt seyn lassen, und zur Untersuchung der krumm-linichten Bewegung einer Kugel fortschreiten.

DRITTE ANMERKUNG.

Es sey wiederum wie bißher der Diameter der Kugel $=c$, die Schwehre der Kugel zur Schwehre der Luft, wie n zu 1, und b die Höhe, aus welcher die erste Geschwindigkeit der Kugel in E (Fig. 23, p. 352) durch den Fall erlanget wird. Wir wollen also setzen, die Kugel werde unter einem schiefen Winkel mit dem Horizont EF aus der Canone geschossen, nehmlich nach der Direction der Linie EH, und den Winkel $HEF=\theta$ setzen. Da nun die Geschwindigkeit der Kugel

1) Siehe p. 234, 318 und 325. 2) Siehe p. 327. F. R. S.

durch $\sqrt{b}$ ausgedruckt wird, wenn wir dieselbe nach der Horizontal-Direction EF und Vertical-Direction EG zertheilen, so wird die Horizontal-Geschwindigkeit $= \sqrt{b} \cdot \cos.\theta$, und die Vertical-Geschwindigkeit $= \sqrt{b} \cdot \sin.\theta$. Nach Verfliessung der Zeit $= t$ sey die Kugel in M gekommen, wo ihre Geschwindigkeit seyn soll $= \sqrt{v}$. Man ziehe aus M die Vertical-Linie MP, und nenne $EP = x$, $PM = y$, so wird, nachdem man sich die Vertical-Linie pm der PM unendlich nahe gezogen vorstellt, seyn $Pp = Mr = dx$ und $mr = Mq = dy$. Ferner nenne man das Element der krummen Linie

$$Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds,$$

und den Winkel $mMr = \varphi$, so wird

$$\sin.\varphi = \frac{dy}{ds}, \quad \cos.\varphi = \frac{dx}{ds} \quad \text{und} \quad \text{tang.}\,\varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Hernach wird die Horizontal-Geschwindigkeit der Kugel in M

$$= \sqrt{v} \cdot \cos.\varphi$$

und die Vertical-Geschwindigkeit

$$= \sqrt{v} \cdot \sin.\varphi;$$

und über dieses giebt die Betrachtung der Zeit

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}.$$

Die Kraft der Schwehre wird, wie wir vorher gesehen, durch $1 - \frac{1}{n}$ ausgedrückt, wofür wir Kürze halber g setzen wollen; durch diese Kraft wird die Vertical-Geschwindigkeit vermindert. Hernach ist die Kraft des Wiederstands

$$= \frac{3v(h+v)}{4nch},$$

welche nach der Direction mM würket. Hieraus wird also die Vertical-Geschwindigkeit vermindert durch die Kraft $\frac{3v(h+v)}{4nch}\sin.\varphi$ und die Horizontal-Geschwindigkeit durch die Kraft $\frac{3v(h+v)}{4nch}\cos.\varphi$.

Aus diesen Kräften erwachsen also diese Aequationen:

$$d.\,v\sin.\varphi^2 = -gdy - \frac{3v(h+v)dy\sin.\varphi}{4nch}$$

$$d.\,v\cos.\varphi^2 = \frac{-3v(h+v)dx\cos.\varphi}{4nch}.$$

Oder da

$$dx = ds\cos.\varphi \quad \text{und} \quad dy = ds\sin.\varphi,$$

so bekommen wir

$$dv\sin.\varphi^2 + 2vd\varphi\sin.\varphi\cos.\varphi = -gds\sin.\varphi - \frac{3v(h+v)ds\sin.\varphi^2}{4nch},$$

$$dv\cos.\varphi^2 - 2vd\varphi\sin.\varphi\cos.\varphi = \frac{-3v(h+v)ds\cos.\varphi^2}{4nch}.$$

Jene durch diese dividirt giebt also

$$\frac{dv\sin.\varphi^2 + 2vd\varphi\sin.\varphi\cos.\varphi}{dv\cos.\varphi^2 - 2vd\varphi\sin.\varphi\cos.\varphi} = \frac{4ngch\sin.\varphi + 3v(h+v)\sin.\varphi^2}{3v(h+v)\cos.\varphi^2},$$

in welcher sich nur noch zwey veränderliche Größen v und φ befinden. Diese Aequation aber wird auf diese gebracht

$$2ngchdv\cos.\varphi = 4ngchvd\varphi\sin.\varphi + 3vv(h+v)d\varphi.$$

Wenn man ferner aus den beyden obigen Aequationen dv heraus bringt, so findet man

$$v = \frac{-gds\cos.\varphi}{2d\varphi}.$$

Könnte man also aus der obigen Aequation v aus dem Winkel φ bestimmen, so wäre

$$ds = \frac{-2vd\varphi}{g\cos.\varphi}$$

und ferner

$$dx = \frac{-2vd\varphi}{g} \quad \text{und} \quad dy = \frac{-2vd\varphi\,\text{tang.}\varphi}{g}.$$

Will man aber eine Aequation zwischen x und y haben, so addire man die ersten zwey Aequationen zusammen, so hat man

$$dv = -gdy - \frac{3v(h+v)ds}{4nch}.$$

Man setze $dy = pdx$, so ist

$$ds = dx\sqrt{(1+pp)},$$

und

$$\sin.\varphi = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \quad \text{und} \quad \cos.\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Dieses differenzirt giebt

$$d\varphi\sin.\varphi = \frac{pdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}$$

und folglich

$$d\varphi = \frac{dp}{1+pp}.$$

Also wird

$$v = \frac{-gdx(1+pp)}{2dp}.$$

Man setze ferner $dp = qdx$, so ist

$$v = \frac{-(1+pp)g}{2q}$$

und

$$dv = \frac{-gpdp}{q} + \frac{gdq(1+pp)}{2qq} = -gdy + \frac{gdq(1+pp)}{2qq}.$$

Folglich wird

$$\frac{4}{3}nchdq = hdp\sqrt{(1+pp)} - \frac{g(1+pp)^{\frac{3}{2}}dp}{2q}$$

oder

$$\frac{4}{3}ncdq = dp\sqrt{(1+pp)} - \frac{gdp(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{2hq}.$$

Die nöthigen Bestimmungen zur Integration dieser Vergleichung sind, daß im Anfang E werden muß:

$$\text{I. } x = 0, \quad \text{II. } y = 0, \quad \text{III. } p = \text{tang.}\,\theta \quad \text{und} \quad \text{IV. } q = \frac{-g}{2b\cos.\theta^2}.$$

Hat man aber q durch p ausgedruckt, so wird

$$x = \int\frac{dp}{q} \quad \text{und} \quad y = \int\frac{pdp}{q}.$$

Weil aber die Aequation zwischen p und q nicht integrirt werden kann, so

muß man trachten, solches durch eine bequeme Näherung zu verrichten. Zu diesem Ende setze man

$$\frac{4}{3}nc = k, \quad \frac{2h}{g} = f, \quad p = \frac{u}{\sqrt{(1-uu)}} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{r},$$

so wird die obige Aequation in diese verwandelt:

$$k(1-uu)^3 dr + rrdu(1-uu) - \frac{1}{f}r^3 du = 0.$$

Nun setze man

$$r = a + Au + Bu^2 + Cu^3 + \text{etc.},$$

so wird man finden:

$$A = \frac{a^2(a-f)}{kf}, \qquad B = \frac{a^3(a-f)(3a-2f)}{2kkff},$$

$$C = \frac{a^2(3a-2f)}{3kf} + \frac{a^4(a-f)(15aa-20af+6ff)}{6k^3f^3}$$

etc.

Vom Anfang in dem Punct E wird also

$$u = \sin.\theta, \quad \sqrt{(1-uu)} = \cos.\theta \quad \text{und} \quad r = \frac{-2b\cos.\theta^2}{g}.$$

Da nun

$$dp = \frac{du}{(1-uu)^{3:2}} \quad \text{und} \quad pdp = \frac{udu}{(1-uu)^2},$$

so bekommt man

$$x = \int \frac{du(a+Au+Bu^2+Cu^3+\text{etc.})}{(1-uu)^{3:2}},$$

$$y = \int \frac{udu(a+Au+Bu^2+Cu^3+\text{etc.})}{(1-uu)^2}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{du}{(1-uu)^{3:2}} = \frac{u}{\sqrt{(1-uu)}},$$

$$\int \frac{udu}{(1-uu)^{3:2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-uu)}},$$

$$\int \frac{uudu}{(1-uu)^{3:2}} = \frac{u}{\sqrt{(1-uu)}} - \text{A.}\sin.u,$$

$$\int \frac{u^3du}{(1-uu)^{3:2}} = \frac{2-uu}{\sqrt{(1-uu)}}$$

etc.

$$\int\frac{u\,du}{(1-uu)^2}=\frac{1}{2(1-uu)},$$

$$\int\frac{uu\,du}{(1-uu)^2}=\frac{u}{2(1-uu)}-\frac{1}{4}\,l\,\frac{1+u}{1-u},$$

$$\int\frac{u^3du}{(1-uu)^2}=\frac{1}{2(1-uu)}+\frac{1}{2}\,l(1-uu),$$

$$\int\frac{u^4du}{(1-uu)^2}=\frac{3u-2u^3}{2(1-uu)}-\frac{3}{4}\,l\,\frac{1+u}{1-u}$$

etc.

Also wird

$$x=E+\frac{au}{\sqrt{(1-uu)}}+\frac{A}{\sqrt{(1-uu)}}+\frac{Bu}{\sqrt{(1-uu)}}+\frac{C(2-uu)}{\sqrt{(1-uu)}}+\text{etc.}$$
$$-B\,\text{A. sin. }u-\text{etc.},$$

$$y=F+\frac{a}{2(1-uu)}+\frac{Au}{2(1-uu)}+\frac{B}{2(1-uu)}+\frac{C(3u-2u^3)}{2(1-uu)}+\text{etc.}$$
$$-\frac{A}{4}\,l\,\frac{1+u}{1-u}+\frac{B}{2}\,l(1-uu)-\frac{3C}{4}\,l\,\frac{1+u}{1-u}+\text{etc.}$$

Um aber die Buchstaben a, E und F zu bestimmen, so hat man auf den Anfang zu sehen, da wird

$$\frac{-2b\cos.\theta^2}{g}=a+A\sin.\theta+B\sin.\theta^2+C\sin.\theta^3+\text{etc.},$$

$$-E=\frac{a\sin.\theta}{\cos.\theta}+\frac{A}{\cos.\theta}+\frac{B\sin.\theta}{\cos.\theta}+\frac{C(1+\cos.\theta^2)}{\cos.\theta}+\text{etc.}$$
$$-B\theta-\text{etc.},$$

$$-F=\frac{a}{2\cos.\theta^2}+\frac{A\sin.\theta}{2\cos.\theta^2}+\frac{B}{2\cos.\theta^2}+\frac{C(3\sin.\theta-2\sin.\theta^3)}{2\cos.\theta^2}+\text{etc.}$$
$$-\frac{A}{4}\,l\,\frac{1+\sin.\theta}{1-\sin.\theta}+B\,l\cos.\theta-\frac{3C}{4}\,l\,\frac{1+\sin.\theta}{1-\sin.\theta}+\text{etc.}$$

Weil wir aber den Winkel $mMr=\varphi$ gesetzt haben, so ist $p=\text{tang.}\,\varphi$ und $u=\sin.\varphi$ und $\sqrt{(1-uu)}=\cos.\varphi$. Folglich hat man:

$$x = \left\{ \begin{array}{l} a \operatorname{tang.} \varphi + \dfrac{A}{\cos. \varphi} + B \operatorname{tang.} \varphi + \dfrac{C(1+\cos. \varphi^2)}{\cos. \varphi} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad - B\varphi - \text{etc.} \\ - a \operatorname{tang.} \theta - \dfrac{A}{\cos. \theta} - B \operatorname{tang.} \theta - \dfrac{C(1+\cos. \theta^2)}{\cos. \theta} - \text{etc.} \\ \qquad\qquad + B\theta + \text{etc.} \end{array} \right.$$

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{2\cos. \varphi^2} + \dfrac{A \sin. \varphi}{2\cos. \varphi^2} + \dfrac{B}{2\cos. \varphi^2} + \dfrac{C(3\sin. \varphi - 2\sin. \varphi^3)}{2\cos. \varphi^2} + \text{etc.} \\ \qquad - \dfrac{A}{4} l \dfrac{1+\sin. \varphi}{1-\sin. \varphi} + Bl \cos. \varphi - \dfrac{3C}{4} l \dfrac{1+\sin. \varphi}{1-\sin. \varphi} + \text{etc.} \\ - \dfrac{a}{2\cos. \theta^2} - \dfrac{A \sin. \theta}{2\cos. \theta^2} - \dfrac{B}{2\cos. \theta^2} - \dfrac{C(3\sin. \theta - 2\sin. \theta^3)}{2\cos. \theta^2} - \text{etc.} \\ \qquad + \dfrac{A}{4} l \dfrac{1+\sin. \theta}{1-\sin. \theta} - Bl \cos. \theta + \dfrac{3C}{4} l \dfrac{1+\sin. \theta}{1-\sin. \theta} - \text{etc.} \end{array} \right.$$

Wenn k eine sehr grosse Zahl ist, so sollten die Werthe der Buchstaben A, B, C etc. immer abnehmen. Wir sehen aber, daß bey dieser Näherung C nicht kleiner werde, als A. Um derohalben eine zu diesem Ende bequemere Näherung zu finden, so wollen wir in der Differential-Aequation sogleich den Winkel φ an statt des Buchstabens u hinein bringen, da denn kommt:

$$kdr \cos. \varphi^5 + rrd\varphi \cos. \varphi^2 = \frac{1}{f} r^3 d\varphi.$$

Man setze nun

$$r = a + P + Q + \text{etc.}$$

und vergleiche die ähnlichen Terminos mit einander, so kommt

$$P = \frac{-aa}{k} \int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^3} + \frac{a^3}{fk} \int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^5},$$

$$Q = \frac{-2a}{k} \int \frac{Pd\varphi}{\cos. \varphi^3} + \frac{3a^2}{fk} \int \frac{Pd\varphi}{\cos. \varphi^5}$$

etc.

Wobey zu merken, daß im Anfange, wo $\varphi = \theta$, werden muß $r = \frac{-2b \cos. \theta^2}{g}$. Hernach wird

$$x = \int \frac{rd\varphi}{\cos. \varphi^2} = \frac{r \sin. \varphi}{\cos. \varphi} - \int \frac{dr \sin. \varphi}{\cos. \varphi}$$

und

$$y = \int \frac{rd\varphi \sin. \varphi}{\cos. \varphi^3} = \frac{r}{2\cos. \varphi^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dr}{\cos. \varphi^2}.$$

Um diese Werthe zu finden, so setze man Kürze halber

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \omega,$$

und ist also

$$\omega = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi} = l \operatorname{tang.}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi\right);$$

oder ω ist der Logarithmus hyperbolicus des Tangentis des Winkels $45^0 + \frac{1}{2}\varphi$, wenn der Radius $=1$ gesetzt wird. Ferner wird gefunden

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^3} = \frac{\sin.\varphi}{2\cos.\varphi^2} + \frac{\omega}{2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^5} = \frac{\sin.\varphi}{4\cos.\varphi^4} + \frac{3\sin.\varphi}{4\cdot 2\cos.\varphi^2} + \frac{3\,\omega}{4\cdot 2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^7} = \frac{\sin.\varphi}{6\cos.\varphi^6} + \frac{5\sin.\varphi}{6\cdot 4\cdot\cos.\varphi^4} + \frac{5\cdot 3\sin.\varphi}{6\cdot 4\cdot 2\cos.\varphi^2} + \frac{5\cdot 3\,\omega}{6\cdot 4\cdot 2}$$

und so weiter.

Hernach um den Werth von Q zu finden, so ist

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^3}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2} + \omega\right)^2,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^3}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^5} = \frac{1}{24\cos.\varphi^6} + \frac{3}{32}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2} + \omega\right)^2,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^5}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^5} = \frac{1}{32}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^4} + \frac{3\sin.\varphi}{2\cos.\varphi^2} + \frac{3\,\omega}{2}\right)^2,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^5}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^3} = -\frac{1}{24\cos.\varphi^8} + \frac{1}{24}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^4} + \frac{3\sin.\varphi}{2\cos.\varphi^2} + \frac{3\,\omega}{2}\right)^2.$$

Hieraus bekommt man

$$P = \frac{-aa}{2k}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2} + \omega\right) + \frac{a^3}{4fk}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^4} + \frac{3\sin.\varphi}{2\cos.\varphi^2} + \frac{3\,\omega}{2}\right),$$

$$Q = \frac{2a^3}{8k^2}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2} + \omega\right)^2 - \frac{a^4}{3fkk\cos.\varphi^6}$$

$$- \frac{3a^4}{32fkk}\left(\frac{1}{\cos.\varphi^4} - \frac{5}{\cos.\varphi^2} + \frac{4\,\omega\sin.\varphi}{\cos.\varphi^4} + \frac{10\,\omega\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2} + 5\omega^2\right)$$

$$+ \frac{3a^5}{32ffkk}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^4} + \frac{3\sin.\varphi}{2\cos.\varphi^2} + \frac{3\,\omega}{2}\right)^2.$$

Wenn gar kein Wiederstand vorhanden wäre, so würde seyn $r = a$, und die krumme Linie eine Parabel. Wenn demnach der Wiederstand nicht sehr groß, so ist genug diese Aequation zu gebrauchen, $r = a + P$. Hieraus bekommt man

$$x = E + \frac{a \sin.\varphi}{\cos.\varphi} + \frac{P \sin.\varphi}{\cos.\varphi} - \int \frac{dP \sin.\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$y = F + \frac{a}{2\cos.\varphi^2} + \frac{P}{2\cos.\varphi^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dP}{\cos.\varphi^2},$$

wo

$$dP = \frac{-aad\varphi}{k\cos.\varphi^3} + \frac{a^3 d\varphi}{fk\cos.\varphi^5};$$

folglich wird

$$\int \frac{dP \sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \frac{-aa}{3k\cos.\varphi^3} + \frac{a^3}{5fk\cos.\varphi^5}$$

und

$$\int \frac{dP}{\cos.\varphi^2} = \frac{-aa}{4k}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^4} + \frac{3\sin.\varphi}{2\cos.\varphi^2} + \frac{3\omega}{2}\right)$$

$$+ \frac{a^3}{6fk}\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^6} + \frac{5\sin.\varphi}{4\cos.\varphi^4} + \frac{15\sin.\varphi}{8\cos.\varphi^2} + \frac{15\omega}{8}\right).$$

Wenn wir nun diese Werthe für P und dP setzen, so kommt

$$x = E + a\,\text{tang.}\,\varphi - \frac{aa}{k}\left(\frac{1}{6\cos.\varphi^3} - \frac{1}{2\cos.\varphi} + \frac{1}{2}\omega\,\text{tang.}\,\varphi\right)$$

$$+ \frac{a^3}{fk}\left(\frac{1}{20\cos.\varphi^5} + \frac{1}{8\cos.\varphi^3} - \frac{3}{8\cos.\varphi} + \frac{3}{8}\omega\,\text{tang.}\,\varphi\right),$$

$$y = F + \frac{a}{2\cos.\varphi^2} - \frac{aa}{4k}\left(\frac{\sin.\varphi}{2\cos.\varphi^4} - \frac{3\sin.\varphi}{4\cos.\varphi^2} - \frac{3}{4}\omega + \frac{\omega}{\cos.\varphi^2}\right)$$

$$+ \frac{a^3}{4fk}\left(\frac{\sin.\varphi}{6\cos.\varphi^6} + \frac{\sin.\varphi}{3\cos.\varphi^4} - \frac{5\sin.\varphi}{8\cos.\varphi^2} - \frac{5}{8}\omega + \frac{3\omega}{4\cos.\varphi^2}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{-2b\cos.\theta^2}{g} = a - \frac{aa}{2k}\left(\frac{\sin.\theta}{\cos.\theta^2} + l\,\text{tang.}\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right)\right)$$

$$+ \frac{a^3}{4fk}\left(\frac{\sin.\theta}{\cos.\theta^4} + \frac{3\sin.\theta}{2\cos.\theta^2} + \frac{3}{2}l\,\text{tang.}\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right)\right),$$

und E und F müssen so beschaffen sein, daß, wenn $\varphi = \theta$ gesetzt wird, sowohl x als y verschwinden. Also ist bey nahe

$$a = \frac{-2b\cos.\theta^2}{g} + \frac{2bb}{ggk}\left(\sin.\theta\cos.\theta^2 + \cos.\theta^4\, l\,\mathrm{tang.}\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right)\right)$$
$$+ \frac{2b^3}{g^3fk}\left(\sin.\theta\cos.\theta^2 + \frac{3}{2}\sin.\theta\cos.\theta^4 + \frac{3}{2}\cos.\theta^6\, l\,\mathrm{tang.}\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right)\right)\text{[1]},$$

woraus der Werth für a gefunden wird.

Will man hieraus die Weite des Schusses EF finden, so muß man $y = 0$ setzen, woraus ausser dem Werth $\varphi = \theta$ noch ein anderer gefunden wird, welcher das Zeichen — vor sich haben wird. Die Aequation wird aber so verwirrt, daß man die Erfindung dieses Winkels nicht anders, als durch Näherung, und zwar durch die weitläuftigsten Rechnungen finden kann. Hat man aber diesen Winkel φ gefunden, so muß man denselben in dem Werth für x substituiren; und alsdenn wird der heraus kommende Werth von x die gesuchte Schuß-Weite EF anzeigen.

Man kann aber auch durch eine andere Näherung eine Aequation zwischen x und y finden, welche also beschaffen seyn wird:

$$y = x\,\mathrm{tang.}\,\theta - \frac{gxx}{4b\cos.\theta^2} - \frac{gx^3}{12bk\cos.\theta^3} + \frac{ggx^4\sin.\theta}{96bbk\cos.\theta^4}$$
$$- \frac{x^3}{6fk\cos.\theta^3} + \frac{gx^4\sin.\theta}{16bfk\cos.\theta^4} - \frac{gx^4}{48bkk\cos.\theta^4} - \frac{x^4}{24fkk\cos.\theta^4} \pm \text{etc.}\text{[2]}$$

Wenn der Wiederstand sehr klein ist, so wird diese Aequation ziemlich genau

---

1) Hierzu kommt noch das Glied

$$-\frac{4b^3}{g^3k^2}\left(\sin.\theta\cos.\theta + \cos.\theta^3\, l\,\mathrm{tang.}\left(45^0 + \frac{\theta}{2}\right)\right)^2.$$ F. R. S.

2) Diese Gleichung ergibt sich durch die Entwicklung von y nach der MACLAURINSCHEN Reihe, indem man x als Funktion von φ betrachtet und berücksichtigt, daß nach p. 383 und 384

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r},$$

nach p. 386

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^3}{fk\cos.\varphi^5} - \frac{r^2}{k\cos.\varphi^3}$$

und

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{r}{\cos.\varphi^2}$$

ist. F. R. S.

die Natur der krummen Linie anzeigen. Die Schuß-Weite EF wird demnach durch den Werth der Wurzel x aus dieser Aequation gefunden werden:

$$0 = \sin.\theta - \frac{gx}{4b\cos.\theta} - \frac{gxx}{12bk\cos.\theta^2} - \frac{x^2}{6fk\cos.\theta^2} \pm \text{etc.};$$

hieraus bekommt man die Schuß-Weite

$$EF = \frac{4b\sin.\theta\cos.\theta}{g} - \frac{16bb\sin.\theta^2\cos.\theta}{3ggk} - \frac{32b^3\sin.\theta^2\cos.\theta}{3g^3fk}.$$

Weil in diesem Fall g nicht merklich von 1 unterschieden ist, so wird seyn

$$EF = 2b\sin.2\theta\left(1 - \frac{4b\sin.\theta}{3k} - \frac{8bb\sin.\theta}{3fk}\right),$$

wo, wie oben[1]) angenommen worden, $k = \frac{4}{3}nc$ und $f = 2h$. Dahero seyn wird

$$EF = 2b\sin.2\theta\left(1 - \frac{b(b+h)\sin.\theta}{nch}\right),$$

wo $2b\sin.2\theta$ die Weite des Schusses anzeigt, wenn kein Wiederstand vorhanden wäre. Dahero sich die Schuß-Weite in einem Luft-leeren Raum zur Schuß-Weite in der Luft verhalten wird,

$$\text{wie } 1 \text{ zu } 1 - \frac{b(b+h)\sin.\theta}{nch}.$$

Je grösser also der Winkel θ, unter welchem die Canone abgeschossen wird, ist, um so vielmehr wird auch die Schuß-Weite kleiner seyn, als wenn gar keine Resistenz vorhanden wäre.

Die größte Weite des Schusses wird auch nicht geschehen, wenn die Direction der Canone mit dem Horizont einen Winkel von 45° macht, sondern dieser Winkel muß wegen des Wiederstands etwas kleiner angenommen werden. Wenn man diesen Winkel θ, unter welchem die Kugel auf eine Horizontal-Fläche am weitesten gehen soll, nach der gewöhnlichen Art suchet, so findet man beynahe

$$\sin.\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{b(b+h)}{8nch}.$$

1) Siehe p. 384. F. R. S.

Diese Formuln können aber nicht gebraucht werden, als wenn nc weit grösser ist, als b. In allen von dem Autore angeführten Versuchen aber ist b weit grösser, als nc, dahero die hier gemachte Näherung bey keinem Exempel, so bey dem Autore vorkommt, angebracht werden kann. Derowegen sind wir gezwungen, diese Untersuchung allhier abzubrechen, und wollen wir dem Autori die völlige Ausführung dieser Materie überlassen, als welche er uns in einer besondern Schrift nächstens zu liefern versprochen hat.

SIEBENTER SATZ

Ausser dem, daß die Kugeln in ihrem Flug durch die. Kraft der Schwehre abwärts gezogen werden, so werden dieselben auch öfters von einer andern Kraft seitwärts entweder zur rechten oder zur lincken getrieben.

Wenn es wahr wäre, daß die Kugeln in ihrer Bewegung nur allein von der Kraft der Schwehre verrücket würden, so müßten sich die Abweichungen derselben von dem Ziel, nach welchem die Schüsse gethan werden, in soferne dieselben seitwärts, entweder zur rechten oder zur linken gehen, unter sich verhalten, wie die Entfernung des Stücks von dem Ziel. Dieses streitet aber mit der täglichen Erfahrung. Denn wenn in einer Entfernung von 30 Schuhen die Kugel nicht mehr als einen Zoll von dem Ziel abweichet, so findet man nicht, daß dieselbe in einer Entfernung von 300 Schuhen nur um 10 Zoll, und viel weniger in einer Entfernung von 900 Schuhen nur um 30 Zoll von dem Ziel seitwärts abweiche. Diese Vermehrung der Ungewißheit der Schüsse in grossen Entfernungen muß nothwendig von allen, welche sich nur einige Zeit im Schiessen geübet haben, beobachtet worden seyn. Hiervon kan nun keine andere Ursache gefunden werden, als daß die Bahn der Kugeln eben sowohl seitwärts, als abwärts gekrümmet sey; denn auf diese Weise wird die Abweichung der Bahn der Kugel von dem Ziel nach einer grösseren Verhältniß vermehret, als die Entfernungen des Stücks von demselben. Wenn man nehmlich die Bahn der Kugel mit der graden Linie, nach welcher das Stück gerichtet worden, gegen einander hält, so berühren diese beyden Linien einander bey der Mündung des Stücks, nachgehends aber entfernen sie sich je länger

je mehr von einander, wie bey allen krummen Linien, so von einer geraden berühret werden, zu geschehen pflegt.

Damit aber auch diejenigen, welche hiervon keine eigene Erfahrung haben, von der Wahrheit dieses Satzes überführet werden, so will ich einige Versuche anführen, welche alle fernere Zweifel zu heben vermögend sind.

Ich nahm einen Mußketen-Lauf, welcher eine Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter schoß, und befestigte denselben auf ein schwehres Gestell, damit derselbe beständig einerley Lage und Richtung behielte. Um aber von der Festigkeit desselben völlig gewiß zu seyn, so schoß ich damit 16 mahl nach einander gegen ein Brett, welches $1\frac{1}{2}$ [1]) Schuhe ins gevierte und in einer Weite von 180 Schuhen aufgesetzt war, und fand, daß die Kugel nur einmahl des Bretts verfehlet hatte. Hierauf ließ ich den Lauf auf eben diesem Gestell befestiget, verminderte aber die Ladung an Pulver, damit die Erschütterung und die daher rührende Veränderung in der Lage des Laufs um so viel geringer würde, und schoß damit nach einem Ziel, welches 2260 Schuh weit entfernet war. Bey diesen Schüssen befand ich nun, daß die Kugel bißweilen auf 300 Schuh, bald zur rechten bald zur lincken des Ziels verfehlte. In dieser Entfernung war auch die Bewegung nach der Vertical-Fläche nicht weniger ungewiß. Denn einige mahl fiel dieselbe bey 600 Schuh weiter oder näher zu Boden, ungeachtet ich nach einer sorgfältigen Untersuchung nicht befinden konnte, daß die Lage und die Richtung des Laufs nach einem jeden Schuß im geringsten wäre verändert worden.

Dieses beweiset also auf eine ganz unstreitige Weise die Wahrheit unsers Satzes, indem die Bewegung der Kugel unmöglich so unbeständig und veränderlich hätte seyn können, wenn nicht ihre Bahn eben sowohl seitwärts entweder zur rechten oder zur linken gekrümmet gewesen wäre, als abwärts.

ZUSATZ

Da nun die Würklichkeit dieser doppelten Krümmung der Bahn einer Kugel unwiedersprechlich dargethan worden, so wird man ohne Zweifel fragen: was wohl die Ursache von dieser so ganz verschiedenen Bewegung, als wir dieselbe bisher angesehen haben, seyn möchte? Hierauf antworte ich nun, daß diese Abweichung nothwendig von einer Gewalt, welche auf die Bewegung der Kugel schief würket, herkomme, und daß diese Gewalt in nichts anders, als dem Wiederstand der Luft, gesucht werden könne. Fragt man ferner, wie die Wür-

1) Im englischen Original steht $1\frac{1}{7}$. F. R. S.

kung des Wiederstands der Luft jemahlen auf die Bewegung der Kugel schief fallen könne? so antworte ich wiederum, daß solches vielleicht bißweilen von der ungleichen Figur der Kugel herrühren könne; insonderheit aber, daß eine Wirbel-förmige Bewegung der Kugel um sich selbst davon insgemein die Ursache sey. Denn, wenn eine solche Bewegung mit der fortgehenden Bewegung der Kugel vergesellschaftet ist, so muß ein jeglicher Theil des Umfangs der Kugel nach einer ganz andern Richtung auf die Luft stossen, als geschehen würde, wenn keine solche Wirbel-förmige Bewegung vorhanden wäre. Die von dieser Ursache herrührende Schiefe des Wiederstands der Luft wird um so viel grösser seyn, je geschwinder sich die Kugel um sich selbst, oder um eine durch ihr Centrum gehende Axe, in Ansehung der fortgehenden Bewegung, herumdrehet.

Hiermit habe ich alles dasjenige, was ich mir in dieser Schrift auszuführen vorgenommen hatte, zu Ende gebracht, was nehmlich sowohl die Gewalt des Pulvers, als den Wiederstand der Luft, betrift. Da aber die Erkenntniß des Wiederstands harter Körper, in Ansehung des Hineindringens der Kugel, in der Artillerie, und absonderlich bei dem Breche-Schiessen von der grösten Wichtigkeit ist, so will ich diese Abhandlung mit einem dahin abzielenden Satze endigen, welcher hier noch Platz finden soll.

ERSTE ANMERKUNG

In einem jeglichen harten Cörper kann eine doppelte Bewegung Platz finden: eine wodurch der ganze Körper von einem Ort zu einem andern gebracht wird, und diese wird die fortgehende Bewegung des Körpers genennet. Die andere ist eine drehende Bewegung, wodurch sich der Körper um sich selbst, oder um eine durch sein Mittelpunkt gehende Axe, herum drehet. Hier ist nur von harten Körpern die Rede; denn weiche, oder biegsame, oder gar flüßige Körper können ausser diesen beyden noch unendlich vielerley andere Bewegungen haben. Ein harter Körper hat nun entweder eine fortgehende, oder drehende Bewegung allein, oder beyde Bewegungen beysammen. Wenn sich in einem solchen Körper nur allein eine fortgehende Bewegung befindet, so gehen alle Theile desselben nicht nur gleich geschwind, sondern die Directionen aller Theile sind auch unter sich parallel. Von dieser Bewegung gilt

auch derjenige erste Grundsatz der Mechanic, wodurch behauptet wird, daß ein jeglicher in eine solche Bewegung gesetzter Körper immerfort mit einerley Geschwindigkeit und nach einerley Richtung fortgehe, woferne keine äusserliche Kräfte auf denselben würken, und seinen Zustand verändern. Woraus denn hinwiederum folget, daß, so oft entweder die Geschwindigkeit oder die Richtung eines Körpers verändert wird, auf denselben nothwendig eine äusserliche Kraft gewürket haben müsse.

Ein Körper kann ferner, ohne seine Stelle zu verändern, eine drehende Bewegung haben, wodurch derselbe um eine Axe herumgedrehet wird. In dieser Bewegung bleibet die Axe unbeweglich, und alle Theilchen des Körpers gehen um dieselbe herum, deren Geschwindigkeit um so viel grösser ist, je weiter dieselben von der Axe entfernet sind. Wenn diese Axe befestigt ist, so kann man sich eine solche Bewegung am füglichsten an einer Drechsel-Bank vorstellen; es kann sich aber ein Körper auch um eine Axe, so nirgend befestiget ist, bewegen. Hiezu werden aber zwey Stücke erfordert: erstlich, daß die Axe durch das Centrum gravitatis des Körpers durchgehe, und zweytens, daß die Schwingungs-Kräfte (Vires centrifugae) aller Theilchen einander im Gleichgewichte halten. Wo diese beyden Bedingungen Platz finden, da gilt auch die oben erwehnte Regel, daß eine solche Bewegung immerfort gleichförmig fortdauret, und keine Veränderung leidet, wenn keine äusserliche Kräfte dazu kommen. Halten aber die Vires centrifugae einander nicht im Gleichgewicht, so wird zwar die Bewegung des Körpers fortdauren, allein die Axe, um welche dieselbe geschieht, wird selbsten beweglich, und die Herumdrehung geht beständig um eine andere Axe. Wenn eine Kugel aus einer allenthalben gleich dichten Materie gemacht ist, so sind die Vires centrifugae immer im Gleichgewichte, wenn nur die Axe der Kugel durch ihr Mittelpunkt gehet, und also kann eine solche Kugel eine beständig gleich geschwind fortdaurende Bewegung um eine jegliche Linie, so durch ihr Mittelpunkt gehet, haben.

Diese beyden Bewegungen, nehmlich die fortgehende und herumdrehende, sind nun von einander dergestalt unterschieden, daß sich beyde in einem Körper zugleich befinden können, ohne, daß eine von der andern im geringsten gestöret würde; eine jede kann auch von äusserlichen Kräften ganz allein verändert werden, ohne daß die andere dadurch die geringste Veränderung leidet. Ein Exempel einer solchen doppelten Bewegung in einem Cörper stellet uns die Erd-Kugel dar, als welche sich erstlich nach ihrer fortgehenden Bewegung in einem Jahr um die Sonne herum bewegt, und sich inzwischen beständig um ihre Axe in 24 Stunden herum drehet. In der Erde ist auch noch die Ver-

änderlichkeit ihrer Axe zu bemerken, als welche sich jährlich um 50 Secunden rückwärts lenket.

Wenn also einem Körper, außer der fortgehenden Bewegung, auch eine Bewegung um eine Axe, so durch das Centrum gravitatis desselben gehet, und welche also beschaffen ist, daß sich alle Vires centrifugae im Gleichgewichte halten, eingedruckt worden, so werden darinne beyde zugleich beständig fortdauren, und wenn keine äusserliche Kräfte darauf würken, keine Veränderung leiden.

Die Haupt-Sache beruhet nun darauf, was für Kräfte einem Körper entweder nur eine fortgehende Bewegung, oder nur eine herumdrehende, oder beyde zugleich einzudrücken vermögend sind.

Wenn die Direction der Kraft durch das Centrum gravitatis des Körpers gehet, so würket dieselbe nur eine fortgehende Bewegung. Wenn nehmlich der Körper vorher still gestanden, so wird demselben eine Bewegung nach eben derjenigen Direction, nach welcher die Kraft gerichtet ist, eingedrücket; und wenn der Körper schon vorher eine fortgehende Bewegung gehabt, so wird dieselbe entweder schneller oder langsamer, oder es wird auch die Direction derselben verändert, je nach dem die Direction der Kraft entweder vorwärts oder rückwärts, oder schief auf die Direction der Bewegung würket. Wenn aber der Körper außer der fortgehenden Bewegung noch eine herumdrehende schon hat, so bleibt dieselbe von einer solchen Kraft, welche durch das Centrum gravitatis des Körpers gehet, völlig unverändert.

Wenn die Direction der Kraft nicht durch das Centrum gravitatis des Körpers gehet, so wird dadurch erstlich die fortgehende Bewegung gleicher maaßen verändert, als wenn eben dieselbe Kraft nach einer parallelen Direction durch das Centrum gravitatis gienge. Ueber dieses aber wird dem Körper von einer solchen Kraft eine herumdrehende Bewegung um eine Axe, welche durch sein Centrum gravitatis gehet, und auf die Fläche, so durch dieses Centrum und die Direction der Kraft gezogen wird, perpendicular aufstehet, eingedrückt. Hat aber der Körper schon vorher eine herumdrehende Bewegung, entweder um eben diese Axe, oder um eine andere gehabt, so wird dieselbe entweder geschwinder oder langsamer, in dem letztern Fall aber wird auch die Axe selbst verändert.

Wenn aber zwo oder mehr Kräfte zugleich auf den Körper würken, so findet man folgender Gestalt, was daher für Bewegungen und Veränderungen in dem Körper entstehen müssen. Erstlich stellt man sich vor, als wenn alle diese Kräfte nach Parallel-Directionen durch das Centrum gravitatis giengen,

und verwandelt dieselben in eine einige Kraft, aus welcher die Erzeugung und Veränderung der fortgehenden Bewegung bestimmet wird. Wenn es also geschieht, daß alle diese Kräfte einander aufheben, so leidet die fortgehende Bewegung davon gar keine Veränderung. Was aber hernach die herumdrehende Bewegung anlangt, so sucht man von allen diesen Kräften nach ihren würklichen Directionen die Momenta, indem man dieselben durch ihre Entfernungen von dem Centro gravitatis multipliciret; und indem man dieselben gegen einander hält, so findet man, um was für eine Axe, und wie stark der Körper herum getrieben werden müsse. Hieraus läßt sich folglich entweder die Erzeugung einer herumdrehenden Bewegung, wenn der Körper vorher noch keine gehabt, oder die Veränderung derselben, wenn schon eine vorhanden gewesen, bestimmen.

Nach diesen Grund-Sätzen wollen wir nun genauer untersuchen, was für eine Bewegung einer Kugel, welche aus einer Canone geschossen wird, von der Gewalt des Pulvers eingedruckt, und wie dieselbe nachgehends durch den Wiederstand der Luft verändert werde. Wir wollen erstlich annehmen, die Kugel sey vollkommen rund, und ihr Centrum gravitatis sey mit ihrem Mittelpunct einerley. In diesem Fall geht die forttreibende Gewalt des Pulvers nicht nur durch das Centrum gravitatis der Kugel, sondern ihre Direction ist auch mit der Axe des Laufs einerley; dahero der Kugel nur allein eine fortgehende Bewegung nach der Axe des Laufs eingedruckt wird. Die Kugel bekommt also eben diejenige Bewegung, welche wir oben mit dem Autore für dieselbe herausgebracht haben, und erhält folglich von der Gewalt des Pulvers keine herumdrehende Bewegung. Weil aber die Kugel auf der innern Höhlung der Canone fortgehet, und daher eine Friction leidet, deren Direction nicht durch das Centrum der Kugel gehet, sondern dieselbe von aussen berühret, so müßte dadurch der Kugel eine drehende oder rollende Bewegung eingedrückt werden, woferne solche durch den Pfropf nicht verhindert würde. Denn da der Pfropf die Kugel sehr gedräng einzuschließen pflegt, so ist die Friction zu schwach, um der Kugel eine solche rollende Bewegung einzudrücken. Also fähret die Kugel bloß allein mit einer fortgehenden Bewegung in die Luft, wo dieselbe theils der Kraft der Schwehre, theils dem Wiederstand ausgesetzt ist. Die erstere Kraft geht immer durch das Centrum gravitatis, und würket also nur auf die fortgehende Bewegung, als welche dadurch abwärts gekrümmet wird. Die Kraft des Wiederstands gehet in diesem Fall auch durch das Centrum gravitatis der Kugel, und bringt also gleichfalls keine herumdrehende Bewegung hervor. Und weil dieselbe mit der Direction der Kugel übereinstimmt,

so wird dadurch auch der Körper nicht aus derjenigen Vertical-Fläche, in welcher die Bewegung angefangen, gezogen. Woraus erhellet, daß, wenn die Kugel vollkommen rund, und ihr Centrum gravitatis in ihrem Mittelpunct befindlich ist, die Bewegung derselben eben so beschaffen seyn müsse, als die Theorie erfordert. Die Kugel wird sich nehmlich in einer Vertical-Fläche bewegen, und von derselben weder zur rechten noch zur linken ausweichen.

Wenn sich also das Ziel, nach welchem man schiessen will, in eben dieser Vertical-Fläche befindet, so kann der Schuß nicht anders fehlen, als daß derselbe entweder zu hoch, oder zu niedrig gehet. Wenn aber die Vertical-Fläche, worinnen sich die Kugel beweget, nicht durch das Ziel gehet, so muß der Schuß auch seitwärts fehlen, und das um so viel mehr, je weiter das Ziel von der Canone entfernet ist; wenn nehmlich der Winkel, welchen die gerade Linie, so von dem Stück zum Ziel gezogen wird, mit der gemeldten Vertical-Fläche einerley Winkel macht. Wenn dahero die Kugel einmahl zum Exempel zur Rechten von dem Ziel abgewichen, so müssen auch alle Schüsse, welche ohne die Richtung der Canone zu verändern gethan werden, gleich weit zur Rechten des Ziels verfehlen, wenn auch gleich die Ladung vermehret oder vermindert worden. Wenn also bey vielen Schüssen, welche aus einem befestigten Lauf, dessen Richtung nicht verändert werden kann, der Fehler bald zur rechten bald zur linken vom Ziel abweichet, und auch in grössern Entfernungen, nach einer grössern Verhältniß wächst, als die Entfernung selbst, so schliesset der Autor richtig, daß die Bahn der Kugel in keiner Vertical-Fläche gewesen, und daß dieselbe folglich eine doppelte Krümmung gehabt haben müsse.

Nun wollen wir eine Kugel betrachten, welche zwar vollkommen rund, deren Centrum gravitatis aber ausser ihrem Mittelpunkt befindlich ist. So lange diese Kugel der Gewalt des Pulvers in dem Lauf der Canone ausgesetzt ist, so gehet die Direction dieser Gewalt durch das Mittelpunkt der Kugel, und ist der Axe der Canone parallel, folglich bekommt dieselbe eben diejenige fortgehende Bewegung, als in dem vorigen Fall; und wenn diese Direction zugleich durch das Centrum gravitatis gehet, so wird davon auch keine drehende Bewegung hervorgebracht. Wenn aber das Centrum gravitatis der Kugel ausser dieser Linie, nach welcher die Kraft des Pulvers würcket, zu liegen kommt, so wird der Kugel zugleich eine drehende Bewegung um das Centrum gravitatis eingedruckt. Da aber durch eben diese Bewegung das Mittelpunkt der Kugel bald auf die entgegengesetzte Seite des Centri gravitatis gebracht wird, so wird durch diese Kraft die vorige drehende Bewegung der Kugel wiederum zernichtet, dergestalt, daß keine beständige herumdrehende Bewegung in der

Kugel hervorgebracht werden kan. Eine gleiche Bewandtniß hat es auch, wenn die Kugel schon aus dem Lauf heraus geschossen worden; denn die Direction des Wiederstands geht alsdenn durch das Mittelpunkt der Kugel, und da dieselbe der Bewegung der Kugel schnurgerade entgegen ist, so wird dadurch die fortgehende Bewegung der Kugel eben wie im vorigen Fall verändert. Ueber dieses aber bekommt die Kugel eine drehende Bewegung um das Centrum gravitatis, wodurch das Mittelpunkt rückwärts getrieben wird. So bald aber das Mittelpunkt beginnt wiederum vorwärts zu kommen, so wird die Kraft des Wiederstands der vorigen zuwieder, und vermindert also die schon erzeugte drehende Bewegung, wodurch dieselbe endlich gänzlich gehemmet und die Kugel also fortgehen wird, daß das Mittelpunkt hinter dem Centro gravitatis beständig bleibt. Hieraus folget, daß endlich die schwehrere Helfte der Kugel, in welcher das Centrum gravitatis befindlich ist, beständig voraus gehet, und die leichtere nachfolget, welcher Umstand auch jederzeit in der That wahrgenommen wird. In diesem Fall wird also auch nicht die Kugel aus der Vertical-Fläche, in welcher die Bewegung angefangen, ausweichen. Dahero diese Ausweichung von keiner andern Ursache herrühren kan, als von dem Mangel einer vollkommenen Ründung.

Wenn die Kugel nicht vollkommen rund ist, so kan es geschehen, daß die Direction der Gewalt des Pulvers nicht nur nicht durch das Centrum gravitatis der Kugel gehet, sondern daß dieselbe auch nicht einmahl der Axe der Canone parallel läuft. Im ersten Fall würde der Kugel eine herumdrehende Bewegung eingedruckt werden, welche aber, wie in dem vorigen Fall gewiesen worden, bald wiederum aufhören müßte. Der letztere Fall aber ist bey den von dem Autore angeführten Umständen insonderheit merkwürdig; denn da wird die Kugel nicht nach der Axe der Canone fortgetrieben, sondern nach der Direction der forttreibenden Gewalt. Also wird die Kugel gegen die inneren Wände der Canone gestossen, von welchen sie wiederum zurück prallet, und dahero keine geringe Kraft auf die Canone ausübet. Dieses ist der Fall, dessen wir oben erwehnet haben, da eine Canone, wenn dieselbe gleich vollkommen gerade gebohret ist, dennoch von der Gewalt der Kugel allein zersprenget werden kan, woraus die Nothwendigkeit der vollkommenen Ründung der Canonen-Kugeln um so viel deutlicher erhellet.

Wenn aber eine solche Kugel, welche nicht völlig rund ist, aus der Canone herausgefahren, so wird ausser dem, daß ihre Direction schon etwas von der Axe des Stückes abweichet, noch ihre Bewegung durch den Wiederstand der Luft ganz anders verändert, als wenn die Kugel vollkommen rund wäre. Denn

da sich der Wiederstand der Luft nach der äußern Figur der Kugel richtet, so ist es nicht nur möglich, daß die Direction des Wiederstands von der Direction der Bewegung unterschieden sey, sondern es würde auch ein sehr rarer Zufall seyn, wenn diese beyden Directionen mit einander übereinstimmen sollten. Es kann also geschehen, daß erstlich die Kugel von dem Wiederstand entweder mehr aufwärts oder abwärts, als sonsten geschehen würde, getrieben werde. Und hieraus begreift man ganz deutlich, wie bißweilen eine Kugel etliche hundert Schritt weiter oder näher zu Boden fallen könne, als eine andere, wenn gleich beyde aus einem Lauf, unter einerley Richtung, und mit gleicher Ladung sind heraus geschossen worden. Wenn aber die Direction des Wiederstands nicht in die Vertical-Fläche, in welcher die Bewegung angefangen, fällt, so wird dadurch die Kugel seitwärts, entweder zur rechten oder zur linken, getrieben. Und wenn sich die Kugel nicht herum drehet, so weicht diese Kraft beständig von gemeldter Vertical-Fläche gleich viel ab; folglich wird dadurch die Kugel je länger je mehr seitwärts abgetrieben, dergestalt, daß je weiter die Kugel geschossen wird, die Abweichung derselben von dem Ziel um so viel grösser seyn wird. In einer doppelten Entfernung wird nehmlich die Abweichung der Kugel von dem Ziel nicht nur zweymahl, ja nicht nur dreymahl so groß seyn, als welches geschehen würde, wenn die Kugel, nachdem sie die erste Helfte des Wegs durchlaufen, nicht mehr seitwärts getrieben werden sollte; sondern die Abweichung müßte vier mahl so groß werden, wenn die seitwärts treibende Kraft der Kugel immer gleich groß bliebe. Da aber dieselbe mit der Geschwindigkeit der Kugel abnimmt, so wird die Abweichung zwar etwas kleiner als 4 mahl so groß, immer aber mehr als dreymahl so groß seyn. Die wahre Ursache also der Ungewißheit der Schüsse bestehet ganz allein in dem Mangel der runden Figur der Kugel, und es kann eine drehende Bewegung der Kugel dazu nichts merkliches beytragen, wie der Autor vermeynet. Im Gegentheil, wenn sich die Kugel in ihrem Flug herum drehen sollte, so müßte die Kraft des Wiederstands bald zur Rechten, bald zur Linken gerichtet seyn, und könnten also die Schüsse in grössern Entfernungen nicht ungewisser werden, als in kleinern. So groß aber auch die Ungewißheit der Schüsse, welche der Autor anführet, zu seyn scheinet, so ist nicht zu vermuthen, daß dieselbe bey Canonen-Kugeln so groß seyn sollte. Denn der Autor hat mit bleyernen Kugeln seine Versuche angestellt, welche nicht nur sehr merklich von einer runden Figur abzugehen pflegen, sondern auch in dem Lauf noch viel mehr verändert werden können. Die Canonen-Kugeln hingegen scheinen gemeiniglich eine vollkommenere Ründung zu haben,

und da dieselben von Eisen, so kan ihre Figur auch nicht so leicht in dem Lauf der Canonen verändert werden. Aus dieser Ursache müssen also die Canonen-Schüsse in ihrer Art weit gewisser seyn, als die Mußketen-Schüsse, welche mit bleyernen Kugeln gethan werden. Hiervon müssen aber, allem Ansehen nach, die Schüsse, welche aus gezogenen Röhren geschehen, ausgenommen werden, und das aus eben derjenigen Ursache, welche der Autor von der Unrichtigkeit der Schüsse überhaupt angeben will. Denn weil die Kugeln aus gezogenen Röhren eine drehende Bewegung bekommen, welche mit der fortgehenden immer fortdauret, so wird beständig eine jede Kraft des Wiederstands, wodurch die Kugel immer entweder aufwärts, oder seitwärts getrieben wird, gleichsam in einem Augenblick, indem sich die Kugel herum drehet, in eine entgegen gesetzte verwandelt, dahero von der unrichtigen Figur der Kugel in diesem Fall keine so grosse Ungewißheit entstehen kann, als wenn die Kugel mit keiner drehenden Bewegung begabet ist.

ZWEYTE ANMERKUNG

Wir haben also die wahre Ungewißheit der Schüsse, welche der Autor in diesem Satz anführet und sehr zweifelhaft erkläret, unstreitig entdecket, indem wir gewiesen, daß dieselbe ganz allein auf der Figur der Kugel beruhe. Denn, wenn die Kugel vollkommen rund ist, wenn auch gleich ihr Centrum gravitatis von dem Mittelpunkt verschieden wäre, so kan die Abweichung der Kugel von dem Ziele seitwärts nicht merklich seyn. Und wenn in diesem Fall die Kugel des Ziels seitwärts verfehlen solte, so würde dieses ein sicheres Zeichen seyn, daß sich das Ziel nicht in derjenigen Vertical-Fläche, nach welcher die Axe des Stücks oder Schieß-Gewehrs gerichtet ist, befände. Wenn aber die Kugel nicht völlig rund ist, so haben wir gewiesen, daß dieselbe meistentheils von ihrer Richtung seitwärts abweichen, und bey dem Ziel um so viel weiter seitwärts vorbey gehen müsse, je weiter das Ziel von dem Schieß-Gewehr entfernet ist. Diese Abweichung wird auch durch die herumdrehende Bewegung der Kugel nicht nur nicht vermehret, sondern wenn die Kugel eine solche Bewegung hätte, so würde die Ungewißheit des Schusses bey weitem nicht so groß seyn.

Der Autor scheinet zwar das Gegentheil zu behaupten, allein ausser dem, was vorher angeführet worden, so können wir auch beweisen, daß die

Kraft des Wiederstands nicht merklich von einer drehenden Bewegung der Kugel verändert werde, und derselben ungeachtet beynahe allezeit eben so groß sey, als wenn die Kugel keine herumdrehende Bewegung hätte. Es ist zwar wahr, wie der Autor bemerket, daß durch eine solche drehende Bewegung sowohl die Geschwindigkeit, mit welcher ein jegliches Punkt der Kugel auf die Luft stößt, als auch der Winkel, unter welchem dieser Stoß geschieht, verändert werde. Allein es bleibt erstlich die Direction der Kraft des Stosses immer perpendicular auf die Oberfläche der Kugel. Hernach da die Kraft des Stosses selbst sich beständig verhält, wie das Quadrat der Geschwindigkeit multiplicirt durch das Quadrat des Sinus des Winkels, unter welchem der Stoß geschieht, so wird fast immer der Sinus dieses Winkels um eben so viel grösser oder kleiner, als die Geschwindigkeit vermindert oder vermehret wird, dahero auch die Stärke des Stosses beynahe einerley bleibet, die Kugel mag eine drehende Bewegung haben oder nicht. Diese Gleichheit trift beynahe zu, wenn die Figur der Kugel nicht merklich von einer vollkommenen Ründung unterschieden ist, und wenn die Axe, um welche die drehende Bewegung geschieht, beynahe durch das Mittelpunkt derselben geht. Wenn aber die Kugel vollkommen rund ist, und sich um eine Axe, welche durch ihr Mittelpunkt gehet, herum drehet, alsdenn ist so gar die Würkung des Wiederstands vollkommen einerley, die Kugel mag eine solche drehende Bewegung haben oder nicht.

Wir haben also nur nöthig, diesen letztern Fall zu beweisen; indem aus der Wahrheit desselben von selbsten folget, daß wenn die Figur der Kugel nicht viel von einer völligen Ründung abweichet, und die Axe der Herumdrehung beynahe durch das Mittelpunkt desselben gehet, die Ungleichheit des Wiederstands, wenn dieselbe nicht gar wie im erstern Fall verschwindet, dennoch nicht merklich seyn könne. Um also dieses deutlich darzuthun, so wollen wir eine vollkommen runde Kugel betrachten, welche ausser ihrer fortgehenden Bewegung sich um eine durch ihr Mittelpunkt gehende Axe herum drehe; es ist auch gleich viel, ob diese Axe beständig oder unbeständig angenommen werde. Hierbey ist nun erstlich zu merken, daß wenn die Kugel gar keine fortgehende Bewegung hätte, dieselbe auch von der Luft keinen andern Wiederstand leiden würde, als welcher etwa von dem Reiben der Theilchen entstehen möchte, welcher aber so geringe ist, daß man denselben leicht aus der Acht lassen kann. Denn wenn die Kugel keine fortgehende Bewegung hat, so stehet ihr Mittelpunkt völlig still, und da alle Theilchen der Oberfläche immer gleich weit von dem Mittel-

punkt entfernet bleiben, so können dieselben keine solche Bewegung haben, wodurch gegen die Theilchen der Luft ein würklicher Stoß entstünde. In diesem Fall werden nehmlich die Theilchen der Luft in keine andere Bewegung gesetzt, als in so ferne dieselben durch die schwache Friction mit fortgezogen werden, und dahero können dieselben auch keine Gewalt auf die drehende Bewegung der Kugel ausüben. Wenn aber die Kugel eine fortgehende Bewegung hat, so kan man sich die Sache, wie oben gewiesen worden, immer so vorstellen, als wenn die Kugel gar keine fortgehende Bewegung hätte, hingegen aber die Luft mit einer gleichen Geschwindigkeit darauf stiesse; denn in beyden Fällen muß die aus dem Anstossen der Lufttheilchen entstehende Gewalt einerley seyn.

Wir wollen uns also eine Kugel vorstellen, deren Mittelpunkt unbeweglich seyn soll, um welches sich die Kugel herum drehe, und wollen setzen, daß die Luft mit einer gegebenen Geschwindigkeit auf diese Kugel beweget werde. In der Figur 26 soll die Fläche des Papiers die Kugel in dem Punkt A berühren, und die Luft nach der Direction PA auf dieses Punkt der Kugel A stossen. Man stelle sich die Geschwindigkeit der Luft durch die Linie PA vor, und lasse aus dem Punkt P auf die berührende Fläche einen Perpendicul PQ herab fallen, und ziehe die Linie AQ. Wenn nun die Kugel keine herum drehende Bewegung hätte, so würde die Stärke des Stoßes der Luft seyn wie das Quadrat der Linie PA, wodurch die Geschwindigkeit der Luft angedeutet wird, multipliciret durch das Quadrat des Sinus des Winkels PAQ, welchen die Direction der Bewegung der Luft PA in diesem Punkt A mit der Oberfläche der Kugel macht. Weil nun der Sinus des Winkels PAQ durch $\frac{PQ}{PA}$ ausgedrückt wird, so wird die Kraft der Luft auf das Punkt A seyn, wie $PA^2 \cdot \frac{PQ^2}{PA^2}$, das ist, wie PQ^2.

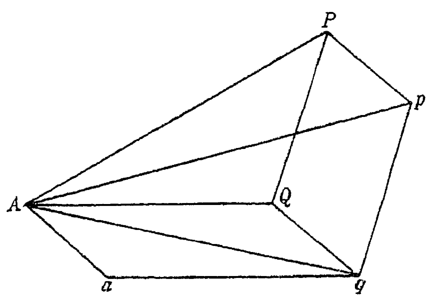


Fig. 26.

Wenn aber die Kugel eine drehende Bewegung hat, und dabey ihr Mittelpunkt stille steht, so kann das Punkt A keine andere Bewegung haben, als nach einer Direction, welche in der berührenden Fläche der Kugel, so durch die Fläche der Kupfer-Platte vorgestellt wird, lieget. Es sey also Aa die Direction, nach welcher sich das Punkt A beweget, und man nehme Aa so groß, daß sich verhalte PA zu Aa, wie die Geschwindigkeit der Luft zur Geschwin-

digkeit des Punkts A. Um nun die Würkung zu bestimmen, welche die nach der Direction PA bewegte Luft auf das nach der Direction Aa bewegte Punkt A ausübet, so darf man nur die Bewegung des Punkts A in den Gedanken der Luft mittheilen, welches geschieht, wenn wir Pp der Linie Aa parallel und gleich groß ziehen. Denn da wird die Würkung der Luft auf das Punkt A eben so groß seyn, als wenn dasselbe still stünde, die Luft aber darauf nach der Direction der Linie pA mit einer Geschwindigkeit, welche durch die Linie pA vorgestellet wird, stiesse. Folglich muß man das Quadrat dieser Geschwindigkeit oder Linie pA mit dem Quadrat des Sinus des Winkels, welchen diese Linie pA mit der berührenden Fläche machet, multipliciren. Um nun diesen Winkel zu finden, so ziehe man aus dem Punkt p auf die berührende Fläche die Perpendicular-Linie pq, welches geschieht, wenn man Qq der Linie Aa gleich und parallel setzt. Weil also auch Qq der Linie Pp gleich und parallel, und die Linie pq der Linie PQ gleichfals parallel ist, so muß

$$pq = PQ,$$

und der Bruch $\frac{pq}{pA}$ wird den Sinum des Winkels pAq ausdrücken, unter welchem die Luft auf das bewegte Punkt A stößt. Derowegen wird die Kraft dieses Stosses seyn wie $pA^2 \cdot \frac{pq^2}{pA^2}$, das ist, wie pq^2. Da nun $pq = PQ$, so wird die Kraft der Luft auf das bewegte Punkt A eben so groß seyn, als wenn dieses Punkt A gar keine Bewegung hätte. Ob also gleich durch die Bewegung des Punkts A sowohl die Geschwindigkeit der darauf stossenden Luft pA, als der Winkel pAq, unter welchem der Stoß geschieht, verändert wird, so sind doch diese beyden Veränderungen so beschaffen, daß daraus einerley Kraft entspringt. Was aber hier von einem Punkt A der Oberfläche der Kugel erwiesen worden, dasselbe gilt gleichergestalt von allen andern Punkten derselben; und hierdurch wird also unser Satz unwiedersprechlich bestätiget, daß eine vollkommen runde Kugel, welche sich ausser ihrer fortgehenden Bewegung um ihr Mittelpunkt herum drehet, eben denselben Wiederstand von der Luft leide, als wenn dieselbe gar keine herumdrehende Bewegung hätte.

Wenn also eine solche Kugel je in der Canone, aus welcher dieselbe geschossen wird, ausser der fortgehenden Bewegung noch eine herumdrehende Bewegung um ihr Mittelpunkt bekäme, so würde dieselbe doch in der Luft ihre Bewegung eben so fortsetzen, als wenn sie keine herumdrehende Bewegung erhalten hätte. Und da bey einer vollkommen runden Kugel die fortgehende Bewegung durch eine drehende Bewegung keineswegs verändert

wird, so ist hieraus klar, daß wenn bey einer Kugel, so nicht völlig rund ist, je eine Veränderung in dem Wiederstand der Luft von der herumdrehenden Bewegung verursachet würde, dieselbe doch nicht merklich seyn könnte, sondern daß die Kugel fast eben so bewegt werden würde, als wenn gar keine herum drehende Bewegung darinn befindlich wäre. Dahero in keinem Fall die fortgehende Bewegung der Kugel durch eine herumdrehende Bewegung merklich verändert werden kann.

ACHTER SATZ

Wenn gleich grosse und gleich schwehre Kugeln auf eben denselben harten Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten stossen, und in denselben hinein dringen, so werden sich die verschiedenen Tiefen, auf welche die Kugeln hinein gedrungen, beynahe verhalten, wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten. Und der Wiederstand solcher harten Körper wird, in Ansehung des Hineindringens der Kugel, immer gleich groß seyn.

Den ersten Theil dieses Satzes habe ich durch sehr viele Versuche immer richtig befunden. Denn als ich eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter gegen einen Ulmenbäumen-Bloch mit einer Geschwindigkeit von ungefehr 1700 Schuhen in einer Secunde geschossen, so habe ich durch eine grosse Anzahl Versuche befunden, daß dieselbe von $4\frac{1}{2}$ biß $5\frac{1}{2}$ Zoll tief hinein gedrungen. Als ich aber eine gleiche Kugel gegen eben dasselbe Bloch mit einer Geschwindigkeit von ungefehr 730 Schuhen in einer Secunde geschossen, so gieng die äußere Fläche der Kugel beynahe $\frac{1}{4}$ Zoll tief in das Wesen des Holzes, so daß das Hineindringen in diesem Fall nach einem Mittel ungefehr einen Zoll betrug. Wenn man aber die ganze Höhlung des Lochs betrachtet, und dieselbe in einen Cylinder verwandelt, so wird derselbe ungefehr $\frac{7}{8}$ eines Zolls lang. Wenn aber die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde mehr nicht, als von 400 Schuhen gewesen: so drung gemeiniglich nur ungefehr die Helfte der Kugel in das Holz hinein, welches nach einem Cylinder den vierten Theil eines Zolls in der Tiefe austrägt.

Die Quadrate dieser drey verschiedenen Geschwindigkeiten verhalten sich ungefehr wie diese Zahlen 55, 10 und 3. Wenn wir nun für die gröste Tiefe, welche von der grösten Geschwindigkeit verursachet worden, 5 Zoll rechnen, so findet man nach dieser Verhältniß der Quadraten, daß die Tiefen, welche durch die beyden geringern Grade der Geschwindigkeit sind verursachet worden, hätten $\frac{10}{11}$ und $\frac{3}{11}$ eines Zolls betragen müssen: welche Zahlen von den durch die Erfahrung gefundenen $\frac{7}{8}$ und $\frac{1}{4}$ nicht merklich unterschieden sind. Eine genauere Uebereinstimmung dergleichen Versuche mit der Theorie kann man nicht erwarten, wenn man die ungleiche Verbindung der Theilchen eines Stücks Holzes, und die durch den Stoß verursachte Veränderung in der Figur der Kugel in Erwegung zieht.

Da nun die Tiefe der Löcher mit den Quadraten der Geschwindigkeit des anstossenden Körpers in einerley Verhältniß ist, so wird daher der gleichförmige Wiederstand des Holzes aus eben denjenigen Gründen leicht erwiesen, durch welche man die gleichförmige Würkung der Kraft der Schwehre aus der Eigenschaft der Geschwindigkeiten, deren Quadrata mit den Höhen, aus welchen ein Körper herunter gefallen, einerley Verhältniß haben, zu beweisen pflegt. Dieses erhellet auch aus dem Aufsteigen der Körper, welche gerade aufwärts geworfen werden; denn in diesem Fall verhält sich auch immer die Höhe, zu welcher der Körper gelanget, wie das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher der Körper im Anfang ist hinauf geworfen worden.

ANMERKUNG

Wenn ein Körper gegen eine unbewegliche Wand, oder einen Wall geworfen wird, so prellt derselbe entweder zurück, oder dringet hinein, so lange, bis seine ganze Geschwindigkeit durch den Wiederstand zernichtet worden. Das Zurückprellen geschieht, wenn sowohl der anstossende Körper, als der Wall vollkommen elastisch, oder mit einer Kraft begabet sind, sich, nachdem in ihrer Figur eine Aenderung vorgegangen, wiederum in ihre vorige Form herzustellen. Wo sich diese Kraft nicht befindet, da dringet die Kugel so tief hinein, bis sie alle Bewegung verlohren, und bleibt alsdenn still stehen. In beyden Fällen machet nehmlich die Kugel einen Eindruck: im erstern Fall wird derselbe wiederum hergestellet, im letztern aber

dauret der Eindruck noch nach dem Stoß fort; und hieraus entstehet der Unterscheid zwischen den elastischen und nicht elastischen Körpern. Zwischen diesen zwey Arten der Körper giebt es aber noch unendlich viel verschiedene Mittel-Arten, je nachdem die Wiederherstellungs-Kraft in denselben grösser oder kleiner ist: ja man kann fast mit Gewißheit behaupten, daß sich in der ganzen Welt weder ein vollkommen elastischer Körper befinde, noch ein solcher, welcher von aller Elasticität gänzlich entblösset wäre. Denn ein Körper mag so vollkommen elastisch scheinen, als immer möglich ist, so bleibt doch allezeit von einem jeglichen darinn gemachten Eindruck ein geringes Merckmahl zurück: und man hat auch noch keinen Körper angetroffen, welcher, nachdem er einen Eindruck empfangen, sich nicht einiger Maassen wieder herstellen sollte. Wir haben aber zur Erläuterung des gegenwärtigen Satzes nur allein auf den Eindruck zu sehen, welcher entsteht, wenn zwey Körper auf einander stossen, und welcher allezeit entsteht, die Körper mögen elastisch seyn oder nicht: und in dieser Absicht gilt es gleich viel, ob dieser Eindruck entweder unverändert fortdauret, oder gänzlich oder auch nur zum Theil wiederum hergestellet wird. Unterdessen ist doch so viel aus der Erfahrung bekannt, daß wenn eine Kugel in einen Wall, oder in eine hölzerne Wand hinein geschossen wird, die Kugel darinn stecken bleibe, und nicht merklich wiederum zurück getrieben werde. Dahero wenn diese Körper je mit einer elastischen Kraft begabet sind, so kann dieselbe sicher aus der Acht gelassen werden.

Wenn nun eine Kugel gegen einen solchen Körper geschossen wird, so machet dieselbe nicht nur einen Eindruck, sondern dringet auch auf eine gewisse Tiefe hinein; und da solches ohne einen grossen Wiederstand nicht geschehen kann, so wird dadurch die Bewegung der Kugel nach und nach vermindert, und endlich gar zernichtet. Um also die Tiefe zu finden, auf welche eine Kugel hinein zu dringen vermögend ist, so muß man den Wiederstand bestimmen können, welchen die Kugel, indem sie hineindringet, leidet. Wenn die Wand oder der Wall, von Holz oder Erden ist, so sieht man wohl, daß, um darinn einen Eindruck zu verursachen, eine um so viel grössere Kraft erfordert werde, je grösser die Höhlung ist, welche darinn gemacht werden soll. Denn da die Elasticität in diesen Fällen nicht merklich ist, so findet die Kugel, nachdem sie schon auf eine gewisse Tiefe hineingedrungen, einen eben so grossen Wiederstand, als anfänglich. Derohalben ist dieser Wiederstand eine beständige oder gleichförmige Kraft, welche nicht auf der Geschwindigkeit der Kugel beruhet, und ist also in diesem Stück der Kraft der

Schwehre ähnlich, durch welche ein aufwärts geworfener Körper in gleichen Zeiten immer gleich viel von seiner Geschwindigkeit verliehrt, dieselbe mag groß oder klein seyn. Die Grösse dieser Kraft beruhet nun erstlich auf der Festigkeit der Materie der Wand oder des Walles, hernach aber auch auf der Weite des Lochs, welches die Kugel darinne macht, und welches dem Quadrat des Diameters der Kugel proportional ist.

Wenn also der Diameter der Kugel $= c$ gesetzt, und die Festigkeit des Walls durch f angedeutet wird, so wird der Widerstand dieser Formul ccf proportional seyn. Wir wollen also setzen, diese Kraft des Wiederstands sey gleich dem Gewicht einer Wasser-Säule, deren Höhe $= f$, und welche mit der Kugel gleich dick ist, indem es uns frey steht, diese Gewalt nach Belieben zu bestimmen, wenn nur in allen verschiedenen Fällen die wahren Verhältnisse der Grösse f beobachtet werden. Ferner wollen wir setzen, die Schwehre der Materie, woraus die Kugel besteht, verhalte sich zur Schwehre des Wassers wie n zu 1. Nun soll b die Höhe anzeigen, aus welcher durch den Fall eben diejenige Geschwindigkeit erzeuget wird, mit welcher die Kugel anfänglich auf den Wall stößt; nachdem dieselbe aber schon auf eine Tiefe $= x$ hineingedrungen, so soll die Geschwindigkeit der Kugel durch $\sqrt{v}$ angedeutet werden. Da nun die Kugel einem gleich dicken Cylinder Wasser gleichet, dessen Höhe $= \frac{2}{3} nc$, so wird sich der Wiederstand zum Gewichte der Kugel verhalten, wie f zu $\frac{2}{3} nc$, das ist, wie $\frac{3f}{2nc}$ zu 1. Hieraus bekommt man, indem die Kugel durch den unendlich kleinen Raum dx weiter hinein dringt, diese Aequation

$$dv = -\frac{3fdx}{2nc}$$

und also

$$v = b - \frac{3fx}{2nc}.$$

Die Kugel fährt aber so lange fort, weiter hinein zu dringen, bis sie ihre Bewegung gänzlich verlohren, das ist, bis $v = 0$. Wenn dahero die Tiefe des Lochs, welches die Kugel durch ihre Bewegung in dem Wall zu verursachen vermögend ist, gesetzt wird $= a$, so bekommt man diese Vergleichung

$$b = \frac{3af}{2nc} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2ncb}{3f}.$$

Diese Tiefe ist also wie das Gewicht der Kugel und das Quadrat ihrer Ge-

schwindigkeit mit einander multipliciret, und durch das Quadrat des Diameters der Kugel nebst der Festigkeit des Walls dividirt. Wenn also gleiche Kugeln in eben denselben Wall geschossen werden, so verhält sich die Tiefe der Löcher, wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeit. Da nun dieses durch die Erfahrung bestätiget worden, so folgt daraus, daß auch unsere Gründe, woraus dieser Schluß gemacht worden, richtig seyn müssen. Wir sehen aber daraus ferner, daß wenn ungleich grosse Kugeln, welche jedoch aus einerley Materie bestehen, mit gleicher Geschwindigkeit gegen eben denselben Wall geschossen werden, die Tiefe der Löcher dem Diameter der Kugel proportional seyn müsse. Also daß grössere Kugeln unter einerley Umständen in dem Wall nicht nur grössere Oefnungen machen, sondern auch tiefer hineindringen werden. Wenn aber hinwiederum aus der Erfahrung die Tiefe, auf welche eine gegebene Kugel mit einer bekannten Geschwindigkeit in einen Wall hinein gedrungen, gefunden worden, so kann man daraus die Grösse f, wodurch die Festigkeit der Materie des Walls angezeigt wird, bestimmen, und solchergestalt kann man durch die Erfahrung die Festigkeit aller verschiedenen Materien, woraus die Wälle immer bestehen mögen, untereinander vergleichen.

Der Autor hat seine Kugeln gegen einen Bloch aus Ulmenbäumen-Holtz geschossen, und dahero können wir den Werth des Buchstabens f für Ulmenbäumen-Holtz bestimmen. Die Kugel hielt $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, dahero war $c = 0{,}0625$ Engl. Schuh, und da die Kugel von Bley gewesen, so war $n = 11{,}35$. Hernach hatte die Kugel eine Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde, dahero wird $b = 44900$ Engl. Schuh, und endlich drung die Kugel 5 Zoll tief, das ist 0,4166 Schuh, in das Holz hinein. Hieraus findet man aus der Aequation

$$f = \frac{2ncb}{3a}$$

diesen Werth:

$$f = \frac{22{,}7 \cdot 0{,}0625 \cdot 44900}{1{,}25} = 50960.$$

Dieses ist also der Werth des Buchstabens f für Ulmenbäumen-Holz, aus welchem man in allen Fällen, wie tief eine jede Kugel hinein zu dringen vermögend ist, bestimmen kann. Damit man aber die Festigkeit dieses Holzes mit der Festigkeit eines erdenen Walls vergleichen könne, so wollen wir setzen, daß eine halbe Carthaunen-Kugel mit voller Ladung in einen solchen Wall 15 Schuh tief hinein dringe. Weil diese Kugel von Eisen, so ist $n = 7{,}82$, und der Diameter der Kugel ist $c = 0{,}46$ engl. Schuh. Die Geschwindigkeit

dieser Kugel, womit dieselbe den Wall erreichet, mag ungefehr 1300 Schuh in einer Secunde austragen, und da wird $b = 27040$[1]. Weil nun $a = 15$ Schuh, so wird $f = 4323$[2]. Folglich verhält sich die Festigkeit des Ulmenbäumen-Holzes zur Festigkeit eines erdenen Walls ungefehr wie 11,8[3] zu 1. Und auf diese Art könnte man die Festigkeit aller andern Materien mit einander vergleichen, wenn darüber solche Versuche angestellet würden.

1) Im Original 27800. 2) Im Original 4441. 3) Im Original 11.

Unter der Voraussetzung, daß die obigen Angaben, betreffend die Geschwindigkeit und Eindringungstiefe des Geschosses einer halben Carthaune, sich auf rheinländisches Maß beziehen, berichtigt von F. R. S.

II

BALLISTISCHE ABHANDLUNGEN

RECHERCHES SUR LA VERITABLE COURBE QUE DECRIVENT LES CORPS JETTES DANS L'AIR OU DANS UN AUTRE FLUIDE QUELCONQUE

Commentatio 217 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [9] (1753), 1755, p. 321—352

1. Après la découverte de GALILÉE, que les corps jettés obliquement dans un espace vuide décrivent toujours une parabole, on s'est bien apperçu, qu'on n'en sauroit faire l'application pour déterminer le mouvement d'une bombe, ou d'un boulet de canon. Car, puisque la vitesse, dont ces corps traversent l'air, est si rapide, la résistance de l'air devient si grande par rapport à la pesanteur, que son effet détourne très considérablement ces corps d'une route parabolique; de sorte que les calculs fondés sur la nature de la parabole ne sont plus d'aucun usage dans ces occasions. C'est dequoi il ne faut pas être surpris, puisque GALILÉE dans sa recherche n'a tenu compte d'autres forces qui agissent sur les corps, que de la seule force de gravité, n'ayant fait aucune attention à la résistance que les corps éprouvent de la part de l'air.

2. Il y a donc en effet deux forces, à l'action desquelles un corps qui se meut dans un fluide, est assujetti. L'une est la force de gravité, ou la pesanteur du corps, sur laquelle il faut pourtant remarquer, qu'elle est moindre que la pesanteur naturelle du corps, étant diminuée du poids d'un égal volume du fluide, dans lequel le mouvement se fait. L'autre force est celle de la résistance, qu'on sait être proportionelle aux quarrés de la vitesse du corps; et quand le corps est un globe, comme on le suppose ordinairement, la direction de cette force est diamétralement opposée à celle du mouvement du corps. Cette force change donc continuellement tant de quantité que de

direction, au lieu que la premiere demeure toujours la même. Il s'agit donc de déterminer la courbe, qu'un corps jetté obliquement doit décrire, étant sollicité par ces deux forces, dont je viens de parler.

3. Quoique cette question se réduise aisément à un problème purement analytique, le grand Newton y a inutilement travaillé malgré des recherches très ingénieuses pour arriver à sa solution. Il étoit même le premier qui l'eût entreprise; et ayant si bien réussi dans la supposition, que la résistance soit proportionnelle à la vitesse même, il est presque inconcevable, qu'il ne soit pas venu à bout, lorsque la résistance est supposée proportionelle aux quarrés de la vitesse, après avoir résolu quantité de questions incomparablement plus difficiles. C'est donc feu M. Jean Bernoulli[1]), qui a donné le premier la solution de ce problème, d'où il a même tiré une construction de la courbe par le moyen des quadratures de quelques courbes transcendantes, dont la description n'est cependant pas fort difficile.

4. Voilà donc ce grand problème résolu, et même très bien résolu, il y a longtems. Cependant la solution, quelque bonne qu'elle soit dans la théorie, est pourtant telle, qu'on n'en a pû tirer jusqu'ici le moindre secours pour la pratique, et pour en corriger la fausse théorie fondée sur la parabole, à laquelle les Artilleristes sont encore obligés de s'en tenir, quoiqu'ils n'en connoissent que trop l'insuffisance. Ainsi il est certain que cette solution n'a apporté aucun avantage réel à l'avancement de l'Artillerie, et il semble qu'elle n'a servi qu'à mieux asseurer les gens du mêtier de la fausseté de leurs principes tirés de la nature de la parabole, auxquels ils ne laissent pas d'être réduits encore. C'est bien quelque chose que de savoir, que les règles ordinaires trompent; mais à moins qu'on ne sache assés précisément, de combien elles trompent en chaque cas, l'avantage sa réduit à fort peu de chose.

5. Il semble aussi d'abord, que ce seroit un ouvrage sans fin que d'entreprendre d'établir de nouvelles règles pour le jet des bombes et des boulets de canon, qui soient conformes à la véritable courbe que ces corps décrivent

1) Joh. Bernoulli, *Responsio ad nonneminis provocationem, eiusque solutio quaestionis ipsi ab eodem propositae de invenienda linea curva, quam describit projectile in medio resistente*, Acta erud. 1721, p. 216; *Opera omnia*, Lausannae et Genevae 1742, t. II, p. 393—402. F. R. S.

dans l'air. Car comme l'hypothèse de GALILÉE ne demande que l'élévation du mortier avec la vitesse dont la bombe en sort, il n'a pas été difficile de calculer des Tables, qui marquent pour tous les cas possibles, tant la hauteur à laquelle la bombe arrive, que le point où elle doit retomber en terre. Mais, si l'on vouloit faire de semblables Tables, qui soient d'accord avec la vérité, il faudroit outre les deux élémens mentionnés encore avoir égard, tant au diamètre de la bombe ou boulet, qu'à son poids; et partant on seroit dans la nécessité de calculer de telles tables pour chaque diamètre, et tous les poids qui lui pourroient convenir: ce qui rendroit sans doute impraticable l'exécution d'un tel ouvrage.

6. Cependant ayant bien pesé toutes ces difficultés, je ne les trouve pas tout à fait insurmontables; car j'ai remarqué qu'une infinité de cas, qui semblent différens, peuvent être compris dans une même Table; et quoique, ce nonobstant, le nombre des cas ne laisse pas d'être encore infini, comme ils tiennent un certain ordre entr'eux, il suffira d'en calculer un certain nombre, pour en pouvoir tirer ensuite tous les autres par la voye d'interpolation. Tout l'ouvrage sera donc réduit à un certain nombre de Tables calculées, et à une instruction, qui en enseigne l'usage; et cela sera suffisant pour calculer tous les cas qui se peuvent présenter dans l'Artillerie, et on sera en état de les expédier presque aussi promtement, que dans l'hypothèse vulgaire de GALILÉE.

7. Pour mieux expliquer mes idées, je commencerai par tirer la solution de cette question des premiers principes de la Mécanique. D'abord donc je considère le vrai poids du globe dont il s'agit de déterminer le mouvement; et posant ce poids $= P$, soit Π le poids d'un volume égal de l'air, ou du fluide, dans lequel le mouvement se fait; cela posé, on sait que le poids de ce globe dans le fluide sera $= P - \Pi$; ce qui étant la force qui sollicite le globe actuellement en bas, la force accélératrice de la gravité, qui agit sur ce globe, sera

$$= \frac{P - \Pi}{P} = 1 - \frac{\Pi}{P}.$$

Cette force accélératrice se trouvera donc en retranchant de l'unité la fraction $\frac{\Pi}{P}$, qui marque le rapport de la gravité spécifique du fluide à celle du globe. Donc, lorsque le mouvement se fait dans l'air, à moins que le globe

ne soit d'une matiere extrèmement legere, on voit bien, qu'on pourra supposer sans erreur cette force accélératrice $= 1$; cependant pour rendre mes recherches générales, j'exprimerai par α dans la suite cette force accélératrice de la gravité, de sorte que

$$\alpha = 1 - \frac{\Pi}{P}.$$

8. Pour découvrir la résistance de ce globe, soit d son diamètre, et v la hauteur d'où un corps grave dans le vuide acquiert en tombant la même vitesse, dont nous supposons, que le globe se meut dans le fluide. Posant donc le rapport du diamètre à la circonference $= 1 : \pi$, l'aire du plus grand cercle de ce globe sera $= \frac{1}{4}\pi dd$; donc sa surface $= \pi dd$, et la solidité du globe même $= \frac{1}{6}\pi d^3$, qui exprimera donc le volume d'une masse du fluide, dont le poids est $= \Pi$; ainsi que nous venons de supposer. Ensuite, si un plan égal au grand cercle $\frac{1}{4}\pi dd$ se mouvoit directement dans le fluide avec la vitesse du globe, on sait que la résistance seroit égale au poids d'un cylindre du fluide, dont la base seroit $= \frac{1}{4}\pi dd$, et la hauteur $= v$, et la solidité par conséquent $= \frac{1}{4}\pi ddv$. Or on sait aussi que la résistance du globe ne vaut que la moitié de celle du grand cercle; donc la résistance du globe sera égale au poids d'une masse du fluide, dont le volume

$$= \frac{1}{8}\pi ddv.$$

9. Or le poids d'un volume de ce fluide $\frac{1}{6}\pi d^3$ étant $= \Pi$, le poids du volume que nous venons de trouver $\frac{1}{8}\pi ddv$ sera $= \frac{3v}{4d}\Pi$; qui exprime la force de la résistance, et si nous la divisons par la masse, ou le poids du globe P, nous aurons la force retardatrice, qui resulte de la résistance,

$$= \frac{3v}{4d} \cdot \frac{\Pi}{P};$$

et dont la direction est contraire au mouvement du globe. Or, puisque tant le diamètre du globe d, que le rapport de sa gravité spécifique à celle du fluide, ou P à Π, est supposé être connu, je poserai pour abréger

$$\frac{4d}{3} \cdot \frac{P}{\Pi} = c,$$

pour avoir la force retardatrice de la résistance $=\frac{v}{c}$. Or l'on voit que pour l'air, la valeur de la fraction $\frac{P}{\Pi}$ sera toujours un nombre très grand; car si le globe n'étoit pas plus pesant qu'un égal volume d'eau, il y auroit $\frac{P}{\Pi}=850$ ou environ.

10. Le rapport de la gravité spécifique du globe et du fluide se trouve le plus aisément par le moyen de l'eau; car sachant le poids P du globe, on aura d'abord le volume d'une masse d'eau, dont le poids est aussi $=P$, puisqu'on connoit le poids d'un pied cubique d'eau. Soit donc e^3 le volume de cette masse d'eau dont le poids $=P$, et que la gravité spécifique de l'eau soit à celle du fluide, dans lequel se fait le mouvement, comme 1 à μ, et $\frac{1}{\mu}e^3$ sera le volume de ce fluide, dont le poids est $=P$. Or Π marque le poids d'une masse du même fluide, dont le volume est $=\frac{1}{6}\pi d^3$, d'où nous tirons

$$P:\Pi=\frac{1}{\mu}e^3:\frac{1}{6}\pi d^3,$$

ou

$$\frac{P}{\Pi}=\frac{6e^3}{\mu\pi d^3};$$

donc nous aurons

$$c=\frac{8e^3}{\mu\pi dd}.$$

Et partant si le mouvement se faisoit dans l'eau, à cause de $\mu=1$, on auroit

$$c=\frac{8e^3}{\pi dd};$$

or, lorsque le mouvement se fait dans l'air, on aura à peu près

$$c=\frac{6666e^3}{\pi dd},$$

ou

$$c=\frac{2133e^3}{dd}.$$

11. Cette formule aura lieu, lorsque le mouvement du globe n'est pas trop vite, pour que l'air puisse aussitôt librement remplir l'espace, que le globe vient de quitter. Mais si le mouvement est si rapide, que l'air ne

sauroit occuper dans le même instant l'espace, que le globe laisse après soi, de sorte que cet espace demeure vuide, du moins pour un instant, alors le globe soutenant sur sa partie d'avant toute la pression de l'atmosphère, qui n'étant pas contrebalancée par une pression égale de derrière, il est clair que la résistance sera augmentée de toute la pression de l'atmosphère sur la partie antérieure du globe. Donc, posant k pour la hauteur d'une colonne d'eau, qui est en équilibre avec l'atmosphère, cette pression sera égale au poids d'une masse d'eau, dont le volume $=\frac{1}{4}\pi ddk$, et partant au poids d'une masse d'air dont le volume $=213\pi ddk=669\,ddk$ à peu près.

12. La résistance entiere du globe dans l'air sera donc dans ce cas égale au poids d'une masse d'air, dont le volume

$$=\frac{1}{8}\pi ddv+213\pi ddk.$$

Donc le poids du globe étant égal au poids d'un volume d'air $=850e^3$, la force retardatrice de la résistance sera

$$=\frac{\pi ddv}{6666e^3}+\frac{\pi ddk}{4e^3}.$$

Or nous venons de poser

$$c=\frac{6666e^3}{\pi dd},$$

ou bien

$$\pi dd=\frac{6666e^3}{c};$$

donc la force retardatrice de la résistance sera

$$=\frac{v}{c}+\frac{6666k}{4c}=\frac{v+1666k}{c}.$$

13. Cette force aura donc lieu, lorsque la vitesse du globe est plus grande que celle dont l'air en vertu de son ressort entreroit dans un espace vuide. Or le ressort étant égal au poids d'une colonne de même air, dont la hauteur $=850k$, la vitesse dont l'air entrera dans un espace vuide sera duë à la hauteur $850k$; donc, toutes les fois que $v>850k$, la force retardatrice de la résistance de l'air sera

$$=\frac{v+1666k}{c}.$$

Or pour l'état ordinaire de l'air, on sait qu'il est environ $k = 33$ pieds; de sorte que ce cas aura lieu, lorsque $v > 28050$ pieds, ou que le globe parcourt dans une seconde un espace plus grand que de 1325 pieds.

14. De là on comprend aisément, que quand même v sera plus petit que $850k$, la force retardatrice de la résistance ne sera pas subitement réduite à $\frac{v}{c}$; et que la pression de l'atmosphère sera toujours plus petite sur la partie de derrière du globe que sur celle d'avant: d'où résultera une augmentation de la résistance. Ainsi s'il étoit $v = \frac{1}{2} \cdot 850k$, la force retardatrice de la résistance sera

$$= \frac{v + \frac{1}{2} \cdot 1666k}{c};$$

et en général lorsque $v = \frac{1}{n} \cdot 850k$, cette force deviendra à peu près

$$= \frac{v + \frac{1}{n} \cdot 1666k}{c},$$

ou bien

$$= \frac{3v}{c}.$$

Cependant il s'en faut bien, que cette détermination soit assés exacte, vu qu'elle dépend de la pression de l'atmosphère sur le derrière du globe. Or il faut aussi remarquer que cette recherche n'est pas susceptible d'une entiere rigueur de Geometrie, et qu'il faut se contenter d'une approximation convenable.

15. Par cette raison nous ne nous tromperons gueres, quand nous supposerons la force retardatrice de la résistance $= \frac{3v}{c}$, quoiqu'elle devienne fausse, lorsque $v > 850k$. Car, puisque cela ne sauroit arriver que dans les mouvemens les plus rapides, et que ceux-ci sont bientôt réduits à une valeur de v au dessous de $850k$, l'erreur qui en résulte ne sera pas considérable. Donc, au lieu de $c = \frac{6666e^3}{\pi dd}$, si nous supposons $c = \frac{2222e^3}{\pi dd}$, ou bien $c = 707 \cdot \frac{e^3}{dd}$, la force retardatrice de la résistance sera $= \frac{v}{c}$; et nous nous servirons de cette formule à l'avenir pour la commodité du calcul, où il faut se souvenir, que d marque le diamètre du globe, et e^3 le volume d'eau dont le poids est égal à celui du globe.

16. Donc, pour déterminer le mouvement d'un globe lancé dans l'air, il faut commencer par mesurer exactement tant son diamètre d que son poids, auquel on cherchera un volume d'eau également pesant, qui soit $= e^3$; et alors on en tirera la valeur de $c = 707 \cdot \frac{e^3}{dd}$, sur laquelle le calcul doit être fondé. D'où l'on voit déjà que le calcul sera le même pour tous les globes dont le poids aura au quarré de leur diamètre le même rapport. Cependant on ne sauroit nier, que le nombre 707 n'est pas trop bien constaté, et qu'il est même variable à cause de la diverse température de l'air. Mais ce sera une affaire à laquelle il faut avoir égard dans l'application du calcul aux expériences; et dans le calcul même on regardera la quantité c comme connue, sans se soucier, comment elle dépend de la grandeur et du poids du globe. Quand on passe ensuite à la pratique, on cherchera par quelque expérience, quelle valeur doit être donnée à la quantité c pour chaque globe proposé et pour chaque état de l'air.

17. Soit donc $CNAMH$ (Fig. 1) la courbe décrite par un globe dans un fluide quelconque, que α marque la force accélératrice de la gravité, et que c soit la quantité mentionnée, d'où dépend la résistance. Soit A le point le plus haut de cette courbe, et la horizontale BAE la tangente à ce point; CNA sera donc la partie de cette courbe, par laquelle le globe est monté, et AMH celle, par laquelle il descend. Considérons séparément le mouvement de la montée et de la descente, et soit pour celle-cy une abscisse quelconque prise sur la horizontale $AP = x$, l'appliquée verticale qui y répond $PM = y$; et que v soit la hauteur duë à la vitesse du globe en M; de sorte que la force retardatrice de la résistance y sera $= \frac{v}{c}$.

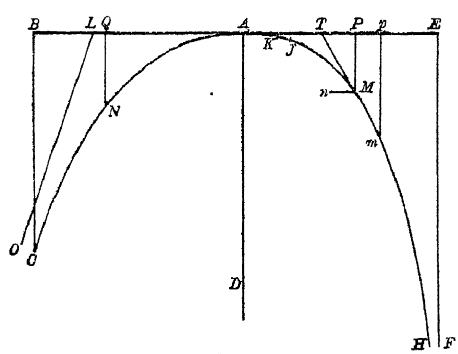


Fig. 1.

18. Décomposant le mouvement du corps selon les directions horizontale AP et la verticale PM, celui-cy sera premièrement accéléré par la force accélératrice de la gravité $= \alpha$. Ensuite la force retardatrice de la résistance $\frac{v}{c}$ agissant selon la direction de la tangente MT, si nous posons l'élément

de la courbe $Mm = ds$, il en résultera une force qui s'oppose au mouvement horizontal,

$$= \frac{v\,dx}{c\,ds},$$

et une qui s'oppose au mouvement vertical,

$$= \frac{v\,dy}{c\,ds}.$$

Donc si nous posons l'élément du tems $= dt$, de sorte que $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$, et que nous prenions cet élément dt pour constant, les principes mécaniques de l'accélération nous fourniront ces deux égalités:

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\frac{v\,dx}{c\,ds}$$

et

$$\frac{2\,ddy}{dt^2} = \alpha - \frac{v\,dy}{c\,ds}.$$

19. Puisque $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$, nous aurons $v = \frac{ds^2}{dt^2}$, d'où nos deux équations deviendront

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\frac{dx\,ds}{c\,dt^2}$$

et

$$\frac{2\,ddy}{dt^2} = \alpha - \frac{dy\,ds}{c\,dt^2}.$$

Supposons de plus

$$dy = p\,dx,$$

de sorte que p exprime la tangente de l'angle PTM, ou de l'inclinaison du mouvement du corps à l'horizon, et à cause de

$$ds = dx\sqrt{(1+pp)}$$

et de

$$ddy = p\,ddx + dx\,dp,$$

nous aurons ces deux équations:

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\frac{dx^2\sqrt{(1+pp)}}{c\,dt^2}$$

et

$$\frac{2\,p\,ddx}{dt^2} + \frac{2\,dx\,dp}{dt^2} = \alpha - \frac{p\,dx^2\sqrt{(1+pp)}}{c\,dt^2},$$

et si nous retranchons de celle-cy la premiere multipliée par p, il restera

$$\frac{2\,dx\,dp}{dt^2} = \alpha,$$

ou bien

$$\alpha\,dt^2 = 2\,dx\,dp;$$

or la premiere donne

$$-\frac{2\,ddx}{dx^2} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{c}.$$

Enfin on aura

$$v = \frac{dx^2(1+pp)}{dt^2} = \frac{\alpha\,dx(1+pp)}{2\,dp}.$$

20. Parce que $2\,dp = \frac{\alpha\,dt^2}{dx}$, l'autre équation

$$-\frac{2\,ddx}{dx^2} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{c}$$

multipliée par dp se réduira à celle-cy

$$-\frac{2\,\alpha\,dt^2\,ddx}{dx^3} = \frac{2\,dp\sqrt{(1+pp)}}{c},$$

dont l'intégrale à cause de l'élément dt constant est

$$\frac{\alpha\,dt^2}{dx^2} = \frac{2\,dp}{dx} = 2\,C + \frac{2}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)},$$

d'où nous tirons

$$dx = \frac{dp}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}$$

et

$$dy = \frac{p\,dp}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}},$$

donc

$$ds = dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{C+\frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}.$$

Ensuite à cause de $\alpha dt^2 = 2dxdp$, nous obtiendrons

$$\frac{1}{2}\alpha dt^2 = \frac{dp^2}{C+\frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}$$

et

$$dt\sqrt{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{dp}{\sqrt{\left(C+\frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}\right)}},$$

et enfin pour la vitesse du corps nous aurons:

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha(1+pp)}{C+\frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}.$$

21. Pour la formule intégrale $\int dp\sqrt{(1+pp)}$, qui entre dans ces expressions, il est évident qu'elle exprime un arc parabolique; ou bien on le pourra assigner par les logarithmes, puisque

$$\int dp\sqrt{(1+pp)} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \tfrac{1}{2}\,l(p+\sqrt{(1+pp)});$$

prenant l'intégrale en sorte qu'elle évanouisse au cas de $p=0$, ce qui arrive au sommet A de la courbe, où la tangente est horizontale. Ainsi regardant l'inclinaison du mouvement du corps à l'horizon, dont la tangente est $=p$, comme connuë, pour l'endroit M, où cela arrive, nous pourrons déterminer l'abscisse $AP=x$, l'appliquée $PM=y$, l'arc $AM=s$, la hauteur duë à la vitesse en M, et enfin le tems, que le corps a mis à parcourir l'arc AM.

22. Posons pour la constante C, qui a été introduite par l'intégration, cette fraction $\frac{n}{c}$, et il est clair que n désignera un nombre absolu. Ensuite mettons pour abréger

$$\int dp\sqrt{(1+pp)} = P,$$

vu que pour chaque valeur de p on peut aisément trouver celle de P; et pour la branche AMH, par laquelle le corps descend, nous aurons les formules suivantes:

$$x = c\int\frac{dp}{n+P},\quad y = c\int\frac{pdp}{n+P},\quad s = c\int\frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{n+P},$$

$$dt\sqrt{\frac{1}{2}}\,\alpha = \frac{dp\sqrt{c}}{\sqrt{(n+P)}}\quad\text{ou}\quad t = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dp}{\sqrt{(n+P)}}$$

et

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P}.$$

Ces intégrales doivent être prises en sorte, qu'elles évanouissent dans le cas $p=0$; d'où l'on voit que la hauteur duë à la vitesse en A sera

$$= \frac{\alpha c}{2n}.$$

23. Ces mêmes formules servent aussi à exprimer la nature de l'autre branche ANC, que le corps aura décrite en montant; car on n'a qu'à prendre négative la valeur de P. Ainsi, si la direction du mouvement en N fait avec l'horizon un angle dont la tangente $=p$, on aura

$$AQ = c\int\frac{dp}{n-P},\quad QN = c\int\frac{pdp}{n-P}\quad\text{et}\quad AN = c\int\frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{n-P},$$

le tems par l'arc AN

$$= \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dp}{\sqrt{(n-P)}},$$

la hauteur duë à la vitesse en N

$$= \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n-P}.$$

D'où l'on voit que dans la branche ascendante ANC l'inclinaison de ses tangentes à l'horizon ne sauroit nulle part devenir si grande, qu'il fût $P > n$; et là où $P = n$, la vitesse du corps est infinie.

24. Le mouvement du corps, et la courbe qu'il décrit, $CNAMH$ dépend donc de trois constantes α, c et n, dont il faut savoir les valeurs pour chaque cas proposé. La premiere α est déterminée par la gravité specifique du fluide à l'égard de celle du globe; et comme elle n'entre pas dans les formules qui déterminent la nature de la courbe, on la connoitra indépendamment de α; ce n'est que le tems et la vitesse qui en dépendent. La quantité c est déterminée par le diamètre et le poids du globe, et comme elle ne fait que multiplier les formules trouvées, elle ne cause aucun embarras dans le calcul. Or la troisième quantité n, qui dépend de la vitesse imprimée au corps, affecte tellement nos formules, qu'on est obligé d'en calculer les valeurs à part pour toutes les différentes valeurs de n.

25. Pour déveloper mieux la nature de cette courbe, il sera bon d'avoir aussi égard au rayon de sa dévelopée, qui mesure sa courbure dans chacun de ses points. Or on sait que, posant $dy = p\,dx$, le rayon de courbure est

$$= \frac{dx(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{dp}.$$

Donc, puisque $\frac{dx}{dp} = \frac{c}{n+P}$ pour la branche descendante, le rayon de courbure en M sera

$$= \frac{c(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{n+P}.$$

Or pour la branche ascendante en N, où est aussi $dy = p\,dx$, le rayon de courbure sera

$$= \frac{c(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{n-P}.$$

Ainsi là où $P = n$, et la vitesse du corps est infinie, le rayon de courbure devient aussi infiniment grand; et l'on voit que dans les deux branches, où leurs tangentes sont également inclinées à l'horizon, le rayon de courbure, de même que les autres quantités, x, y, s, t et v, sont plus grandes dans la branche ascendante que dans la descendante.

26. Donc dans un milieu résistant, les deux branches de la courbe décrite par un corps, sont dissemblables, en sorte que la branche descendante est plus courbée que l'ascendante, et le mouvement par celle-cy plus rapide

que par celle-là. Or dans le vuide les deux branches sont, comme on sait, égales et semblables, et le mouvement aussi le même: ce que nos formules déclarent aussi évidemment; car pour le vuide la quantité c devient infinie, de même que le nombre n, puisque $\frac{\alpha c}{2n}$ marque la hauteur duë à la vitesse en A. Donc P évanouit par rapport à n, et puisque $\alpha = 1$, si nous posons

$$\frac{c}{2n} = b,$$

nous aurons pour le vuide:

$$x = 2bp, \quad y = bpp, \quad s = 2b\int dp\sqrt{(1+pp)},$$
$$t = 2bp \quad \text{et} \quad v = b(1+pp),$$

et le rayon de courbure

$$= 2b(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

d'où il est évident, que la courbe est une parabole, et le mouvement tel, qu'il est connu.

27. C'est donc de la quantité $P = \int dp\sqrt{(1+pp)}$, que résulte la différence entre les trajectoires dans le vuide et dans un fluide; et l'on voit que cette différence sera d'autant plus grande, plus sera grande la quantité P par rapport au nombre n. Or la quantité P évanouit au sommet A; et de là de part et d'autre elle croit avec l'angle MTP, que la tangente de la courbe fait avec l'horizon; en sorte que lorsque cet angle devient droit, la quantité P sera même infinie. Par conséquent quelque petite que soit la résistance, la courbe $CNAMH$ s'écarte enfin à l'infini de la parabole; puisqu'en continuant ses branches il doit arriver nécessairement, que la quantité P devienne enfin égale au nombre n, quelque grand qu'il soit, et qu'elle le surpasse même infiniment.

28. Mais, lorsqu'on veut seulement connoitre une telle partie de la courbe comme NAM, que l'inclinaison des tangentes à ses extrémités M et N soit si petite, que la quantité P qui en résulte, soit fort petite par rapport au nombre n, alors on pourra trouver des approximations assés commodes pour décrire cette portion de la courbe. Car, puisque P est fort petite par rapport à n, on aura

$$\frac{1}{n+P}=\frac{1}{n}-\frac{P}{nn} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n-P}=\frac{1}{n}+\frac{P}{nn};$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{(n+P)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{P}{2n\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{(n-P)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{P}{2n\sqrt{n}}.$$

Donc pour la branche descendante AM nous aurons

$$AP=x=\frac{c}{n}\left(p-\frac{1}{n}\int Pdp\right)=\frac{c}{n}\left(p-\frac{1}{n}Pp+\frac{1}{3n}\left((1+pp)^{\frac{3}{2}}-1\right)\right),$$

$$PM=y=\frac{c}{n}\left(\frac{1}{2}pp-\frac{1}{n}\int Ppdp\right)=\frac{c}{n}\left(\frac{1}{2}pp-\frac{1}{2n}Ppp-\frac{1}{8n}P+\frac{1}{8n}p(1+pp)^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$AM=s=\frac{c}{n}\left(P-\frac{1}{n}\int Pdp\sqrt{(1+pp)}\right)=\frac{c}{n}\left(P-\frac{1}{2n}PP\right),$$

le tems par AM

$$t=\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha n}}\left(p-\frac{1}{2n}Pp+\frac{1}{6n}\left((1+pp)^{\frac{3}{2}}-1\right)\right),$$

la hauteur duë à la vitesse en M

$$v=\frac{\alpha c(1+pp)}{2n}\left(1-\frac{P}{n}\right).$$

Et prenant p et P négatifs ces mêmes expressions serviront pour la branche ascendante AN.

29. Or ces approximations n'auront lieu, que tandis que la quantité P demeure extrèmement petite par rapport au nombre n. Donc, plus le nombre n sera grand, plus sera aussi grande la portion de la courbe MAN, qu'on connoitra au juste par le moyen de ces formules. Mais, dès qu'on en veut connoitre une plus grande portion, ces approximations ne sont plus d'aucun usage; et alors, puisqu'il n'y a pas moyen d'intégrer les formules trouvées pour x, y et le tems t, on sera réduit à en chercher la valeur par la voye des quadratures. Or, avant que d'entreprendre cet ouvrage, il sera bon de remarquer quelques phénomènes, que nous découvre la considération de cette courbe.

30. Et d'abord je remarque, que l'arc de la courbe $AM = s$ se peut exprimer par un logarithme; car, puisque $dp\sqrt{(1+pp)} = dP$, on aura

$$s = c\int \frac{dP}{n+P}$$

et partant

$$s = cl\frac{n+P}{n},$$

puisque en A, où $s=0$, il est $P=0$; et cette formule est déjà fort commode pour décrire la courbe; car calculant pour un grand nombre de valeurs de p celle de s, on trouvera autant de portions de la courbe, et sachant de chacune l'inclinaison à l'horizon, on en tirera aisément les portions de l'abscisse et de l'appliquée, qui leur conviennent; lesquelles étant ajoutées ensemble donneront tant l'abscisse que l'appliquée entiere, qui répondent à chaque point de la courbe. Ensuite, ayant la vitesse à chaque point de la courbe par la formule

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P},$$

chaque particule de la courbe divisée par $\sqrt{v}$ donnera le tems, que le corps met à la parcourir; et pourvu qu'on prenne les particules de la courbe assés petites, on obtiendra assés exactement tant la figure de la courbe, que le mouvement du corps.

31. Puisque pour la branche descendante nous venons de trouver

$$s = cl\frac{n+P}{n},$$

nous voyons que cette courbe approche de plus en plus de la direction verticale, qu'elle n'atteint pourtant qu'à l'infini. Car l'arc s ne devient infini, que lorsque P est infini, ce qui arrive, quand p est pris infini, ou que la tangente de la courbe devient verticale. Or pour la branche ascendante ANC, nous aurons l'arc AN

$$= -cl\frac{n-P}{n} = cl\frac{n}{n-P};$$

donc cet arc sera infini, lorsque $P = n$; de là on obtiendra une certaine valeur pour p, d'où l'on connoitra l'inclinaison de la tangente de cette courbe à l'infini, qui sera son asymtote.

32 Ayant pour la branche ascendante

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n-P}$$

nous voyons qu'à l'infini, où $P=n$, la vitesse du corps est infinie, et qu'en montant jusqu'en A elle devient continuellement plus petite; car en diminuant p, le numérateur $\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)$ en devient plus petit, et le dénominateur $n-P$ plus grand; l'un et l'autre contribuant à diminuer la vitesse. Or pour la branche descendante ayant

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P},$$

on aura pour le sommet A

$$v = \frac{\alpha c}{2n};$$

or de là il ne s'ensuit pas, que plus le corps descend, plus aussi son mouvement sera accéléré; mais plutôt après que le corps aura passé par le sommet A, son mouvement ne laissera pas de souffrir encore quelque diminution, jusqu'à ce qu'il parvienne à un certain point J, où sa vitesse sera la plus petite.

33. Ce point J, où le corps aura la moindre vitesse, se trouvera donc en supposant le differentiel de $\frac{1+pp}{n+P}$ égal à zéro; d'où l'on aura

$$2p(n+P) = (1+pp)V(1+pp).$$

Or ayant

$$P = \tfrac{1}{2}pV(1+pp) + \tfrac{1}{2}l(p+V(1+pp)),$$

nous aurons

$$2np + pl(p+V(1+pp)) = V(1+pp).$$

Comme cela arrive ordinairement fort près du point A, la valeur de p sera fort petite, et partant à peu près

$$P = p + \tfrac{1}{6}p^3 \quad \text{et} \quad (1+pp)V(1+pp) = 1 + \tfrac{3}{2}pp + \tfrac{3}{8}p^4$$

donc

$$2np + 2pp + \tfrac{1}{3}p^4 = 1 + \tfrac{3}{2}pp + \tfrac{3}{8}p^4,$$

ou

$$2np = 1 - \tfrac{1}{2}pp + \tfrac{1}{24}p^4,$$

d'où, à moins que le nombre n ne soit très petit, on tirera

$$p = \frac{1}{2n} - \frac{1}{16n^3}$$

pour le point J; et partant la hauteur duë à la plus petite vitesse en J sera à peu près

$$v = \frac{\alpha c}{2n}\left(\frac{4nn+1}{4nn+2}\right),$$

ou

$$v = \frac{\alpha c}{2n}\left(1 - \frac{1}{4nn}\right).$$

34. Depuis ce point J le mouvement du corps sera de nouveau accéléré; mais quoique l'accélération continuë à l'infini, la vitesse ne surpassera jamais une certaine limite; car à l'infini de cette courbe où $p = \infty$, on aura

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c pp}{P},$$

puisque n evanouit par rapport à P, dont la valeur sera aussi infinie. Mais à cause de $p = \infty$, le nombre $l(p + \sqrt{(1+pp)})$, quoiqu'infini, évanouit par rapport à $p\sqrt{(1+pp)}$, de sorte que dans ce cas

$$P = \tfrac{1}{2}pp,$$

et partant

$$v = \alpha c;$$

qui sera donc la hauteur duë à la vitesse, de laquelle le corps en descendant par l'arc JMH approche de plus en plus, et qu'il n'atteint qu'à l'infini.

35. Il est aussi à remarquer, que le rayon de courbure en M étant

$$= \frac{c(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{n+P},$$

la plus grande courbure ne se trouvera pas au sommet même A, mais à un autre point K dans l'arc descendant, qu'on trouvera par la résolution de cette équation

$$3p(n+P)=(1+pp)\sqrt{(1+pp)}$$

ou bien

$$3np+\tfrac{1}{2}pp\sqrt{(1+pp)}+\tfrac{3}{2}pl(p+\sqrt{(1+pp)})=\sqrt{(1+pp)}.$$

Donc, à moins que le nombre n ne soit très petit, il y aura à peu près $p=\frac{1}{3n}$; d'où l'on voit que ce point K sera plus près du sommet A, que le point J, où la vitesse du corps est la plus petite.

36. Mais pour la nature de la branche descendante AMH, c'est encore une question bien importante, si elle a une asymtote verticale comme EF, ou non? c'est à dire, si en faisant $p=\infty$ l'abscisse x devient infinie, ou si elle obtient une valeur finie comme AE, qui donneroit par conséquent l'asymtote EF. Il s'agit donc de chercher la valeur de la formule intégrale $\int\frac{dp}{n+P}$ au cas de $p=\infty$; car pour la valeur de l'appliquée $c\int\frac{p\,dp}{n+P}$, il n'y a aucun doute, qu'elle ne devienne infinie en posant $p=\infty$. Mais aucune des méthodes, qui seroient assés propres pour nous marquer ces valeurs, tandis que P est plus petit que n, ne sauroit être employée ici avec succès.

37. Je crois donc, que le plus seur moyen sera de recourir à des limites, en donnant à P successivement deux telles valeurs, dont l'une seroit trop grande et l'autre trop petite; en sorte qu'on puisse pour l'un et l'autre cas exprimer l'intégrale $\int\frac{dp}{n+P}$. Or il est évident que $\int dp\sqrt{(1+pp)}$, ou P, est toujours plus petit que $p\sqrt{(1+pp)}$; et certainement plus grand que p ou $p\sqrt{(1+0pp)}$. Posons donc pour avoir des limites plus proches:

$$P=\int dp\sqrt{(1+pp)}=p\sqrt{(1+\delta pp)}$$

et prenant les différentiels nous aurons

$$\sqrt{(1+pp)(1+\delta pp)}=1+2\delta pp,$$

ou bien

$$(1-3\delta)pp+\delta(1-4\delta)p^4=0,$$

d'où l'on voit, que si $\delta=\frac{1}{3}$, cette formule est <0, et si $\delta=\frac{1}{4}$, elle est >0.

Donc nous aurons ces deux limites assés approchantes

$$P < p\sqrt{(1+\tfrac{1}{3}pp)} \quad \text{et} \quad P > p\sqrt{(1+\tfrac{1}{4}pp)}.$$

38. Par là nous sommes asseurés, que dans la branche descendante il y aura toujours:

$$x > c\int\frac{dp}{n+p\sqrt{(1+\frac{1}{3}pp)}}$$

et

$$x < c\int\frac{dp}{n+p\sqrt{(1+\frac{1}{4}pp)}}.$$

Dévelopons donc ces deux limites, et pour qu'une seule opération y suffise, posons

$$x = c\int\frac{dp}{n+p\sqrt{(1+\delta pp)}},$$

et soit pour dégager l'irrationalité

$$\sqrt{(1+\delta pp)} = p\sqrt{\delta} + q,$$

et nous aurons

$$p = \frac{1-qq}{2q\sqrt{\delta}},$$

$$\sqrt{(1+\delta pp)} = \frac{1+qq}{2q},$$

et

$$p\sqrt{(1+\delta pp)} = \frac{1-q^4}{4qq\sqrt{\delta}},$$

de plus

$$dp = -\frac{dq(1+qq)}{2qq\sqrt{\delta}},$$

et partant

$$x = -2c\int\frac{dq(1+qq)}{1+4nqq\sqrt{\delta}-q^4}.$$

39. Ce dénominateur ayant deux facteurs réels, posons les $ff+qq$ et $gg-qq$; et on aura

$$ffgg = 1 \quad \text{et} \quad gg - ff = 4n\sqrt{\delta}$$

ou bien

$$ff = \frac{1}{gg} \quad \text{et} \quad 4n\sqrt{\delta} = \frac{g^4-1}{gg}.$$

De là notre expression deviendra

$$x = -2c\left(\frac{1-ff}{ff+gg}\int\frac{dq}{ff+qq} + \frac{1+gg}{ff+gg}\int\frac{dq}{gg-qq}\right)$$

et prenant les intégrales

$$x = \frac{-2c(1-ff)}{f(ff+gg)}\,\text{A. tang.}\,\frac{q}{f} - \frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)}\,l\,\frac{g+q}{g-q} + \text{Const.}$$

Or puisque $x=0$, lorsque $p=0$ et partant $q=1$, nous aurons

$$x = \frac{2c(1-ff)}{f(ff+gg)}\left(\text{A. tang.}\,\frac{1}{f} - \text{A. tang.}\,\frac{q}{f}\right) + \frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)}\,l\,\frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}$$

ou bien à cause de $f=\frac{1}{g}$

$$x = \frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}(\text{A. tang.}\,g - \text{A. tang.}\,gq) + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4}\,l\,\frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}.$$

40. Maintenant on n'a qu'à poser $q=0$, pour avoir le cas de $p=\infty$; et l'abscisse qui répond à l'arc infini AMH sera

$$AE = \frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}\,\text{A. tang.}\,g + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4}\,l\,\frac{g+1}{g-1},$$

où il faut remarquer que

$$gg = 2n\sqrt{\delta} + \sqrt{(1+4\delta nn)}.$$

Donc prenant $\delta = \frac{1}{3}$, nous aurons

$$gg = 2n\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \sqrt{\left(1+\tfrac{4}{3}nn\right)}$$

et partant l'intervalle AE sera ou plus grand ou plus petit que cette expression

$$\frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}\,\text{A. tang.}\,g + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4}\,l\,\frac{g+1}{g-1},$$

selon qu'on prenne ou

$$gg = 2n\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \sqrt{\left(1+\tfrac{4}{3}nn\right)}$$

ou

$$gg = n + \sqrt{(1+nn)}.$$

41. Lorsque n est un nombre très grand, g en sera un aussi, et A. tang. g deviendra $= \frac{\pi}{2}$, prenant π pour la mesure de deux angles droits; donc à cause de

$$l\frac{g+1}{g-1} = \frac{2}{g},$$

notre formule sera

$$\frac{\pi c}{g} + \frac{2c}{gg}.$$

Donc, ayant ou $gg = 4n\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $gg = 2n$, les limites entre lesquels l'intervalle AE est compris, seront

$$\frac{\pi c\sqrt{\sqrt{3}}}{2\sqrt{n}} + \frac{c\sqrt{3}}{2n} \quad \text{et} \quad \frac{\pi c\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} + \frac{c}{n}.$$

Mais, lorsque n est une fraction très petite, nous aurons ou

$$gg = 1 + 2n\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \text{ou} \quad gg = 1 + n;$$

donc à cause de A. tang. $1 = \frac{\pi}{4}$ les limites de l'intervalle AE seront

$$\frac{\pi nc}{2\sqrt{3}} + cl\frac{2\sqrt{3}}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\pi nc}{4} + cl\frac{4}{n}.$$

42. La courbe trajectoire donc dans un fluide aura deux asymtotes, l'une verticale, qui est convergente avec la branche descendante, et l'autre inclinée à l'horizon, pour la branche ascendante, et qui sera tellement inclinée à l'horizon, que posant la tangente de l'inclinaison $= p$, on aura $P = n$, ou

$$n = \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \tfrac{1}{2}\,l(p + \sqrt{(1+pp)}).$$

Pour le cas du vuide cette derniere asymtote devient aussi verticale, de même que la premiere, et l'une et l'autre sera infiniment éloignée du sommet A. Or pour trouver le point L, où l'asymtote de la branche ascendante coupe la ligne horizontale BAE, posant $P = n$, on aura

$$AL = x - \frac{ydx}{dy} = c\left(\int\frac{dp}{n-P} - \frac{1}{p}\int\frac{pdp}{n-P}\right).$$

43. Après ces remarques générales, venons au fait pour voir, comment on pourroit tirer quelque fruit des formules trouvées pour la pratique. Et d'abord il est évident qu'on ne sauroit se passer d'une Table, qui représente pour chaque valeur de p celle de P. Donc, puisque p exprime la tangente de l'angle d'inclinaison de la courbe à l'horizon, posons cet angle $=\varphi$, de sorte que $p = \text{tang.}\,\varphi$; et à cause de $\sqrt{(1+pp)} = \sec.\varphi$, nous aurons

$$P = \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi \cdot \sec.\varphi + \tfrac{1}{2}\,l(\text{tang.}\,\varphi + \sec.\varphi),$$

ou bien

$$P = \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi \cdot \sec.\varphi + \tfrac{1}{2}\,l\,\text{tang.}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

où il faut prendre les logarithmes hyperboliques de la tangente des angles $45^0 + \frac{1}{2}\varphi$, qu'on trouve dans l'Ouvrage de NEPER [1]) sur les logarithmes.

44. C'est donc le contenu de la Table premiere [p. 442], où la premiere colomne renferme tous les angles d'inclinaison à l'horizon de degré en degré depuis 0^0 jusqu'à 90^0; la seconde colomne en contient les tangentes, qui sont les valeurs de la lettre p. La troisième colomne fournit les valeurs de la formule $\text{tang.}\,\varphi \cdot \sec.\varphi$ ou de $p\sqrt{(1+pp)}$, et la quatrième celles de la formule $l\,\text{tang.}\,(45^0 + \frac{1}{2}\varphi)$ ou de $l\,(p + \sqrt{(1+pp)})$; qui est la même que la Table des degrés des latitudes croissantes dans l'Hydrographie. Enfin la cinquième colomne contient les valeurs correspondantes de la formule intégrale $P = \int dp\sqrt{(1+pp)}$, dont nous avons besoin dans nos expressions.

45. Or, pour connoitre les courbes qu'un corps peut décrire dans un fluide, il faut remarquer, qu'il y en a une infinité d'especes différentes, qui sont déterminées par les diverses valeurs du nombre n. Car, tandis que le nombre n demeure le même, les courbes seront toujours semblables entr'elles, ou bien de la même espece, quelle que soit la différence entre les quantités α et c; puisque celles-cy n'entrent dans le calcul, que pour déterminer la grandeur de la courbe, sans en changer l'espece, et outre cela le mouvement même du corps.

1) J. NAPIER (NEPER) (1550—1617), *Mirifici logarithmorum canonis descriptio etc.*, Edinburgi 1614. F. R. S.

46. Le caractère de ces diverses especes sera l'angle OLB, dont l'asymtote de la branche ascendante est inclinée à l'horizon. Pour connoitre cet angle, on n'a qu'à chercher la valeur du nombre n dans la cinquième colomne de notre table, et la premiere colomne indiquera cet angle. Ainsi, si $n = 0$, l'angle OLB évanouira, ou bien l'asymtote OL sera horizontale; et le sommet A se trouvera à l'infini. Dans ce cas donc la branche ascendante de la courbe évanouït, et le corps descendra toujours (Fig. 2), en approchant de plus en plus de l'autre asymtote verticale EF: ce sera donc la premiere espece des trajectoires décrites dans un fluide.

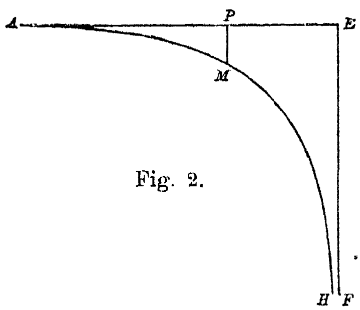


Fig. 2.

47. Pour les autres especes, on les aura en donnant à n des valeurs affirmatives. Or, quoique le nombre soit infini, il sera bon pour la pratique d'en fixer un certain nombre en donnant à l'angle OLB (Fig. 1) des valeurs, qui croissent de 5 à 5 degrés. Ainsi la seconde espece sera, si $n = 0{,}0876001$, où l'angle OLB devient de 5 degrés. Voilà donc les diverses especes, qu'on pourroit établir.

Espece	L'angle OLB	Valeur du nombre n	Espece	L'angle OLB	Valeur du nombre n
1	0°	0,0000000	10	45°	1,1477934
2	5	0,0876001	11	50	1,432361
3	10	0,1772365	12	55	1,822067
4	15	0,2711218	13	60	2,390530[1])
5	20	0,3718537	14	65	3,290396
6	25	0,4826944	15	70	4,884250
7	30	0,6079863	16	75	8,223564[2])
8	35	0,7538161	17	80	17,54793
9	40	0,9291380	18	85	67,13822[3])

L'espece suivante ou la dix-neuvième renfermeroit les cas, où le globe est lancé verticalement en haut; or, puisque ces cas sont suffisamment expliqués ailleurs, je n'en tiendrai pas compte ici.

1) En original 2,390330. 2) En original 8,223570. 3) En original 67,12291.
Corrigé par F. R. S.

48. On pourroit encore établir autant d'especes, en donnant à n les mêmes valeurs, mais prises négativement; mais, puisque dans ces cas les courbes sont destituées de la branche ascendante, elles ne sauroient avoir lieu, que lorsque le globe seroit d'abord lancé en bas. Or, comme dans l'Artillerie il n'arrive guères souvent, qu'on baisse les canons ou les mortiers au dessous de l'horizon, il seroit superflu de calculer ces especes; et puisque la direction des canons et mortiers est toujours, ou horizontale, ou élevée au dessus de l'horizon, on peut même se passer de la premiere espece, vu qu'elle n'a jamais lieu dans la pratique.

49. Le plus sur moyen de calculer chacune de ces especes sera de partager toute la courbe en plusieurs morceaux, et d'en calculer chacun à part: car alors on n'aura qu'à rassembler les calculs de tous ces morceaux. Soit donc Mm [Fig. 1] un tel morceau de la courbe, et soit la tangente de l'inclinaison en $M = p$ et en $m = q$, et posant $\int dq\sqrt{(1+qq)} = Q$, de même que $\int dp\sqrt{(1+pp)} = P$, on aura

$$AM = cl\frac{n+P}{n} \quad \text{et} \quad Am = cl\frac{n+Q}{n};$$

donc la portion de l'arc Mm sera

$$= cl\frac{n+Q}{n+P}.$$

Ensuite prenant un milieu entre les inclinaisons en M et m, qui soit $= \eta$, on aura pour la portion de l'abscisse qui répond à cet arc

$$Pp = c\cos.\eta\, l\frac{n+Q}{n+P},$$

et pour la portion de l'appliquée

$$pm - PM = c\sin.\eta\, l\frac{n+Q}{n+P};$$

pourvu que la différence entre p et q soit assés petite.

50. Ensuite pour le mouvement même du corps, la hauteur duë à la vitesse en M sera

$$=\frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P}$$

et en m

$$=\frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+qq)}{n+Q}.$$

Prenant donc un milieu entre les vitesses, qu'on tire de ces formules, qui soit $=\sqrt{u}$, le tems que le corps employe à parcourir l'espace Mm sera $=\frac{Mm}{\sqrt{u}}$. Ou bien on prendra un milieu entre les valeurs

$$\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{(1+qq)}}{\sqrt{(n+Q)}},$$

qui soit $=\mu$, et à cause de $\sqrt{u}=\mu\sqrt{\frac{1}{2}\alpha c}$, le tems par l'arc Mm sera

$$=\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{1}{\mu}\,l\frac{n+Q}{n+P}.$$

Et pour avoir ce tems exprimé en minutes secondes, soit g la hauteur par laquelle un corps tombe dans une seconde[1]), et le nombre des secondes sera

$$=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\alpha g}}\cdot\frac{1}{\mu}\,l\frac{n+Q}{n+P}.$$

On pourra de la même maniere exprimer les vitesses par l'espace, qu'elles sont capables de parcourir dans une seconde, et sur ce pied la vitesse en M est

$$=\sqrt{2\alpha cg}\,\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}}.$$

51. Quoiqu'on dût ici prendre les logarithmes hyperboliques, on peut pourtant se servir des logarithmes communs, pourvu qu'on multiplie ensuite les coëfficiens de ces termes par le nombre 2,302585092994, dont le logarithme

---

1) Donc la vitesse par seconde correspondante à la hauteur u est $\sqrt{4gu}=2\sqrt{g}\sqrt{u}$.
F. R. S.

commun est $= 0{,}3622156$. Ainsi, en se servant des logarithmes communs, un arc quelconque de la courbe sera

$$2{,}302585\, c\, l\,\frac{n+Q}{n+P},$$

et ce coëfficient conviendra aussi aux abscisses et appliquées. Ensuite la vitesse en M sera exprimée par l'espace

$$\sqrt{2\alpha c g}\,\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}},$$

qui se parcourt dans une seconde avec cette vitesse; et le tems par l'arc Mm sera de

$$\frac{2{,}302585\sqrt{c}}{\sqrt{2\alpha g}}\cdot\frac{1}{\mu}\,l\,\frac{n+Q}{n+P}$$

secondes, où μ est la valeur moyenne entre

$$\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{(1+qq)}}{\sqrt{(n+Q)}}$$

et g marque la hauteur, d'où un corps tombe dans une seconde dans le vuide, et on sait que $g = 15{,}625$ pieds de Rhin.

52. Sur ce pied je calculerai une Table pour l'espece douzième où $n = 1{,}822067$, qui contiendra deux parties, l'une pour la branche ascendante ANC, l'autre pour la branche descendante AMH; elle pourra servir de modele pour calculer pareillement des Tables semblables pour les autres especes; et à l'aide de 18 Tables de cette forme on sera en état de résoudre toutes les questions, qui peuvent se rencontrer dans l'Artillerie.

53. Par le moyen de cette Table, qui est calculée de 5 à 5 degrés, on construira aisément la forme de la trajectoire de la douzième espece, comme elle est exprimée dans la troisième figure. Et lorsqu'on sait la valeur de la quantité c et de α, on connoitra par cette Tabelle la vitesse du corps dans chaque point de la courbe, et encore le tems par chaque partie de la courbe. Ainsi, si la direction ou l'élévation du canon ou du mortier est donnée, d'où

l'on tire le globe, on cherchera l'élévation dans la premiere colonne de la table pour la branche ascendante, et la colonne V^{me} montrera la vitesse, qui

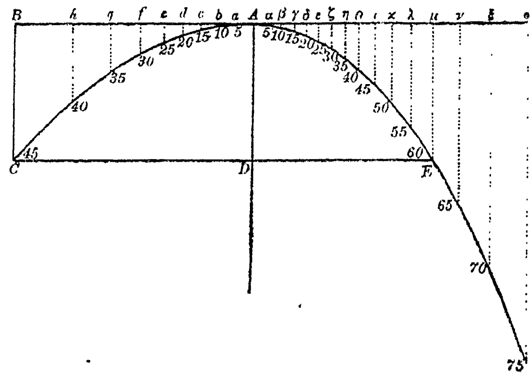


Fig. 3.

doit être imprimée au globe, pour qu'il décrive une trajectoire de la douzième espece.

54. Prenons pour exemple une bombe, dont le diamètre soit $\frac{1}{2}$ pied, et le poids de 64 livres, ou bien égal au poids de $\frac{9}{10}$ pied cubique d'eau. Ayant donc $d = \frac{1}{2}$ et $e^3 = \frac{9}{10}$, nous aurons (§ 15) $c = 707 \cdot \frac{18}{5} = 2545{,}2$ pieds; et pour α nous prendrons l'unité. Que cette bombe soit jettée sous une élévation de 45° en C, et pour qu'elle décrive une trajectoire de la XII^{me} espece, il faut que sa vitesse en C soit de $1{,}7222525 \cdot \sqrt{2\alpha gc}$ pieds par seconde, ou qu'elle soit capable de parcourir avec cette vitesse un espace de $485\frac{7}{10}$[1]) pieds par seconde. Quand sa vitesse seroit plus grande, la trajectoire appartiendroit à une espece antérieure; mais, si elle étoit plus petite, à une espece suivante; et dans ces cas il faudroit avoir calculées les Tables de ces autres especes.

55. Supposons donc que la vitesse initiale de la bombe en C [Fig. 3] soit de $434\frac{9}{10}$ pieds[2]) par seconde, et qu'elle soit jettée sur une plaine horizontale, où elle retombe en E. Soit le sommet en A, d'où l'on baisse la perpendicu-

1) En original $434\frac{9}{10}$. Corrigé par F. R. S.

2) Voir cependant la note précédente. F. R. S.

laire AD, et la Table pour la branche ascendante nous donnera l'intervalle $CD = AB$

$$= 2139{,}2 \text{ pieds,}$$

la hauteur AD

$$= 1234{,}8 \text{ pieds,}$$

la courbe même CA

$$= 2529{,}0 \text{ pieds,}$$

la vitesse au sommet A

$$= 208\tfrac{8}{9} \text{ pieds par seconde,}$$

le tems de la montée par CA

$$= 8{,}18 \text{ secondes.}$$

56. Pour la branche descendante il faut chercher par interpolation le point où l'appliquée est $= 0{,}2108126$, dans la Table pour cette branche, et on voit que cela arrive entre 60^0 et 65^0, et précisément à 60^0, $13'$. Ainsi la bombe tombera en E sur l'horizon sous un angle de 60^0, $13'$. Or de là on trouvera l'intervalle DE

$$= 1640{,}1 \text{ pieds,}$$

la courbe AE

$$= 2153{,}6 \text{ pieds,}$$

la vitesse en E

$$= 275\tfrac{2}{3} \text{ pieds par seconde,}$$

le tems de la descente par AE

$$= 9{,}50 \text{ secondes.}$$

Ainsi la bombe restera dans l'air pendant 17,68 ou $17\frac{2}{3}$ secondes, et l'amplitude du jet sera

$$CE = 3779\tfrac{1}{3} \text{ pieds.}$$

Cet exemple sera suffisant à montrer l'usage de ces Tables dans la resolution de toute sorte de problèmes qu'on propose ordinairement dans l'Artillerie.

TABLE SUBSIDIAIRE[1])

ang. φ	$p = \text{tang.}\,\varphi$	tang. φ sec. φ	l tang. $(45^0 + \frac{1}{2}\varphi)$	P
0^0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,0174551	0,0174577	0,0174541	0,0174559
2	0,0349208	0,0349420	0,0349136	0,0349278
3	0,0524078	0,0524797	0,0523838	0,0524318
4	0,0699268	0,0700976	0,0698698	0,0699837
5	0,0874887	0,0878229	0,0873773	0,0876001
6	0,1051042	0,1056832	0,1049116	0,1052974
7	0,1227846	0,1237068	0,1224783	0,1230926
8	0,1405408	0,1419220	0,1400823	0,1410022
9	0,1583844	0,1603587	0,1577296	0,1590442
10	0,1763270	0,1790471	0,1754259	0,1772365
11	0,1943803	0,1980185	0,1931766	0,1955976
12	0,2125566	0,2173052	0,2109876	0,2141464
13	0,2308682	0,2369410	0,2288650	0,2329030
14	0,2493280	0,2569609	0,2468144	0,2518877
15	0,2679492	0,2774014	0,2648421	0,2711218
16	0,2867454	0,2983010	0,2829544	0,2906277
17	0,3057307	0,3197000	0,3011576	0,3104288
18	0,3249197	0,3416408	0,3194582	0,3305495
19	0,3443276	0,3641680	0,3378626	0,3510153
20	0,3639702	0,3873290	0,3563784	0,3718537
21	0,3838640	0,4111741	0,3750122	0,3930932
22	0,4040262	0,4357564	0,3937709	0,4147637
23	0,4244748	0,4611325	0,4126623	0,4368974
24	0,4452287	0,4873633	0,4316947	0,4595290
25	0,4663077	0,5145136	0,4508752	0,4826944
26	0,4877326	0,5426522	0,4702126	0,5064324
27	0,5095254	0,5718538	0,4897151	0,5307845
28	0,5317094[2])	0,6021983	0,5093921	0,5557952
29	0,5543091	0,6337714	0,5292525	0,5815120
30	0,5773503	0,6666666	0,5493059	0,6079863

1) Aux nombres des trois dernières colonnes de cette table les six premiers chiffres seuls sont exactes. F. R. S.

2) En original 0,5417094. Corrigé par F. R. S.

ang. φ	$p = \text{tang.}\,\varphi$	tang. φ sec. φ	l tang. $(45^0 + \frac{1}{2}\varphi)$	P
31^0	0,6008606	0,7009840	0,5695625	0,6352732
32	0,6248694	0,7368323	0,5900326	0,6634325
33	0,6494076	0,7743300	0,6107273	0,6925287
34	0,6745085	0,8136044	0,6316578	0,7226311
35	0,7002075	0,8547958	0,6528363	0,7538161
36	0,7265425	0,8980560	0,6742752	0,7861656
37	0,7535541	0,9435520	0,6959879	0,8197699
38	0,7812856	0,9914657	0,7179875	0,8547266
39	0,8097840	1,0419980	0,7402898	0,8911439
40	0,8390996	1,0953666	0,7629093	0,9291380
41	0,8692867	1,1518160	0,7858627	0,9688394
42	0,9004040	1,2116130	0,8091670	1,0103900
43	0,9325151	1,2750535	0,8328403	1,0539469
44	0,9656888	1,3424655	0,8569026	1,0996840
45	1,0000000	1,4142136	0,8813732	1,1477934
46	1,0355303	1,4907040	0,9062752	1,1984896
47	1,0723687	1,5723920	0,9316313	1,2520116
48	1,1106125	1,6597842	0,9574664	1,3086253
49	1,1503684	1,7534530	0,9838076	1,3686303
50	1,1917536	1,8540400	1,0106827	1,4323614
51	1,2348972	1,9622710	1,0381231	1,5001970
52	1,2799416	2,0789700	1,0661613	1,5725657
53	1,3270448	2,2050705	1,0948332	1,6499519
54	1,3763819	2,3416410	1,1241768	1,7329089
55	1,4281480	2,4899000	1,1542341	1,8220670
56	1,4825610	2,6512520	1,1850503	1,9181512
57	1,5398650	2,8273130	1,2166746	2,0219938
58	1,6003345	3,0199590	1,2491603	2,1345596
59	1,6642795	3,2313720	1,2825662	2,2569691
60	1,7320508	3,4641020	1,3169578 1)	2,3905299 2)
61	1,8040478	3,721147	1,3524042	2,536776
62	1,8807265	4,006050	1,3889854	2,697518
63	1,9626105	4,323021	1,4267876	2,874904
64	2,0503038	4,677095	1,4659075	3,071501
65	2,1445069	5,074337	1,5064535	3,290396

1) En original 1,3165572. 2) En original 2,3903296. Corrigé par F. R. S.

ang. φ	$p = \text{tang.}\,\varphi$	tang. φ sec. φ	l tang. $(45^0 + \frac{1}{2}\varphi)$	P
66^0	2,2460368	5,522093	1,5485467	3,535320
67	2,3558524	6,029344	1,5923233	3,810834
68	2,4750869	6,607161	1,6379381	4,122549
69	2,6050891	7,269313	1,6855678	4,477441
70	2,7474774	8,033085	1,7354146	4,884250
71	2,9042109	8,920438	1,7877114	5,354075
72	3,0776835	9,959592	1,8427293	5,901161
73	3,2708526	11,187310	1,9007861	6,544048
74	3,4874144	12,652184	1,9622566	7,307220
75	3,7320508	14,419540	2,0275887	8,223564 1)
76	4,0107809	16,578823	2,0973231	9,338073
77	4,3314759	19,255193	2,1721209	10,713657
78	4,7046301	22,628020	2,2528019	12,440411
79	5,1445540	26,961800	2,3403999	14,651100
80	5,6712818	32,65962	2,4362452	17,54793
81	6,3137515	40,36036	2,5420894	21,45123
82	7,1153697	51,12605	2,6603052	26,89318
83	8,1443464	66,82850	2,7942178	34,81136
84	9,5143645	91,02174	2,9486992	46,98522
85	11,4300522 2)	131,14514 3)	3,1313001	67,13822 4)
86	14,300666	205,0084	3,3546723	104,1815
87	19,081137	364,5893	3,6425320	184,1162
88	28,636253	820,5348	4,0481241	412,2915
89	57,289962	3282,639	4,7413471	1643,690
$89^0\ 30'$	114,58865	13131,06	5,4345129	6568,250
$89^0\ 44'$	214,85762	46164,31	6,0631256	23085,19
$89^0\ 52'$	429,71757	184657,7	6,7562739	92332,23 5)
$89^0\ 56'$	859,43630	738631,4	7,4494211	369319,4
$89^0\ 58'$	1718,8732	2954526	8,1425680	1477267

1) En original 8,223570. 2) En original 11,4300520. 3) En original 131,11452. 4) En original 67,12291. 5) En original 92332,30. Corrigé par F. R. S.

ESPECE XII.

POUR LA BRANCHE ASCENDANTE [1])

Inclin. en N	L'arc AN $= 2{,}302585\,c$ mult. par	L'abscisse AQ $= 2{,}302585\,c$ mult. par	L'appliquée QN $= 2{,}302585\,c$ mult. par	La vitesse en N $= \sqrt{2\alpha g c}$ mult. par	Le tems par AN $= \frac{2{,}302585\sqrt{c}}{\sqrt{2\alpha g}}$ mult. par
0^0	0,0000000 213983	0,0000000 213779	0,0000000 9334	0,7408247 213820	0,0000000″ 284763
5	0,0213983 230448	0,0213779 228477	0,0009334 30080	0,7622067 295427	0,0284763 296594
10	0,0444431 255349	0,0442256 249296	0,0039414 55268	0,7917494 395510	0,0581357 314747
15	0,0699780 291646	0,0691552 278148	0,0094682 87699	0,8313004 523866	0,0896104 340273
20	0,0991426 345303	0,0969700 319018	0,0182381 132142	0,8836870 697094	0,1236377 376196
25	0,1336729 426536	0,1288718 377472	0,0314523 196952	0,9533964 945651	0,1612573 426723
30	0,1763265 555745	0,1666190 468711	0,0511475 298602	1,0479615 1331725	0,2039296 499521
35	0,2319010 778564	0,2134901 617676	0,0810077 473960	1,1811330 2003240	0,2538817 609504
40	0,3097574 1219806	0,2752577 899335	0,1284037 824089	1,3814570 3407955	0,3148321 790812
45	0,4317380 2381005	0,3651912 1608581	0,2108126 1755460	1,7222525 7698425	0,3939133 1149287
50	0,6698385	0,5260493	0,3863586	2,4920950	0,5088420

1) Les deux tables pour la douzième espèce n'ont pas été vérifiées. F. R. S.

ESPECE XII.

POUR LA BRANCHE DESCENDANTE

Inclin. en M	L'arc AM $= 2{,}302585\,c$ mult. par	L'abscisse AP $= 2{,}302585\,c$ mult. par	L'appliquée PM $= 2{,}302585\,c$ mult. par	La vitesse en M $= \sqrt{2\,\alpha g c}$ mult. par	Le tems par AM $= \frac{2{,}302585\sqrt{c}}{\sqrt{2\,\alpha g}}$ mult. par
0^0	0,0000000 203933	0,0000000 203739	0,0000000 8895	0,7408247 — 144229	0,0000000″ 277997
5	0,0203933 199209	0,0203739 197505	0,0008895 26002	0,7264018 — 82616	0,0277997 275814
10	0,0403142 199299	0,0401244 194575	0,0034897 43136	0,7181402 — 25702	0,0553811 278019
15	0,0602441 204125	0,0595819 194677	0,0078033 61380	0,7155700 + 28920	0,0831830 284687
20	0,0806566 214049	0,0790496 197755	0,0139414 81913	0,7184620 83320	0,1116517 296214
25	0,1020615 229898	0,0988251 203922	0,0221327 106155	0,7267940 139390	0,1412731 313328
30	0,1250513 253104	0,1192173 213465	0,0327482 135993	0,7407330 198950	0,1726059 337196
35	0,1503617 285969	0,1405638 226875	0,0463475 174086	0,7606280 263895	0,2063255 369608
40	0,1789586 332130	0,1632513 244872	0,0637561 224384	0,7870175 336125	0,2432863 413278
45	0,2121716 397389	0,1877385 268470	0,0861945 292985	0,8206300 417430	0,2846141 472492
50	0,2519105 491194	0,2145855 299018	0,1154930 389688	0,8623730 509230	0,3318633 553474
55	0,3010299 629347	0,2444873 338148	0,1544618 530786	0,9132960 611670	0,3872107 667116
60	0,3639646 841010	0,2783021 388335	0,2075404 745985	0,9744630 720310	0,4539223 832818
65	0,4480656 1178537	0,3171356 451007	0,2821389 1088830	1,0464940 825390	0,5372041 1084230
70	0,5659193 1754921	0,3622363 527715	0,3910219 1673697	1,1290330 900010	0,6456271 1495880

Inclin. en M	L'arc AM $= 2{,}302585\,c$ mult. par	L'abscisse AP $= 2{,}302585\,c$ mult. par	L'appliquée PM $= 2{,}302585\,c$ mult. par	La vitesse en M $= \sqrt{2\,\alpha g c}$ mult. par	Le tems par AM $= \frac{2{,}302585\,\sqrt{c}}{\sqrt{2\,\alpha g}}$ mult. par
75°	0,7414114	0,4150078	0,5583916	1,2190340	0,7952151″
	2851538	617186	2783950	894400	2257818
80	1,0265652	0,4767264	0,8367866	1,3084740	1,0209969
	5513732	719686	5466560	733500	4100500
85	1,5779384	0,5486950	1,3834426	1,3818240	1,4310469

DE ICTU GLANDIUM CONTRA TABULAM EXPLOSARUM [1]

Commentatio 411 indicis Enestroemiani
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **15** (1770), 1771, p. 414—436
Summarium ibidem p. 34—36

SUMMARIUM

In doctrina de percussione corporum eiusmodi saepe occurrunt phaenomena, quae primo intuitu haud parum paradoxa et rationi contraria videntur, attentius autem examinata cum legibus naturae optime consentire deprehenduntur. Horum in numero sequens omnino memorabile est: si ianua aperta lapide percutiatur, motu in ipsa generato clauditur, sin vero sclopetum contra eam explodatur, immota persistit glande explosa eam penitus penetrante. Huius igitur phaenomeni rationem expositurus Illustr. huius dissertationis Auctor ictum glandium contra tabulam explosarum accuratius exponere constituit, ubi quidem duos casus a se invicem distinguendos seorsim considerat, primum, quo tabula immobilis concipitur, alterum, quo super plano horizontali libere est mobilis. Quod vero primum attinet casum, si celeritas glandis ante ictum designetur per c, altitudo, ex qua grave uno min. sec. libere cadit, per g, resistentia tabulae per R et massa glandis per M, tumque statuatur $\int \frac{R\,dx}{M} = f$, posito $x = a$, toti scilicet crassitiei tabulae, observat Illustr. Auctor glandem

1) Confer hac cum dissertatione Euleri Commentationes 22, 69, 82, 434, 435 (indicis Enestroemiani): *De communicatione motus in collisione corporum*, Comment. acad. sc. Petrop. **5** (1730/31), 1738, p. 159, *De communicatione motus in collisione corporum sese non directe percutientium*, Comment. acad. sc. Petrop. **9** (1737), 1744, p. 50, *De la force de percussion et de sa véritable mesure*, Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin [**1**] (1745), 1746, p. 21, *De collisione corporum gyrantium*, Novi comment. acad. sc. Petrop. **17** (1772), 1773, p. 272, *De collisione corporum pendulorum, tam obliqua, quam motu gyratorio perturbata*, ibidem p. 315; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series II, vol. 7. F. R. S.

penitus per tabulam penetrare, si fuerit $c > 2\sqrt{gf}$, sin autem sit $c < 2\sqrt{gf}$, glandem per tabulam perrumpere non posse. Pro casu secundo, si retentis reliquis denominationibus massa tabulae exprimatur per N, ostenditur glandem per tabulam penitus perrumpere, si fuerit $cc > 4gf\frac{M+N}{N}$, quae conditio in eam pro primo casu manifesto abit posito $N=\infty$. Hinc itaque intelligitur eo maiori glandis celeritate opus esse, ut perrumpat, quo levior ipsa est tabula; deinde et hinc quoque perspicitur celeritatem tabulae post ictum eo fore minorem, quo maior fuerit celeritas glandis ante ictum, quod, uti iam supra monuimus, primo intuitu omnino absonum videri potuisset. Ulterius, quo solutiones allatas Illustr. Auctor magis illustraret, eas ad notiones communes, conservationis scilicet quantitatis motus et virium vivarum, revocare Ipsi placuit, ubi quidem observat vires vivas non penitus conservari, sed aliquam diminutionem pati, tantam scilicet, quantam tabulae perforatio requirit. Quum autem in prioribus solutionibus resistentia tabulae tamquam unice pendens a quantitate x, profunditate scilicet penetrationis, sit considerata, eiusmodi autem saepe occurrere possint casus, ubi haec resistentia non tantum variabilem x, sed aliam quoque veluti celeritatem implicet, necessum fuit ostendere, quomodo solutiones pro huiusmodi casibus adornandae sint. Si enim tabula fluidi proprietate concipiatur praedita, tum nullum omnino est dubium, quin resistentia non a variabili x pendeat, sed quadrato celeritatis sit proportionalis; quoniam igitur tabulae non solum motus imprimendus est, sed etiam eius particulae a se invicem divellendae, evidens est resistentiam duplicis generis heic considerari debere adeoque totam resistentiam ex duabus partibus componi, quarum prior functioni ipsius x sit proportionalis, altera vero ipso quadrato celeritatis.

CASUS PRIMUS
QUO TABULA EST IMMOBILIS

1. Assumimus hic primo tabulam esse immobilem, quo analysis ex principiis motus petenda evadat facilior. Quod nunc ad glandem attinet, duae res potissimum considerandae veniunt; prima est eius celeritas, qua in tabulam impingit, quam metimur spatio, quod hac celeritate uno minuto secundo percurreretur; sit igitur haec celeritas $=c$ ac denotet g altitudinem, ex qua grave libere cadit tempore unius minuti secundi, ita ut, si celeritas glandis tanta fuerit, quanta ex altitudine g acquiritur, tum sit $c=2g$, sin autem illa celeritas tanta sit, quanta ex altitudine nng acquiritur, tum sit $c=2ng$, unde sequitur posito $c=2ng$ fore $n=\frac{c}{2g}$ ideoque altitudinem, ex qua haec celeritas c generatur, fore $nng=\frac{cc}{4g}$. Deinde vero in computum

venit massa huius glandis, quam littera M designemus, ubi secundum principia mechanica M mensuratur pondere eiusdem glandis. Quod autem ad figuram glandis attinet, eius ratio hic vix habetur, dummodo eandem figuram retineat.

2. Statim atque glans tabulam ferire incipit, hoc erit initium ictus, a quo tempora computabimus. Ponamus ergo ab hoc initio iam elapsum esse t minut. secund. quaeriturque, quousque nunc glans in tabulam penetraverit; ponamus ergo glandem ad profunditatem $= x$ penetrasse, et quum hoc sit spatium a glande tempore t percursum, erit celeritas glandis hoc momento $\frac{dx}{dt}$ eiusque acceleratio $= \frac{Mddx}{2gdt^2}$ sumpto elemento dt constante, cui vis resistens negative sumpta debet esse aequalis. Animum autem hic abstrahimus a gravitate glandis, qua eius motus incurvatur, quippe qui effectus in hoc phaenomeno nullius est momenti.

3. Quum nunc glans ad profunditatem $= x$ in tabulam penetraverit, quam quidem hic minorem ipsa crassitie tabulae assumimus (posita enim crassitie tabulae $= a$, simul ac fit $x = a$, glans per tabulam penitus transiisse consensus est), nunc igitur dum in profunditate $= x$ versatur, certam atque insignem offendet resistentiam, quae eius motui se opponit et quam litera R denotemus; cuius valorem cum vix ullo casu accurate definire liceat, hic tantum observemus eam cum a magnitudine glandis tum vero etiam a duritie ipsius tabulae atque ab ipsa profunditate penetrationis x pendere; quare, quum duo priora momenta eadem maneant pro eadem glande et tabula, vis resistentiae spectari poterit tamquam functio ipsius x, quae evanescat tam posito $x = 0$ quam $x = a$, quandoquidem tam ante impulsum quam post eruptionem nullam patitur resistentiam.

4. Constituta igitur hac resistentia R habebimus statim istam aequationem

$$\frac{ddx}{2gdt^2} = -\frac{R}{M},$$

quae per dx multiplicata et integrata praebet

$$\frac{dx^2}{4gdt^2} = C - \int \frac{Rdx}{M},$$

ubi integrale $\int \frac{R\,dx}{M}$ ita capi sumamus, ut ipso initio, ubi $x=0$, evanescat. Hinc constantem C ita definiri oportet, ut posito $x=0$ celeritas glandis, quae est $\frac{dx}{dt}$, fiat $=c$, unde colligitur $C=\frac{cc}{4g}$, ita ut habeamus

$$\frac{dx^2}{dt^2}=cc-4g\int \frac{R\,dx}{M};$$

hincque ipsa celeritas glandis

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\left(cc-4g\int \frac{R\,dx}{M}\right)},$$

unde porro pro tempore cognoscendo deducitur ista aequatio

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{\left(cc-4g\int \frac{R\,dx}{M}\right)}}.$$

5. Parum autem solliciti de tempore ex aequatione pro celeritate inventa facile iudicare poterimus, utrum glans penitus per tabulam perrumpat, an vero in ipsa tabula sit haesura omni scilicet motu amisso. Hic praecipue ad ipsam resistentiam R indeque formatum integrale $\int R\,dx$ est respiciendum, cuius valor crescente x continuo augetur; ponamus igitur posito $x=a$ fieri

$$\int \frac{R\,dx}{M}=f$$

atque nunc perspicuum est glandem per tabulam perrumpere non posse, quamdiu cc minus est quam $4gf$, atque hinc sequentes casus distingui oportet.

1°. Si fuerit celeritas glandis $c<2\sqrt{gf}$, glans non penitus per tabulam perrumpet, sed alicubi haerebit, ubi scilicet fit

$$\int \frac{R\,dx}{M}=\frac{cc}{4g},$$

unde profunditas penetrationis intelligi poterit.

2°. Sin autem fuerit celeritas glandis $c>2\sqrt{gf}$, tum glans non solum penitus per tabulam transvibrabit, sed etiam adhuc celeritatem quandam conservabit, quae erit

$$=\sqrt{(cc-4gf)}.$$

CASUS SECUNDUS
QUO TABULA SUPER PLANO HORIZONTALI LIBERE EST MOBILIS

6. Manentibus iis, quae circa glandem eiusque celeritatem ante sunt constituta, nunc etiam massa tabulae in computum est ducenda, quae sit $= N$, atque ne tabula motum obliquum recipiat, glandis ictum ponamus fieri in ipso tabulae centro inertiae motumque glandis esse horizontalem. Sit porro adhuc crassities tabulae in loco ictus $= a$.

7. Elapso tempore $= t$ secund. a primo ictus initio, ubi ipsa tabula erat in quiete, glans vero celeritate $= c$ ferebatur, ponamus tabulam iam esse promotam per spatium $= y$, glandem autem iam in tabulam penetrasse ad profunditatem $= x$, ubi resistentiam offendat $= R$, uti ante posuimus; quum igitur tabula tempore t promota sit per spatium y, erit eius celeritas $= \frac{dy}{dt}$ et acceleratio more superiori sumpta $= \frac{Nddy}{2gdt^2}$, glans autem interea confecit spatium $x + y$, unde eius celeritas erit

$$\frac{dx + dy}{dt}$$

et acceleratio

$$= \frac{M(ddx + ddy)}{2gdt^2};$$

notandum autem est ipso initio fuisse $x = 0$ et $y = 0$, at vero celeritas primo tabulae $\frac{dy}{dt} = 0$ et glandis $\frac{dx + dy}{dt} = c$, ita ut tum fuerit $\frac{dx}{dt} = c$.

8. Quod nunc primum ad motum tabulae attinet, evidens est eum accelerari a vi R; haec enim, dum motui glandis se opponit, aequa vi in tabulam reagit eiusque motum accelerat, unde haec prima aequatio resultat

$$\text{I.} \quad \frac{Nddy}{2gdt^2} = R \quad \text{sive} \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{2gR}{N},$$

deinde vero motus glandis ab eadem vi R retardatur, unde oritur haec secunda aequatio

$$\text{II.} \quad \frac{M(ddx + ddy)}{2gdt^2} = -R \quad \text{sive} \quad \frac{ddx + ddy}{dt^2} = -\frac{2gR}{M},$$

ex quibus duabus aequationibus utrumque motum derivari oportet, scilicet spatia x et y, ubi imprimis notasse iuvabit quantitatem R tantum esse functionem ipsius x, ita ut ex priori aequatione sola nihil concludi queat.

9. Hinc igitur primo ddy eliminemus, unde orietur ista aequatio

$$\frac{ddx}{dt^2} = -2g\frac{M+N}{MN}R,$$

quae per dx multiplicata et integrata dat

$$\frac{dx^2}{dt^2} = C - 4g\frac{M+N}{MN}\int Rdx,$$

ubi, si $\int Rdx$ evanescat facto $x=0$, aequatio nostra ita determinatur, ut sit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc - 4g\frac{M+N}{MN}\int Rdx.$$

Quodsi ergo ut ante pro tota crassitie tabulae $= a$ statuatur

$$\int\frac{Rdx}{M} = f,$$

perspicuum est, ut glans per tabulam penitus perrumpat, necesse esse, ut sit

$$cc > 4fg\frac{M+N}{N},$$

unde intelligitur maiori glandis celeritate opus esse, si tabula fuerit mobilis, quam si esset immobilis, nisi moles tabulae fuerit maxima respectu glandis; at quo levior tabula est, manente quidem eadem crassitie et duritie, eo maior glandis celeritas requiritur, ut perrumpat. Cognita autem massa tabulae N iudicium, utrum glans perrumpat necne, perinde instituitur atque in hypothesi tabulae immotae.

10. Hic autem maxime curiosa est investigatio motus, quem tabula hinc recipit; ad quem inveniendum addamus ambas aequationes prius inventas, ut ipsa quantitas R eliminetur; sic enim prodit haec aequatio

$$\frac{Mddx}{2gdt^2} + \frac{(M+N)ddy}{2gdt^2} = 0,$$

quae semel integrata sponte dat

$$\frac{Mdx}{dt}+\frac{(M+N)dy}{dt}=Mc;$$

quare, quum $\frac{dy}{dt}$ celeritatem tabulae exprimat, habebimus

$$\frac{dy}{dt}=\frac{Mc}{M+N}-\frac{Mdx}{(M+N)dt},$$

ex qua aequatione intelligitur iis casibus, quibus glans non penitus transit per tabulam, sed in certa penetratione arcetur ibique fit $\frac{dx}{dt}=0$, tabulam motum esse accepturam, cuius celeritas sit $=\frac{Mc}{M+N}$. At si aucta celeritate c glans penitus perrumpat, tum tabula minorem accipiet motum, uti mox patebit, in quo non exiguum paradoxon cernitur.

11. Quamdiu ergo glans non penitus perrumpit tabulaeque infixa manet, quod fit, ubi $\frac{dx}{dt}=0$, motus determinatio nulla laborat difficultate; tum enim celeritas tabulae, ut modo vidimus, erit

$$\frac{dy}{dt}=\frac{M}{M+N}c.$$

Evolvamus igitur eos casus, quibus glans penitus perrumpit, quod evenit, quando

$$cc>4fg\,\frac{M+N}{N}=4fg\Big(1+\frac{M}{N}\Big);$$

ponamus igitur brevitatis gratia

$$4gf\Big(1+\frac{M}{N}\Big)=kk,$$

ita ut k eum celeritatis gradum exhibeat, quo tantum non per tabulam penetrare valet; ac si fuerit $c=k$, ob $\frac{dx}{dt}=0$ erit tabulae celeritas post ictum

$$\frac{dy}{dt}=\frac{M}{M+N}k,$$

glans vero ipsi extremitati tabulae inhaerebit. Nunc autem ponamus $c > k$ et quidem $c = nk$, ut sit $n > 1$, atque post ictum habebimus

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{(nn-1)},$$

unde fit celeritas tabulae post ictum

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N}(nk - k\sqrt{(nn-1)}) = \frac{M}{M+N}k(n - \sqrt{(nn-1)}).$$

Quare si n paulisper tantum unitatem excedat, ut sit $n = 1 + \alpha$, erit celeritas tabulae post ictum

$$= \frac{Mk}{M+N}(1 - \sqrt{2\alpha}),$$

spectata scilicet α ut infinite parva, unde patet celeritatem tabulae minorem esse, quam si esset $n = 1$.

12. Sit iam n numerus quicunque maior unitate, et quum sit post ictum

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{(nn-1)}$$

et

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N}k(n - \sqrt{(nn-1)}),$$

quae est celeritas tabulae post ictum, erit glandis celeritas post ictum

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{Mnk}{M+N} + \frac{N}{M+N}k\sqrt{(nn-1)}.$$

Hinc ergo evolvamus aliquot casus praecipuos:

Celeritas glandis ante ictum	Celeritas tabulae post ictum	Celeritas glandis post ictum
I. $c = k$	$\frac{M}{M+N}k$	$\frac{kM}{M+N}$
II. $c = 2k$	$\frac{M}{M+N}k(2-\sqrt{3})$	$\frac{k(2M+N\sqrt{3})}{M+N}$
III. $c = 3k$	$\frac{M}{M+N}k(3-\sqrt{8})$	$\frac{k(3M+N\sqrt{8})}{M+N}$
IV. $c = 4k$	$\frac{M}{M+N}k(4-\sqrt{15})$	$\frac{k(4M+N\sqrt{15})}{M+N}$
V. $c = 5k$	$\frac{M}{M+N}k(5-\sqrt{24})$	$\frac{k(5M+N\sqrt{24})}{M+N}$
VI. $c = 6k$	$\frac{M}{M+N}k(6-\sqrt{35})$	$\frac{k(6M+N\sqrt{35})}{M+N}$.

13. Quodsi ergo n fuerit numerus mediocriter magnus, ut sit proxime

$$\sqrt{(nn-1)} = n - \frac{1}{2n},$$

tum ergo, si celeritas glandis ante ictum fuerit $c = nk$, prodibit post ictum celeritas tabulae

$$\frac{Mk}{2n(M+N)},$$

celeritas vero glandis

$$= nk - \frac{Nk}{2n(M+N)},$$

unde manifestum est, quo maior fuerit numerus n seu quo maior fuerit celeritas glandis ante ictum, celeritatem tabulae post ictum eo fore minorem, glandis autem celeritatem eo minus defecturam esse a celeritate ante ictum, sive iacturam celeritatis, quam glans patitur, eo fore minorem.

OBSERVATIONES IN SOLUTIONES PRAECEDENTES

14. Problemata haec referenda sunt ad doctrinam de collisione corporum, quae non solum in Mathesi, sed etiam in Philosophia tractari est solita. Totum discrimen in hoc tantum consistit, quod hic corpus impingens in alterum penetret atque adeo sibi transitum aperiat, dum in vulgari doctrina eiusmodi tantum corpora considerantur, quae in conflictu sibi vel nullam impressionem vel saltem quam minimam inducunt.

15. Nostram igitur solutionem ad notiones vulgares revocaturi nominemus, sive durante conflictu sive eo iam finito, celeritatem glandis $= v$ et celeritatem tabulae $= u$, et quum sit

$$v = \frac{dx + dy}{dt} \quad \text{et} \quad u = \frac{dy}{dt},$$

ambae aequationes pro secundo problemate inventae, quae scilicet facta integratione prodierunt, ita se habebunt:

$$(v - u)^2 = cc - 4g\,\frac{M + N}{MN}\int Rdx \quad \text{et} \quad Mv + Nu = Mc,$$

quarum posterior involvit eam notionem, quae vulgo quantitas motus vocari solet, et indicat quantitatem motus sive productum ex massa utriusque corporis in suam celeritatem perpetuo eandem conservari; quia enim ante conflictum tabula quievit, tota quantitas motus erat Mc, durante autem conflictu vel finito quantitas motus est $Mv + Nu$. Ista quantitatis motus conservatio involvit aequabilem progressum communis centri gravitatis.

16. Ut vero etiam priorem aequationem ad notiones receptas perducamus, eam per MN multiplicemus, ut habeamus

$$MN(v - u)^2 = MNvv - 2MNvu + MNuu = MNcc - 4g(M + N)\int Rdx;$$

ad hanc addamus quadratum posterioris aequationis, quod est

$$MMvv + 2MNvu + NNuu = MMcc,$$

prodibitque aggregatum

$$M(M+N)vv+N(M+N)uu=M(M+N)cc-4g(M+N)\int Rdx,$$

quae per $M+N$ divisa praebet hanc aequationem

$$Mvv+Nuu=Mcc-4g\int Rdx,$$

quae manifesto continet eas notiones, quae vulgo virium vivarum nomine efferri solent. Est enim Mcc tota vis viva ante conflictum, at Mvv vis viva glandis durante vel finito conflictu atque Nuu vis viva tabulae.

17. Hinc ergo perspicuum est neque durante conflictu neque finito vim vivam totam eandem manere, sed potius diminui et quidem quantitate $4g\int Rdx$, id quod vulgari principio conservationis virium vivarum adversari videtur; verum probe notandum est conservationem virium vivarum tum tantum locum habere, quando de viribus nihil perit. Quum autem nostro casu tabula perforetur atque ad foramen efficiendum non exigua virium quantitas impendi debeat, mirum non est, quod summa virium vivarum hic decrementum patiatur, quin etiam ex ipsa nostra analysi manifestum est formulam integralem $4g\int Rdx$ summam virium in foramen impensarum exprimere.

18. Hic non inutile erit ostendere, quomodo immediate ex nostris aequationibus differentialibus secundi gradus ad vires vivas calculum perducere potuissemus. Aequationum enim § 8 inventarum prior ducatur in dy, altera vero in $dx+dy$ eaeque invicem additae dabunt istam aequationem

$$\frac{Ndy\cdot ddy}{2gdt^2}+\frac{M(dx+dy)(ddx+ddy)}{2gdt^2}=-Rdx,$$

quae integrata producit

$$\frac{Ndy^2}{4gdt^2}+\frac{M(dx+dy)^2}{4gdt^2}=\frac{Mcc}{4g}-\int Rdx,$$

sicque introductis litteris v et u statim assecuti sumus hanc aequationem

$$Nuu+Mvv=Mcc-4g\int Rdx.$$

19. Ex principiis igitur vulgaribus, quae passim in doctrina de collisione corporum exposita reperiuntur, solutionem problematis nostri deducere potuissemus, dummodo perpendissemus in penetrationem glandis intra tabulam certas vires impendi easque iunctim sumptas formula $4g\int R\,dx$ comprehendi posse. Tum enim, quia tota vis viva ante conflictum erat $= Mcc$, durante autem conflictu, cum penetratio iam facta est ad profunditatem $= x$, summa virium vivarum sit $Mvv + Nuu$, necesse est, ut fiat

$$Mvv + Nuu = Mcc - 4g\int R\,dx;$$

alterum vero principium quantitatis motus sive aequabilis progressus communis centri gravitatis statim suppeditat hanc aequationem

$$Mv + Nu = Mc,$$

quae cum illa coniuncta completam problematis nostri solutionem continet.

20. Hac occasione non abs re erit paucis exponere, quid de notissimis illis notionibus circa quantitatem motus et vires vivas, quibus Philosophi totam motus theoriam superstruere sunt conati, sit iudicandum et quatenus eae cum veris et universalibus Mechanicae principiis conciliari possint. Ac primo quidem de veris Mechanicae principiis tenendum est ea ex unico principio proficisci, quo ratio inter accelerationes et vires sollicitantes continetur et ita latissime patet, ut etiam ad fluida corpora extendatur. At vero hoc principium ita est comparatum, ut semper ad formulas differentiales secundi gradus deducat, de quibus deinceps videndum est, num integrationem admittant.

21. Dantur autem infiniti casus, quibus huiusmodi integratio locum habet, hocque modo ad formulas differentiales primi gradus pervenitur, quas per celeritates explicare licet, quemadmodum nostro casu $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ celeritates praebuerunt, atque hae ipsae formulae iam integratae eas notiones involvunt, quae vulgo sub quantitatis motus vel vis vivae nomine innotuerunt, de quo quidem iam dudum[1]) observatum est nomen vis vivae incongrue adhiberi, quum productum ex massa cuiuspiam corporis per quadratum celeritatis neutiquam ad notionem cuiuspiam vis reduci queat.

1) Vide EULERI Commentationem 82 nota 1 p. 448 laudatam. F. R. S.

22. Talia igitur principia, quae vulgo leges motus continere censentur, non aliter spectari possunt nisi tamquam conclusiones ex unico illo Mechanicae principio deductae, quae, quum semper sub certis tantum conditionibus, quatenus scilicet formulas integrales secundi gradus integrare licuit, locum habeant, tantum pro principiis particularibus sunt habendae, quae etiam principia secundaria vel derivata appellare liceat, dum verum Mechanicae principium est unicum et maxime universale.

EXAMEN ACCURATIUS SUPERIORUM SOLUTIONUM

23. Quoniam vis illa R, quam in solutionem nostram introduximus, nullo modo restringitur aut limitatur, solutio nostra maxime generalis et ad omnes plane casus extendi posset videri; quomodocunque enim perforationis effectus promotioni glandis adversetur, semper certam vim concipere licet, quae isti resistentiae foret aequalis et quam adeo sub littera illa R contentam intelligere liceret. Quatenus autem illa quantitas R ut functio variabilis x, qua profunditas penetrationis designatur, a nobis consideratur, quocunque demum modo tam ab ipsa glandinis magnitudine et figura quam ab ipsius tabulae duritie et crassitudine pendeat, siquidem hae res ut quantitates constantes sunt spectandae, eatenus nostra solutio saepius a veritate recedere potest, quum utique eiusmodi dentur casus, ubi vis resistentiae non tantum unicam illam variabilem x, sed aliam praeterea veluti celeritatem implicare possit, id quod clarius explicari necesse est.

24. Ad hoc ostendendum concipiamus tabulam tamquam proprietate fluidi praeditam esse, atque tum nullum foret dubium, quin omnis resistentia a sola celeritate penderet eiusque quadrato proportionalis esset; huiusmodi igitur casu quantitas illa R non foret functio ipsius x, sed potius celeritatis, qua glans in tabulam penetrat et quam formula $\frac{dx}{dt}$ expressimus. Facile autem intelligitur, si resistentia illa R etiam formulam $\frac{dx}{dt}$ involvat, rationem integrationis, qua sumus usi, neutiquam locum habere posse, propterea quod formula Rdx tamquam integrabilis est spectata.

25. Quodsi ergo tabula naturae fluidi particeps esset, ita ut resistentia partim ex functione ipsius x, uti assumpsimus, partim vero etiam ex quadrato celeritatis constaret, solutio nostra nullo modo subsistere posset, unde maxime

necessarium est in eos casus inquirere, quibus talis indoles sese resistentiae tabulae admiscere posset. Verum satis iam est cognitum omnem fluidi resistentiam inde potissimum oriri, quod partes fluidi de loco suo depelli iisque motus imprimi debeat, id quod sine virium dispendio fieri nequit; supra autem littera R tantum eiusmodi vim reluctantem denotavit, quae motum glandis quidem retardaret, ipsa autem in se nullam motus generationem requireret. Duos igitur hos resistentiae casus sollicite a se invicem distingui oportet.

26. Id resistentiae genus, quod motui corporis directe se opponit et quasi elastrum corpus repellit, vocemus resistentiam absolutam, quorsum pertinet illa ipsa resistentia, quam supra sumus contemplati. Alterum vero resistentiae genus, quod, veluti in fluidis evenit, a generatione novi motus oritur, toto coelo a priori genere discrepat, etiamsi corporis motum quoque retardet; quo discrimine notato, quoniam tabulae nullum foramen induci potest, nisi eius particulae internae non solum a se invicem divellantur, sed etiam de loco suo removeantur, satis perspicuum est resistentiam utriusque generis hic revera locum habere debere.

27. Pro nostro ergo casu veram resistentiam duabus partibus exprimi oportebit; prior scilicet pars continebit resistentiam absolutam et functioni cuipiam ipsius x proportionalem, quam littera R ut supra designabimus, altera vero pars a motus generatione oriunda et quadrato celeritatis proportionalis hac formula $A\frac{dx^2}{dt^2}$ exprimatur, ubi $\frac{dx}{dt}$ significat celeritatem, qua glans in tabula ulterius penetrat, A vero est quantitas quaepiam a densitate materiae et magnitudine foraminis pendens. Hoc modo tota resistentia tali formula repraesentari debet

$$R + A\frac{dx^2}{dt^2}.$$

28. Quod autem posterior pars quadrato celeritatis sit proportionalis, ita plano ratiocinio colligi poterit. Concipiamus massam quampiam $= M$ quiescentem, quae a vi quadam P in motum sollicitetur; elapso tempore $= t$ massa iam sit promota per spatium $= s$, et quum ex principio motus sit

$$\frac{Mdds}{2gdt^2} = P,$$

habebimus integrando

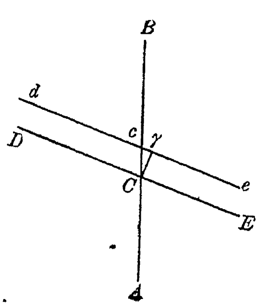
$$\frac{M ds^2}{4 g dt^2} = Ps,$$

ubi $\frac{ds}{dt}$ celeritatem massae M impressam denotat. Hinc ergo discimus, ut datae massae quiescenti M, dum per spatium s propellitur, data celeritas $\frac{ds}{dt}$ imprimatur, ad hoc requiri vim sollicitantem

$$P = M \frac{ds^2}{4 g s dt^2},$$

quam formulam applicemus ad nostrum casum, quo glans intra tabulam ulterius penetrat per spatiolum $= dx$, ita ut nobis sit $s = dx$; interea autem necesse est, ut certa portio materiae, quae hoc spatiolum dx occupabat, de loco suo removeatur; cuius ergo massa proportionalis erit partim ipsi spatiolo dx, partim amplitudini glandis nec non densitati materiae, qua tabula constat, ex quo massa removenda ita exprimi poterit, ut sit $= C dx$, quam loco M scribi convenit; denique huic massae celeritas imprimi debet celeritati glandis aequalis, ut scilicet successioni glandis cedat, sicque haec celeritas erit nostro casu $= \frac{dx}{dt}$ loco $\frac{ds}{dt}$ substituenda. Quocirca ut massae $C dx$, dum per spatium $s = dx$ promovetur, celeritas $= \frac{dx}{dt}$ imprimatur, ad hoc requiritur vis sollicitans $= \frac{C}{4g} \frac{dx^2}{dt^2}$, quam ergo recte per formulam $A \frac{dx^2}{dt^2}$ exprimimus, quam formam adeo ipsum principium motus universale suppeditare est censendum.

29. Hic quidem assumimus glandem non solum directe per tabulam penetrare, sed etiam perpendiculariter in eius particulas illidere; verum si oblique illidat? Sit enim recta AB directio motus et DCE anterior corporis moti superficies, quae percurso spatiolo $Cc = dx$ perveniat in situm dce, sitque angulus obliquitatis $DCB = \alpha$; iam ducatur $C\gamma$ ad ambas rectas obliquas normalis atque manifestum est, ut corpus motum prosequi possit, non opus esse, ut particulae obviae per spatiolum Cc promoveantur, sed tantum per spatium $C\gamma$, quod se habet ad illud ut sin. α ad 1, ex quo etiam sufficit iis celeritatem imprimi $= \frac{dx}{dt}$ sin. α, sicque pro hoc casu obliquitatis resistentia putanda erit



$= \frac{C}{4g} \cdot \frac{dx^2}{dt^2} \sin. \alpha^2$, scilicet praeterea quadrato sinus obliquitatis proportionalis; quia autem $\sin. \alpha^2$ est quantitas constans, commode simul in littera illa C comprehendi potest, ita ut non opus sit huic casui peculiarem locum in nostra analysi tribuere.

EMENDATIO SOLUTIONIS SUPRA DATAE

30. Ut igitur solutionem supra datam a vitio modo memorato liberemus, tantum opus est in ambabus aequationibus ibi inventis loco R scribere

$$R + \frac{A dx^2}{dt^2},$$

quo pacto aequationes illae erunt

$$\frac{N ddy}{2g dt^2} = R + \frac{A dx^2}{dt^2}, \quad \frac{M(ddx + ddy)}{2g dt^2} = -R - \frac{A dx^2}{dt^2},$$

quae invicem additae summam praebebunt ut ante

$$\frac{M ddx + (M+N) ddy}{2g dt^2} = 0,$$

cuius integrale ergo etiam erit ut ante

$$\frac{M dx}{dt} + (M+N)\frac{dy}{dt} = Mc.$$

Ad alteram autem aequationem integralem inveniendam ex priore valorem

$$\frac{ddy}{2g dt^2} = \frac{R}{N} + \frac{A}{N} \cdot \frac{dx^2}{dt^2},$$

substituamus in posteriore, ut prodeat

$$\frac{ddx}{2g dt^2} = -\frac{M+N}{MN} R - \frac{M+N}{MN} A \frac{dx^2}{dt^2}$$

sive

$$\frac{2 ddx}{dt^2} = -4g \frac{M+N}{MN} R - 4gA \frac{M+N}{MN} \cdot \frac{dx^2}{dt^2};$$

ponamus nunc brevitatis gratia

$$\frac{4g(M+N)A}{MN} = 2\alpha,$$

ut habeamus hanc aequationem

$$\frac{2ddx + 2\alpha dx^2}{dt^2} = -4g\,\frac{M+N}{MN}\,R,$$

quam videamus, quomodo ad integrabilitatem perducere liceat.

31. Ante omnia igitur observamus formulam $ddx + \alpha dx^2$ integrabilem reddi, si multiplicetur per $e^{\alpha x}$; erit enim

$$e^{\alpha x}(ddx + \alpha dx^2) = d.\, e^{\alpha x} dx;$$

multiplicemus igitur per $e^{\alpha x}$ et nostra aequatio fiet

$$\frac{2\,d.\,e^{\alpha x} dx}{dt^2} = -4g\,\frac{M+N}{MN}\,e^{\alpha x} R,$$

quae, ut prorsus integrabilis reddatur, multiplicetur per $e^{\alpha x} dx$, eritque integrale

$$\frac{e^{2\alpha x} dx^2}{dt^2} = C - 4g\,\frac{M+N}{MN}\int e^{2\alpha x} R dx,$$

ubi, si formula integralis ita capiatur, ut evanescat facto $x = 0$, valor constantis C debet esse $= cc$, sicque obtinebimus hanc aequationem integratam

$$\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-2\alpha x}\left(cc - 4g\,\frac{M+N}{MN}\int e^{2\alpha x} R dx\right),$$

quae aequatio iam cum ante inventa

$$\frac{Mdx + (M+N)dy}{dt} = Mc$$

coniuncta veram solutionem nostri secundi problematis suppeditat.

32. Circa hanc solutionem observamus, si exponens $2\alpha x$ evanesceret, ita ut esset $e^{2\alpha x}=1$, tum hanc solutionem cum praecedente perfecte convenire; eatenus igitur tantum ab ea discrepabit, quatenus $2\alpha x$ non evanescit; quia autem tum formula $e^{2\alpha x}$ eo magis unitatem superat, quo maior fuerit exponens $2\alpha x$, intelligimus formulam $e^{2\alpha x}Rdx$ maiorem esse quam casu ante tractato et quidem eo magis, quo maius fuerit spatium penetrationis x; ex quo intelligitur, quo crassior fuerit tabula, praeterquam quod sola formula $\int Rdx$ fit maior posito scilicet $x=a$, ob factorem $e^{2\alpha x}$ multo magis insuper augeri; quare quum supra [§ 11] pro casibus, quibus glans per totam tabulam perrumpit, posuerimus

$$4g\frac{M+N}{MN}\int Rdx=kk,$$

si nunc etiam ponamus

$$4g\frac{M+N}{MN}\int e^{2\alpha x}Rdx=kk,$$

ista quantitas k maior erit quam casu praecedente ideoque nunc maior glandis celeritas requiritur, ut ea per totam tabulae crassitiem penetret, et quo crassior fuerit tabula, ut glans penetret, eius celeritas tanto maior debet esse quam secundum superiorem solutionem.

33. Cum autem glans per tabulam penitus perruperit, pro eius celeritate in egressu habebimus

$$\frac{dx^2}{dt^2}=e^{-2\alpha a}(cc-kk),$$

quae ergo celeritas ob duplicem causam minor erit quam casu praecedente, pro eadem scilicet celeritate c ante collisionem; primo enim, quia k maior est quam ante, quantitas $cc-kk$ iam est multo magis minor quam ante; deinde, quia ea insuper multiplicatur in $e^{-2\alpha a}$ vel, quod perinde est, dividitur per $e^{+2\alpha a}$, quae formula maior est unitate, celeritas $\frac{dx}{dt}$ multo magis diminuitur. Quod denique ad ipsum tabulae motum attinet, quia eius celeritas post perforationem inventa est

$$\frac{dy}{dt}=\frac{M}{M+N}\left(c-\frac{dx}{dt}\right)$$

et quia, ut modo vidimus, $\frac{dx}{dt}$ multo minus est quam casu praecedente, nunc

ipsi tabulae multo maior motus imprimetur quam casu praecedente atque ob hanc rationem celeritas glandis post ictum, quae est $\frac{dx+dy}{dt}$, hinc aliquantillum augebitur; interim tamen, quia ex formula nostra fit

$$\frac{dx+dy}{dt}=\frac{M}{M+N}c+\frac{N}{M+N}\cdot\frac{dx}{dt}$$

et quoniam $\frac{dx}{dt}$ minus est quam casu praecedente, ipsa quoque glandis celeritas minor evadet.

34. Reducamus nunc etiam has formulas ad notiones communes et pro casibus, quibus glans sive penetrat sive secus, ponatur celeritas glandis post ictum $=v$, celeritas vero tabulae $=u$, et quia est

$$\frac{dy}{dt}=u \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}=v-u,$$

nostrae binae aequationes inventae fient

$$Mv+Nu=Mc$$

et

$$(v-u)^2=e^{-2\alpha x}cc-4g\,\frac{M+N}{MN}\,e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx,$$

quarum prior, uti iam monuimus, perinde significat conservationem quantitatis motus sive aequabilem progressum communis centri gravitatis. Pro viribus vivis autem eliciendis alteram aequationem per MN multiplicatam evolvamus

$$MNvv-2MNvu+MNuu=MNcce^{-2\alpha x}-4g(M+N)e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx$$

ad eamque addamus quadratum prioris, ut prodeat

$$M(M+N)vv+N(M+N)uu$$
$$=Mcc(Ne^{-2\alpha x}+M)-4g(M+N)e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx\,{}^{1)},$$

1) Editio princeps:
$$M(M+N)vv+N(M+N)uu=Mcc(Me^{-2\alpha x}+N)-4g\,(M+N)\,e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}\cdot R\,dx.$$
Hanc aequationem et aequationes sequentes correxit F. R. S.

quae aequatio per $M+N$ divisa praebet

$$Mvv+Nuu=\frac{Mcc}{M+N}(Ne^{-2\alpha x}+M)-4ge^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx,$$

ex qua intelligitur nunc summam virium vivarum post ictum non amplius tam simpliciter se habere ad vim vivam ante conflictum, quae erat Mcc, quam in casu praecedente; nunc enim erit

$$Mvv+Nuu=Mcc-\frac{MNcc}{M+N}(1-e^{-2\alpha x})-4ge^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx,$$

unde patet vim vivam in conflictu deperditam aestimandam esse

$$=\frac{MNcc}{M+N}(1-e^{-2\alpha x})+4ge^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx;$$

quonam autem ratiocinio haec iactura concludi possit, nullo modo perspicitur.

MEDITATIO IN EXPERIMENTA EXPLOSIONE TORMENTORUM NUPER INSTITUTA [1]

Commentatio 853 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 2, 1862, p. 800—804

Circa motum globorum duo in computum veniunt, motus globi in tormento et motus extra tormentum, de quorum motuum quolibet seorsim agendum est. Primum autem excutiendus est motus extra tormentum, qui determinari poterit ex tempore, quo globus in aëre commoratus est, diametro globi et ratione gravitatum specificarum globi et aëris. Ex hisce datis innotescit altitudo, ad quam globus pervenit, et velocitas initialis, qua e tormento erumpit, tempus quoque ascensus et descensus seorsim. Quibus definitis progredi poterimus ad contemplandum motum globi intra tormentum et ex velocitate, qua globus egreditur, cognita innotescet vis pulveris pyrii multaque alia maximi usus in Pyrotechnia. Suppono autem hic directionem tormenti esse verticalem, ut corpus lineam rectam ascensu et descensu describat; motus enim obliquus in linea curva altioris est indaginis.

Designet c diametrum globi in scrupulis pedis Rhenani [2]), $m:n$ rationem gravitatis specificae globi ad gravitatem specificam aëris seu medii, in quo globus movetur. Sit t tempus durationis globi in aëre, in minutis secundis, sit porro altitudo quaesita, ad quam corpus ascendit, x. Scribatur pro numero, cuius logarithmus est unitas, e [3]), qui est 2,7182818 . . ., cuius logarithmus se-

1) Hac dissertatione permulti errores continentur. Confer praefationem huius voluminis atque imprimis dissertationem Celeb. D. BERNOULLI nota 1 p. 41 laudatam. F. R. S.

2) 1000 scrupula = 1 pes Rhenanus. F. R. S.

3) Vide praefationem huius voluminis. F. R. S.

cundum VLACQUIUM[1]) est 0,4342944. Indicat porro N numerum graduum arcus, cuius tangens est

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}} - 1}$$

existente sinu toto $= 1$. Altitudo quaesita x ex hac aequatione erui debet

$$t = \frac{m\sqrt{c}}{447\,650\sqrt{3n(m-n)}}\left(125\,N - 7162\,l\left(\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}} - \sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}} - 1}\right)\right).^{2)}$$

Vocemus, ut calculus facilior evadat,

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}} - 1} = y;$$

erit N numerus graduum arcus, cuius tangens est y; erit

$$t = \frac{m\sqrt{c}}{447\,650\sqrt{3n(m-n)}}\left(125\,N - 7162\,l\left(\sqrt{yy+1} - y\right)\right).$$

Ut logarithmis VLACQUII uti liceat, multiplicari debet logarithmus per 2,7182818.[3]) Scribatur A loco

$$\frac{447\,650\sqrt{3n(m-n)}}{m\sqrt{c}};$$

erit

$$At = 125\,N - 19468\ \log.\ (\sqrt{yy+1} - y);$$

erit ergo

$$N = \frac{At + 19\,468\ \log.\ (\sqrt{yy+1} - y)}{125} = \frac{8\,At + 155\,746\ \log.\ (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Ex qua aequatione tentando y erui debebit, tamdiu alios atque alios substituendo valores loco y, donec resultet aequalitas.

1) A. VLACQ (1600?—1667), *Arithmetica logarithmica etc.* Editio secunda aucta, Goudae 1618. F. R. S.

2) Haec aequatio evadit, si in § 450 tomi primi EULERI libri, qui inscribitur *Mechanica sive motus scientia,* Petropoli 1736, ponatur $g = \frac{m-n}{m}$ et $k = \frac{4mc}{3n}$ atque si § 430 respiciatur; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series II, vol. 1, p. 147 atque 140. F. R. S.

3) Cum logarithmus non per $e = 2{,}7182818$, sed per $l\,10 = 2{,}3025851$ multiplicari debeat, omnes rationes inde deductae (insuper etiam alios errores continentes uti exempli gratia formula sequens pro N deducta, ubi legendum est 155 744) falsae sunt. Confer tabulam sub finem huius dissertationis adiectam. F. R. S.

EXPERIMENTUM I

factum d. 21. Aug. a. 1727

Globus ferreus diametri 225 scrup. explodebatur verticaliter, tempus durationis in aëre erat 45 minut. secund.

Est ergo

$$c = 225, \quad t = 45, \quad m = 7000 \quad \text{et} \quad n = 1.$$

Erit ergo

$$A = 618, \quad \text{ergo} \quad At = 27816\,[1] \quad \text{et} \quad 8At = 222530.$$

Erit ergo

$$N = \frac{222530 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Ponatur $y = 2{,}70$; erit

$$\sqrt{yy+1} = 2{,}879, \quad \text{ergo} \quad \sqrt{yy+1} - y = 0{,}179,$$

consequenter $\log. (\sqrt{yy+1} - y) = -0{,}7471$ et $N = 69\frac{41}{60} = \frac{69683}{1000}$, sed ex aequatione invenitur $N = \frac{106173}{1000}$. Ergo y maior assumi debet.

Sit $y = 3{,}00$; erit

$$\sqrt{yy+1} = 3{,}162, \quad \text{ergo} \quad \sqrt{yy+1} - y = 0{,}162,$$

unde log. eius est $-0{,}790$, unde prodit $N = 99^0$.

Sit $y = 4{,}00$; erit

$$\sqrt{yy+1} = 4{,}123 \quad \text{et} \quad \sqrt{yy+1} - y = 0{,}123,$$

cuius log. est $-0{,}9100$. Est ergo $N = 80{,}802$, sed debebat esse $N = 75^0\,58'$.

Sit $y = 4{,}10$; erit

$$\sqrt{yy+1} - y = 0{,}12,$$

cuius log. $= -0{,}9208$. Est ergo $N = 79^0\,12'$, sed debebat esse $N = 76^0\,18'$.

---

1) Ob $At = 27810$ et $8At = 222480$ sequentes quoque formulae falsae sunt. Nihil tamen correximus. F. R. S.

Hoc continuando reperitur $y = 4{,}31$; hoc in casu exacte admodum obtinetur aequatio, ut ne in centesimis erretur. Et erit $N = 76^0\,56'$.

Ut inveniatur altitudo, ad quam corpus pertigit, erit

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}} - 1} = y$$

adeoque

$$e^{\frac{3nx}{4mc}} = 19{,}5761,$$

ergo

$$\frac{3nx}{4mc}\,0{,}4342944 = 1{,}2915908$$

seu

$$x = \frac{2100000 \cdot 1{,}2915908}{0{,}4342944} = 6245 \text{ ped. Rhen.}$$

Hinc innotescit velocitas initialis seu altitudo, ad quam eodem impetu in vacuo pervenisset; est enim

$$e^{\frac{3nx}{4mc}} = \frac{4c(m-n) + 3nK}{4c(m-n)}$$

denotante K altitudinem in vacuo describendam; erit ergo

$$K = 20997 \cdot 1857{,}61 \text{ scrup.} = 39004 \text{ ped. Rhen.}$$

Tempus, quod globus in ascensu consumit, est aequale

$$\frac{mN\sqrt{c}}{3581\sqrt{3n(m-n)}} \text{ minut. secund.,}$$

id est (ob $N = 76{,}93$ et $\sqrt{c} = 15$)

$$= 15\tfrac{1}{2} \text{ minut. secund.}$$

Tempus ergo descensus est

$$29\tfrac{1}{2} \text{ minut. secund.,}$$

ut adeo differentia inter tempus ascensus et descensus sit 14 minut. secund.

EXPERIMENTUM II

eodem die institutum

Ex eodem tormento idem globus explodebatur dimidia pulveris quantitate, mansit ille in aëre 34 minut. secund.

Est ergo

$$c = 225, \quad t = 34, \quad m = 7000, \quad n = 1 \quad \text{et} \quad A = 618;$$

erit

$$At = 21012 \quad \text{et} \quad 8At = 168096.$$

Est ergo

$$N = \frac{168096 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Ponatur $y = 2{,}00$; erit

$$\sqrt{yy+1} - y = 0{,}236,$$

cuius log. est $= -0{,}6270$; hinc invenitur $N = 70{,}91$ et deberet esse $63^0 26'$. Hoc modo tentando invenitur tandem sumi debere loco y 2,185; erit $N = 65^0 25'$; erit ergo

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}} - 1} = 2{,}185 \quad \text{et} \quad e^{\frac{3nx}{4mc}} = 5{,}7742.$$

Ergo

$$\frac{3nx}{4mc} = \frac{\log. 5{,}7742}{0{,}43429} = \frac{0{,}76149}{0{,}43429},$$

unde

$$x = \frac{2100000 \cdot 0{,}76149}{0{,}43429} \text{ scrup.} = 3682 \text{ ped. Rhen}$$

Dein altitudo, ad quam in vacuo pervenisset, est 10025,862 ped. Rhen. Tempus ascensus est

13,19 minut. secund.

Ergo tempus descensus est

20,81 minut. secund.

EXPERIMENTUM III

factum d. 23. Aug. a. 1727

Idem globus diametri 225 scrup. explodebatur verticaliter et tempus erat 2 minut. secund., quantitas pulveris 1 Loth seu $\frac{1}{8}$ pars praecedentis.

Est ergo ut supra

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad \text{sed} \quad t = 2.$$

Ergo ob $A = 618$ est

$$At = 1236, \quad \text{ergo} \quad 8At = 9888.$$

Consequenter erit

$$N = \frac{9888 + 155746 \log (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Tentando, quid loco y substituendum sit, reperietur esse $y = 0{,}075$, unde est $N = 4^0 19'$. Est ergo

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}} - 1 = 0{,}075, \quad \text{ergo} \quad e^{\frac{3nx}{4mc}} = 1{,}005625.$$

Ergo

$$\frac{3nx}{4mc} = \frac{0{,}002300}{0{,}4343},$$

ergo

$$x = \frac{2100000 \cdot 0{,}0023}{0{,}4343} = 11121 \text{ scrup.};$$

pervenit ergo globus ad altitudinem 11 pedum.

Dein est

$$0{,}005625 = \frac{3nK}{4c(m-n)}.$$

Ergo

$$K = 2099700 \cdot 0{,}005625 = 11800 \text{ scrup.}$$

Differentia ergo altitudinum in vacuo et aëre est 678 scrup. Tempus autem ascensus est

$$\frac{7000 \cdot 4{,}32 \cdot 15}{3581 \cdot 144} = 0{,}88 \text{ minut. secund.},$$

ergo tempus descensus est

$$1{,}12 \text{ minut. secund.}$$

In his experimentis erat longitudo tormenti 7260 scrupula. In sequentibus autem idem tormentum adhibitum est, sed abbreviatum ut eius longitudo erat saltem 5808 scrupula. In primo experimento erat quantitas pulveris 16 Loth, in secundo 8 Loth, in tertio 1 Loth.

EXPERIMENTUM IV

factum d. 2. Sept. a. 1727

Idem globus diam. 225 scrup. explodebatur verticaliter pulvere 1 Loth et cecidit demum post 8 minut. secund. Est iterum

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad \text{sed} \quad t = 8.$$

Unde erit

$$N = \frac{39552 + 155746 \log.(\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Unde reperitur $y = 0{,}33$. Erit ergo

$$N = 18^0\, 25'.$$

Est ergo

$$e^{\frac{3nx}{4mc}} = 1{,}1089, \quad \text{ergo} \quad x = \frac{2100000 \cdot 0{,}04458}{0{,}4343}.$$

Est ergo altitudo, ad quam globus ascendit, 215 ped. 1 dig. 7 lin., altitudo autem, ad quam in vacuo pervenisset, est

$$K = 2099700 \cdot 0{,}1089 = 228 \text{ ped. } 5 \text{ dig. } 8 \text{ lin.}$$

Tempus autem ascensus est

$$= \frac{7000 \cdot 18{,}41 \cdot 15}{3581 \cdot 144} = 3{,}7 \text{ minut. secund.}$$

Ergo tempus descensus erat

$$= 4{,}3 \text{ minut. secund.}$$

EXPERIMENTUM V

eodem die factum

Idem globus ex eodem tormento pulvere 4 Loth onerato explodebatur et tempus, quo in aëre mansit, fuit 20 minut. secund.

Est ergo

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad t = 20.$$

Est ergo

$$N = \frac{98880 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Est ergo $y = 0{,}93$, ergo

$$N = 42^0 56', \quad e^{\frac{3nx}{4mc}} = 1{,}8649.$$

Ergo

$$x = \frac{2100000 \cdot 0{,}27044}{0{,}43429} = 1307{,}707 \text{ ped.}$$

Dein

$$K = 2099700 \cdot 0{,}8694 = 1816{,}025 \text{ ped.}$$

Tempus autem ascensus est

$$= \frac{7000 \cdot 42{,}93 \cdot 15}{3581 \cdot 144} = \frac{210 \cdot 4293}{103849} = 8{,}6 \text{ minut. secund.}$$

Ergo tempus descensus erat

$$= 11{,}4 \text{ minut. secund.}$$

EXPERIMENTUM VI

eodem die factum

Idem globus ex eodem tormento pulvere 8 Loth onerato explodebatur et tempus, quo in aëre mansit, fuit 28 minut. secund.

Est ergo

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad t = 28.$$

Ergo

$$N = \frac{138432 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Hinc reperitur $y = 1{,}52$ et

$$N = 56^0\,39', \quad e^{\frac{3nx}{4mc}} = 3{,}3104,$$

unde

$$x = \frac{2\,100\,000 \cdot 0{,}519\,828}{0{,}434\,29} = 2513{,}621 \text{ ped. Rhen.}$$

At

$$K = 20997 \cdot 31{,}04 = 4851{,}150 \text{ ped. Rhen.}$$

Tempus autem ascensus est

$$= \frac{7000 \cdot 56{,}66 \cdot 15}{3581 \cdot 144} = 11{,}45 \text{ minut. secund.}$$

Tempus ergo descensus est

$$= 16{,}55 \text{ minut. secund.}$$

EXPERIMENTUM VII

dicto die institutum

Ex eodem tormento, sed 12 Loth onerato, eiaculabatur globus idem et tempus, donec cecidit, erat 32 minut. secund. Ob

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad t = 32$$

erit

$$N = \frac{158\,202 + 155\,746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Unde consequitur esse $y = 1{,}93$, ergo

$$N = 62^0\,27'.$$

Erit

$$e^{\frac{3nx}{4mc}} = 4{,}7249,$$

ergo

$$x = \frac{2\,100\,000 \cdot 0{,}673\,309\,9}{0{,}434\,29} = 3255{,}776 \text{ ped. Rhen.} \quad \text{seu} \quad 3255776 \text{ scrup.}$$

Sed erit

$$K = 20997 \cdot 372{,}49 = 7821{,}172 \text{ ped. Rhen.}$$

Tempus autem ascensus est

$$= \frac{210 \cdot 6261}{103849} = 12{,}67 \text{ minut. secund.}$$

et tempus descensus erit

$$= 19{,}33.\ ^{1)}$$

1) Tabula correctiones huius dissertationis continens

Experimentum	Onus pulveris Lot	t	N	x ped. Rhen.	Tempus ascensus secundis expressum	Tempus descensus secundis expressum	K ped. Rhen.
I	16	45	80° 25′	7530	16,27	28,73	73558
II	8	34	69° 39′	4436	14,09	19,91	15263
III	1	2	4° 56′	15,59	0,998	1,002	15,644
IV	1	8	19° 35′	250,3	3,96	4,04	265,74
V	4	20	46° 22½′	1559	9,38	10,62	2311,6
VI	8	28	60° 58′	3036	12,34	15,66	6813
VII	12	32	66° 58½′	3943	13,55	18,45	11625

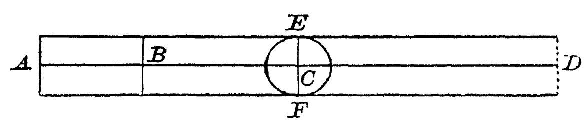
F. R. S.

FRAGMENTUM
EX ADVERSARIIS MATHEMATICIS DEPROMPTUM[1]

Ex manuscriptis academiae scientiarum Petropolitanae nunc primum editum

DE MOTU GLOBI PER TUBUM TORNATUM EXPLOSI

Fuerit initio spatium AB pulvere pyrio repletum, ut sit $AB = a$; qui, simul ac accenditur, aequivalet aëri in spatium n vicibus minus compresso. Perveneril globus iam in ECF et sit $AC = x$. Sit pondus globi $= A$, radius



$CE = c$, celeritas centri $= \sqrt{v}$, celeritas rotatoria puncti $E = m\sqrt{v}$. Erit vis viva globi

$$= Av + \tfrac{2}{5} Ammv.$$

1) In praefatione a Nicolao Fuss minore *Operibus postumis* praemissa legitur p. IV—V: „Praeter scripta postuma ab Eulero ipso elaborata et maximam partem ipsius manu exarata exstant volumina tria, quibus titulus est *Adversaria mathematica.* His adversariis administri et discipuli Euleri inferre solebant theses quasdam et sententias breves, quas quidem a magistro acceptas ipsi fusius et accuratius explicaverant. Ex his thesibus selectae sunt graviores, quae *Operibus postumis* suo loco insererentur, et primum quidem nonaginta dignae visae sunt, quae typis describerentur. Deinde clarissimus Tschebyscheff, perlustratis iterum dictis voluminibus, invenit alias sex theses, quas addendas esse censuit; has tomus prior exhibet sub Numero XXIII, p. 487—493. In hunc praeterea ex adversariis illatae sunt theses geometricae octo, theses analytici argumenti quatuor et duae ad calculum integralem spectantes; ita ut omnino tomo priori 110 theses ex adversariis depromptae contineantur."

Praeter haec tria volumina in manuscriptis academiae Petropolitanae inveniuntur insuper novem alia, quae a G. Eneström *Notizbücher* appellata sunt. Vide G. Eneström, ***Bericht an die***

Sit altitudo atmosphaerae $=f$ et pressio columnae atmosphaerae in basin circolo maximo aequalem $=p$; aequivalebit ponderi columnae aëriae $=\pi ccf$. Erit vis sollicitans

$$=\frac{nap}{x}-p,$$

resistentia vero est

$$=\frac{1}{2}\pi ccv.$$

Erit ergo

$$A\left(1+\frac{2}{5}mm\right)dv=\pi cc\left(\frac{nafdx}{x}-fdx-\frac{1}{2}vdx\right).$$

Sit

$$\frac{A(1+\frac{2}{5}mm)}{\pi cc}=b;$$

erit

$$dv+\frac{vdx}{2b}=\frac{nafdx}{bx}-\frac{fdx}{b},$$

ergo

$$e^{\frac{x}{2b}}v=\frac{naf}{b}\int\frac{e^{\frac{x}{2b}}dx}{x}-\frac{f}{b}\int e^{\frac{x}{2b}}dx.$$

Sit $x=a+t$; erit

$$e^{\frac{t}{2b}}v=\frac{naf}{b}\int\frac{e^{\frac{t}{2b}}dt}{a+t}-\frac{f}{b}\int e^{\frac{t}{2b}}dt$$

$$=\frac{f}{b}\int e^{\frac{t}{2b}}dt\left(\frac{(n-1)a-t}{a+t}\right),$$

ergo

$$v=\frac{fe^{-\frac{t}{2b}}}{b}\int e^{\frac{t}{2b}}dt\left(\frac{(n-1)a-t}{a+t}\right);$$

vel

$$2abdv+2btdv+avdt+vtdt$$
$$=2nafdt-2fadt-2ftdt$$

Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft über die EULERSCHEN *Manuskripte der Petersburger Akademie,* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **22**, 1913, Zweite Abt., p. 191, imprimis p. 193—194 et 197—198. Fragmentum *De motu globi* invenitur in quarto horum novem adversariorum, p. 437, quod secundum G. ENESTROEM (l. c. p. 197) circiter anno 1740 scribi coeptum est. F. R. S.

et

$$
\begin{array}{rrrrl}
v = \dfrac{(n-1)ft}{b} & -\dfrac{(n-1)ftt}{4bb} & +\dfrac{(n-1)ft^3}{24b^3} & -\dfrac{(n-1)ft^4}{4\cdot 6\cdot 8b^4} & + \text{etc.} \\
 & -\dfrac{nftt}{2ab} & +\dfrac{nft^3}{12abb} & -\dfrac{nft^4}{8\cdot 12ab^3} & + \text{etc.} \\
 & & +\dfrac{nft^3}{3aab} & -\dfrac{nft^4}{8\cdot 3aabb} & + \text{etc.} \\
 & & & -\dfrac{nft^4}{4a^3b} & + \text{etc.} \\
 & & & & + \text{etc.},
\end{array}
$$

ergo

$$
\begin{aligned}
v = & -\frac{ft}{b} + \frac{naf}{b}\, l\left(1+\frac{t}{a}\right) \\
& + \frac{ftt}{4bb} - \frac{naaf}{2bb}\left(\left(1+\frac{t}{a}\right) l\left(1+\frac{t}{a}\right) - \frac{t}{a}\right) \\
& - \frac{ft^3}{24b^3} + \frac{na^3f}{8b^3}\left(\left(1+\frac{t}{a}\right)^2 l\left(1+\frac{t}{a}\right) - \frac{t}{a} - \frac{3}{2}\,\frac{tt}{aa}\right) \\
& \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
= -2f\left(1-e^{\frac{-t}{2b}}\right) + \frac{naf}{b}\, e^{\frac{-a-t}{2b}}\, l\left(1+\frac{t}{a}\right) + \frac{nft}{b}\left(1-e^{-\frac{a}{2b}}\right) - \text{etc.}^{[1]}
$$

Ponatur $2b = g$; erit

$$
\int \frac{e^{\frac{t}{2b}}dt}{a+t} = e^{-\frac{a}{g}} \left\{ \begin{array}{l} l\left(1+\dfrac{t}{a}\right) + \dfrac{a}{g}\left(\dfrac{t}{a}\right) + \dfrac{aa}{2gg}\left(\dfrac{t}{a}+\dfrac{tt}{2aa}\right) \\ + \dfrac{a^3}{6g^3}\left(\dfrac{t}{a}+\dfrac{tt}{aa}+\dfrac{t^3}{3a^3}\right) + \dfrac{a^4}{24g^4}\left(\dfrac{t}{a} + \text{etc.}\right) + \text{etc.} \end{array} \right\}.^{[2]}
$$

Hinc ergo erit

---

1) Apud EULERUM haec ultima expressio ipsius v ita se habet:

$$
= -2f\left(1-e^{\frac{-t}{2b}}\right) + \frac{2naf}{2b+a+t}\, l\left(1+\frac{a}{t}\right) + \frac{naft}{2bb+ab}.
$$

Correxit F. R. S.

2) Apud EULERUM factor ipsius $e^{-\frac{a}{g}}$ ita se habet:

$$
l\left(1+\frac{t}{a}\right) + \frac{a}{g}\left(\frac{t}{a}\right) - \frac{aa}{2gg}\left(\frac{t}{a}-\frac{tt}{2aa}\right) + \frac{a^3}{6g^3}\left(\frac{t}{a}-\frac{tt}{2aa}+\frac{t^3}{3a^3}\right) - \frac{a^4}{24ag^4}\left(\frac{t}{a}\ \text{etc.}\right).
$$

Correxit F. R. S.

$$v=\frac{2naf}{g}e^{-\frac{t}{g}}\int\frac{e^{\frac{t}{g}}dt}{a+t}-2f\left(1-e^{-\frac{t}{g}}\right)$$

$$=\frac{2naf}{g}e^{\frac{-a-t}{g}}l\left(1+\frac{t}{a}\right)+\frac{2naf}{g}e^{-\frac{t}{g}}\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{g}\left(\frac{t}{a}\right)-\frac{aa}{2gg}\left(\frac{t}{a}-\frac{tt}{2aa}\right)+\frac{a^3}{6g^3}\left(\frac{t}{a}-\frac{tt}{2aa}+\frac{t^3}{3a^3}\right)\\ \qquad -\frac{a^4}{24g^4}\left(\frac{t}{a}-\frac{tt}{2aa}+\frac{t^3}{3a^3}-\frac{t^4}{4a^4}\right)+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$-2f+2fe^{-\frac{t}{g}};$$

at est

$$g=\frac{2A(1+\frac{2}{5}mm)}{\pi cc}.$$

Primum igitur longitudo tubi definiri potest, ut globus celeritate maxima explodatur; hinc autem fit

$$v=\frac{2naf}{a+t}-2f.$$

Est vero

$$\begin{aligned}v=\frac{2(n-1)ft}{g}&-\frac{2(n-1)ftt}{1\cdot 2gg}+\frac{2(n-1)ft^3}{1\cdot 2\cdot 3g^3}-\frac{2(n-1)ft^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4g^4}+\frac{2(n-1)ft^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5g^5}-\text{etc.}\\ &-\frac{1\cdot 2nftt}{1\cdot 2ag}+\frac{1\cdot 2nft^3}{1\cdot 2\cdot 3agg}-\frac{1\cdot 2nft^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4ag^3}+\frac{1\cdot 2nft^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5ag^4}-\text{etc.}\\ &+\frac{1\cdot 2\cdot 2nft^3}{1\cdot 2\cdot 3aag}-\frac{1\cdot 2\cdot 2nft^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4aagg}+\frac{1\cdot 2\cdot 2nft^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5aag^3}-\text{etc.}\\ &-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2nft^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a^3g}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2nft^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^3gg}-\text{etc.}\\ &+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2nft^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^4g}-\text{etc.}\\ &-\text{etc.}\end{aligned}$$

Gravitas specifica globi ad gravitatem specificam aëris ut r ad 1; erit

$$A=\frac{4}{3}\cdot\pi c^3r,$$

ergo

$$b=\frac{4}{3}rc\left(1+\frac{2}{5}mm\right)=\frac{1}{2}g,$$

$$g=\frac{8}{3}rc\left(1+\frac{2}{5}mm\right).$$

NAMENVERZEICHNIS